Resistencia de Materiales Aplicada

Primera Edición

Alejandro M. Mayori M.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Resistencia de Materiales Aplicada

Primera Edición

Alejandro M. Mayori M.
Universidad Mayor de San Andrés

Revisión Técnica:

Editorial Yucatán Hermosa

La Paz Bolivia

Impreso en La Paz – Bolivia

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Dedicatoria

A mis hijas Mariel y Marian
A mi esposa, padres y hermanos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

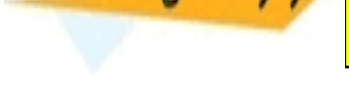
Prefacio

El presente libro estudia los temas más importantes de la Resistencia de Materiales, con énfasis en aplicaciones, solución de problemas y diseño de elementos estructurales y dispositivos mecánicos. El presente texto esta orientado para alumnos de Ingeniería del segundo o tercer año. Es recomendable que los estudiantes que lean este texto hayan completado un curso de estática y otro sobre las propiedades de momentos y centroides de áreas planas.

En el presente libro, la resistencia de materiales se basa en conceptos básicos y en el uso de conceptos simplificados de los cuales se deducen las ecuaciones de modelos matemáticos.

En la mayoría de los capítulos el objetivo principal es la determinación de los esfuerzos normales y cortantes, para luego determinar sus valores máximos y finalmente el cálculo de las correspondientes deformaciones. Se estudian cargas de Tracción, Corte, Torsión y Flexión. Estos tipos de carga se complementan con un apreciable número de ejemplos o problemas resueltos y luego con problemas propuestos para que el alumno refuerce su comprensión.

Las unidades que se emplean en el presente libro son las unidades métricas y para la solución de muchos de los problemas se uso software matemático como MATHCAD.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

ÍNDICE

1.- Conceptos Generales
1.1.- Introducción
1.2.- Concepto de Esfuerzo (Esfuerzo)
1.3.- Concepto de Deformación por Esfuerzos Normales
1.4.- Coeficiente de Poisson
1.5.- Concepto de Deformación por Esfuerzos Cortantes
1.6.- Propiedades Mecánicas de los Materiales
1.7.- Esfuerzo admisible - Coeficiente de Seguridad
1.8.- Modulo de Elasticidad - Ecuación de Hooke
1.9.- Cargas Estáticas y Variables
1.10.- Esfuerzo admisible para Cargas Variables
PROBLEMAS RESUELTOS
PROBLEMAS PROPUESTOS
2.- Tracción Compresión
2.1.- Introducción
2.2.- Esfuerzos en tracción compresión (Cargas en una dimensión)
2.3.- Esfuerzos principales (Cargas en una dimensión)
2.4.- Deformaciones (Cargas en una dimensión)
2.5.- Esfuerzos en tracción compresión (Cargas en dos dimensiones)
2.6.- Esfuerzos principales (Cargas en dos dimensiones)
2.7.- Deformaciones (Cargas en dos dimensiones)
2.8.- Cargas debido al Peso Propio
2.9.- Deformaciones debido a la temperatura
2.10.- Problemas Estáticamente Indeterminados (Hiperestáticos)
PROBLEMAS RESUELTOS
PROBLEMAS PROPUESTOS
3.- Esfuerzos de Corte
3.1.- Introducción
3.2.- Esfuerzos en corte
3.3.- Esfuerzos principales
3.4.- Deformaciones
3.5.- Problemas Estáticamente Indeterminados (Hiperestáticos)
PROBLEMAS RESUELTOS
PROBLEMAS PROPUESTOS
4.- Torsión
4.1.- Introducción
4.2.- Calculo de Esfuerzos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

5.- Flexión - Fuerza Cortante y Momento Flector
5.1.- Introducción
5.2.- Tipos de Cargas
5.3.- Carga puntual equivalente de distribuida
5.4.- Tipos de Apoyos
5.5.- Tipos de Vigas
5.6.- Calculo de reacciones
5.7.- Momento Flector y Fuerza Cortante
5.8.- Relación entre el momento Flector y la Fuerza Cortante
5.9.- Cálculo del momento Flector y la Fuerza Cortante
5.10.- Valores del Momento Flector y la Fuerza Cortante en los extremos
5.11.- Calculo de Momentos por funciones de Singularidad
PROBLEMAS RESUELTOS
PROBLEMAS PROPUESTOS
6.- Flexión – Esfuerzos Normales y Cortantes
6.1.- Introducción
6.2.- Esfuerzos normales en flexión
6.3.- Esfuerzo cortantes en flexión
6.4.- Perfiles preferidos para secciones transversales de vigas
PROBLEMAS RESUELTOS
PROBLEMAS PROPUESTOS
7.- Deformaciones en flexión
7.1.- Introducción
7.2.- método de la doble integración
7.3.- Método de Superposición
7.4.- Método del Área del Diagrama de Momentos
7.5.- Sistemas Hiperestáticos.-
PROBLEMAS RESUELTOS
a) Método de la doble integración
b) Método de Superposición
c) Método del Área del diagrama de Momentos
d) Sistemas hiperestáticos
PROBLEMAS PROPUESTOS
a) Método de la doble integración
b) Método de superposición
c) Sistemas hiperestáticos
8.- Métodos Energéticos
8.1.- Introducción

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS PROPUESTOS
9.- Esfuerzos Combinados
9.1.- Introducción
9.2.- Ecuaciones para hallar el esfuerzo en cualquier dirección
9.3.- Circulo de Mohr
9.4.- Esfuerzos principales
9.5.- Ecuaciones para hallar la deformada en cualquier dirección
9.6.- Combinación de Esfuerzos
9.7.- Combinación de Deformaciones
PROBLEMAS RESUELTOS
PROBLEMAS PROPUESTOS
10.- Pandeo de Columnas
10.1.- Introducción y Objetivos
10.2.- Tipos de apoyos
10.3.- Tipos de Columnas
10.4.- Falla por pandeo (Formula de Euler)
10.5.- Falla por Compresión y por pandeo
10.6.- Formula de La Secante
Problemas Resueltos
Problemas Resueltos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

1.- CONCEPTOS GENERALES

1.1.- INTRODUCCIÓN

1.1.1 Propósito de la Resistencia de los Materiales

En los cursos de estática se consideran los cuerpos indeformables, sin embargo en la realidad los cuerpos sufren deformaciones. La Resistencia de los Materiales analiza a los cuerpos como deformables, predice estas deformaciones y permite encontrar los materiales y dimensiones óptimos. Con la Resistencia de los Materiales se puede verificar la habilidad de los elementos para soportar las cargas a las que están sometidos y se pueden diseñar elementos seguros y baratos.

Entonces en lo posterior se consideran a todos los cuerpos no rígidos sino elásticos, es decir, que cualquier carga producirá en ellos deformaciones que en magnitud son pequeñas comparadas con las dimensiones globales del cuerpo.

1.1.2. Tipos de elementos

En el presente texto los cuerpos se clasificaran en tres tipos:

a) Barra: Es un cuerpo que tiene dos dimensiones pequeñas en comparación con la tercera. La línea une los centros de gravedad de sus secciones transversales se denomina eje centroidal de la barra

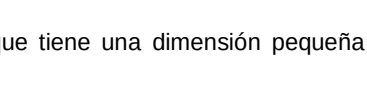
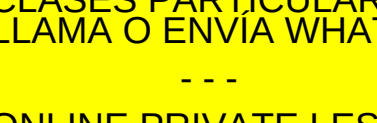


Fig. 1.1.- Barra

b) Placa: Es un cuerpo que tiene una dimensión pequeña en comparación con las otras dos.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

1.1.3. Tipos de problemas

La Resistencia de Materiales tiene como finalidad el cálculo de los cuerpos sometidos a cargas y los problemas a resolver son de dos tipos:

a) Dimensionamiento.- Cuando se busca seleccionar el material, las formas y dimensiones más adecuadas de una pieza, de manera que ésta pueda trabajar con seguridad, en buen estado y con costos adecuados.

b) Verificación.- Cuando una pieza tiene el material, las formas y dimensiones prefijadas y es necesario conocer si estas son las adecuadas para resistir el estado de solicitaciones actuantes.

1.1.4. Hipótesis fundamentales

En el presente texto se asumen como ciertas las siguientes hipótesis:

a) Los material se consideran continuos.- La mayoría de los materiales cumple con esta hipótesis aún cuando existan poros o se considere la discontinuidad de la estructura de la materia, compuesta por átomos que no están en contacto rígido entre sí, ya que existen espacios entre ellos y fuerzas que los mantienen vinculados, formando una red ordenada.

b) Los materiales se consideran homogéneos.- Con esta hipótesis se consideran las propiedades idénticas en todos los puntos.

c) Los materiales son isótropos.- Con esta hipótesis se consideran las propiedades idénticas en todas las direcciones. Los metales son materiales homogéneos e isótropos y la madera, el hormigón y la piedra no lo son.

d) Las fuerzas interiores que preceden a las cargas son nulas.- Las fuerzas interiores entre las partículas del material se oponen al cambio de la forma y dimensiones del cuerpo sometido a cargas. Al hablar de fuerzas interiores no consideramos las fuerzas moleculares que existen en un sólido no sometido a cargas.

e) Es válido el principio de superposición de efectos.- Debido a que las deformaciones de los cuerpos son pequeños en comparación con las dimensiones del mismo, las ecuaciones de equilibrio correspondiente a un cuerpo cargado pueden plantearse

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

dependen del modo de aplicación de las mismas, por lo que se puede sustituir un sistema de fuerzas por otro equivalente

g) Las cargas son estáticas o cuasi-estáticas.- Es decir que no varían con el tiempo

1.1.5. Metodología

Para el calculo de elementos y sistemas nunca se podrán incluir todas las variables por lo que se deben despreciar aquellas que no son relevantes. Por ejemplo, en el calculo del cable de un ascensor se deben incluir el peso de la cabina, su aceleración y el peso del cable, pero se pueden despreciar la resistencia al aire del ascensor, la presión barométrica a distintas alturas, la variación de la temperatura con la altura, etc.

Adicionalmente se deberán realizar ciertas simplificaciones en:

a) La geometría del objeto. Así los sólidos muy largos se idealizaran como barras.

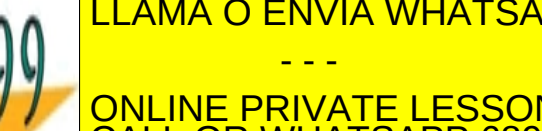
b) Los vínculos. Usualmente se consideran ideales.

c) Los sistemas de fuerzas aplicadas. Las cargas concentradas prácticamente no existen en la realidad, sino que son las resultantes de fuertes presiones localizadas en zonas pequeñas.

d) Las propiedades de los materiales.

1.2. FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS

Los elementos de estructuras o maquinas están sometidos a la acción de fuerzas y momentos externos. Estas Fuerzas y Momentos externos generan en las secciones internas de los cuerpos, Fuerzas y Momentos Internos que cuando sobrepasan a las fuerzas de atracción de las moléculas del material producen la separación o rotura de la pieza. Las Fuerzas y los Momentos de cada sección internos se pueden hallar generalmente con las ecuaciones de la estática



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

La magnitud y dirección de la Fuerza y el Momento internos dependen de la sección elegida, pero pueden descomponerse en una dirección normal y en otra tangencial a la sección. Estas componentes definen los diferentes tipos de carga. Así la componente de la Fuerza Normal a la sección producirá cargas Normales de Tracción o Compresión, la componente de la Fuerza Tangencial a la sección producirá cargas de Corte o Tangenciales, la componente del Momento Normal a la sección producirá cargas de Torsión y la componente del Momento Tangencial a la sección producirá cargas de Flexión.

1.3. CONCEPTO DE ESFUERZO O TENSIÓN

Considérese una barra sometida a la acción de dos fuerzas iguales, opuestas y colineales en sus extremos. Se verifica el equilibrio: P - P = 0

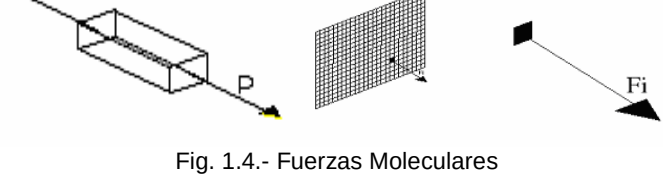


Fig. 1.4.- Fuerzas Moleculares

Si se aumenta el tamaño de una sección de la barra hasta ver sus moléculas. La fuerza externa se distribuye en pequeñas fuerzas tirando de cada molécula, que tratan de separarla de sus vecinas. Sin embargo la atracción entre moléculas opone resistencia con una fuerza igual y contraria, lo que finalmente impide que las moléculas se alejen entre si. Tomando un par de ellas se verifica que:

-Pi Fi -Fi Pi (1.1

Donde Pi es la acción sobre cada molécula generada por las fuerzas “P” y “Fi “ las reacciones que opone el material generada por la atracción molecular (o Atómica).

Aumentando “P” aumenta la reacción Fi , que podrá crecer hasta un determinado límite, más allá del cual las moléculas se separan irremediablemente, y como consecuencia la barra se deforma permanentemente o se separa.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

entre si y perpendiculares a su eje longitudinal (Parecido a varios naipes firmemente pegados entre sí). Cada sección transversal sería tan delgada como el diámetro de un átomo. Al mirar la barra de costado veríamos:

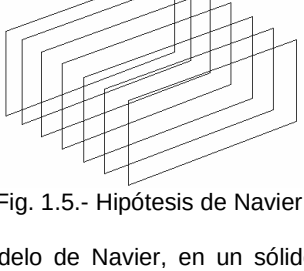


Fig. 1.5.- Hipótesis de Navier

Entonces de acuerdo al modelo de Navier, en un sólido homogéneo cada sección transversal es una especie de placa con el espesor de un átomo, donde todos los átomos están perfectamente ordenados y dispuestos según un arreglo matricial cuadrado. Sobre cada átomo de cada una de las secciones, actuará una fuerza Pi, de manera que podríamos escribir :

$$P_i = \frac{P}{n} \qquad (1.2$$

$$P = \sum_{i=0}^{n} P_i \qquad (1.3$$

Donde : “n” el número de átomos que hay en la sección transversal.

Este modelo atómico explica el comportamiento de un sólido ideal. Sin embargo los materiales reales distan mucho de esta definición, por lo que en un modelo más “macro” se divide a cada sección transversal en un número finito “N” de áreas unitarias elementales y que al aplicar una fuerza P esta no se concentra en un solo punto sino que se distribuye en toda el área de la sección dando como resultado una fuerza Fi sobre cada área unitaria. La fuerza que soporta cada unidad de área es el Esfuerzo.

$$Esfuerzo = \frac{Fuerza}{Area} = \frac{F}{A} \qquad (1.4$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

fuerzas de compresión el esfuerzo normal será negativo y para fuerzas de tracción el esfuerzo normal será positivo.

En la figura 6, se muestran dos perfiles unidos por un perno que soportan la acción de dos fuerzas opuestas P y paralelas al eje del perno. En las secciones transversales al perno aparecen fuerzas internas perpendiculares a estas secciones que se distribuyen generando solo esfuerzos normales.

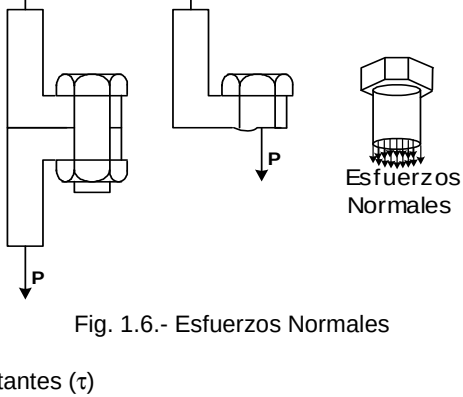
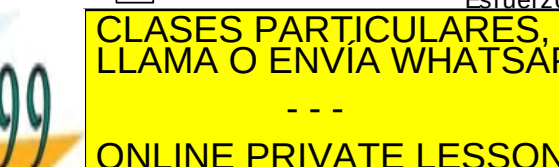


Fig. 1.6.- Esfuerzos Normales

1.3.2.- Esfuerzos Cortantes (τ)

Aquellos esfuerzos o fuerzas que soporta cada unidad de área cuya dirección es tangencial a la sección transversal se conocen como esfuerzos cortantes. Los esfuerzos de corte no son positivos ni negativos.

En la figura 7, se muestran dos piezas unidas por un perno que soportan la acción de dos fuerzas opuestas P y perpendiculares al eje del perno. En las secciones transversales al perno aparecen fuerzas internas tangenciales a ellas que se distribuyen generando solo esfuerzos cortantes.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

1.4. RESISTENCIA DE LOS CUERPOS

Los esfuerzos que un cuerpo puede soportar dependen únicamente del material Sin embargo las Fuerzas y Momentos que un cuerpo puede soportar dependen además del material, de sus dimensiones.

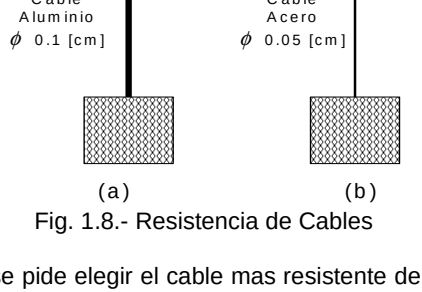


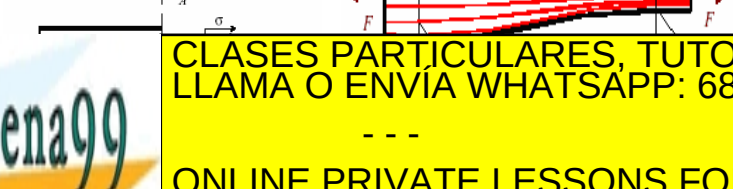
Fig. 1.8.- Resistencia de Cables

A modo de ilustración, se pide elegir el cable mas resistente de dos cables, el primero de aluminio de 1 mm de diámetro y el segundo de acero de 0.5 mm de diámetro. Un breve análisis no sugiere que :

- Si ambos cables tuvieran el mismo diámetro, debido a que el acero es más resistente que el aluminio se debería elegir al segundo
- Si el material fuera el mismo para ambos cables, el de mayor resistencia fuera el de mayor diámetro y por lo tanto se debería elegir al primero

Ahora bien como los materiales y las dimensiones son diferentes la elección del cable con mayor resistencia se complica. La elección se analiza en la sección de problemas resueltos.

1.5. DENSIDAD O FLUJO DE ESFUERZOS



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Si una barra de sección constante es sometida a cargas de tracción F, en cualquier sección transversal aparece una fuerza interna de igual magnitud F que equilibra a la externa y que se origina solo esfuerzos normales $\sigma = F/A$ de magnitud constante.

Cuando una barra de sección variable se somete a cargas de tracción F, en cualquier sección transversal aparece una fuerza interna F que equilibra a la externa que se distribuye en esfuerzos normales. Sin embargo la magnitud de estos esfuerzos es variable debido a la variación del área. Estos esfuerzos son mayores donde las secciones normales son las menores y viceversa. Dibujando líneas equidistantes de la periferia se puede apreciar que ellas tienen mayor "concentración" o "densidad" donde el área es menor. La magnitud de los esfuerzos es proporcional a la concentración de líneas equidistantes. Este fenómeno es similar a la velocidad que adquiere un fluido en una tubería por lo que también es conocido por flujo de esfuerzos.

1.6. CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS

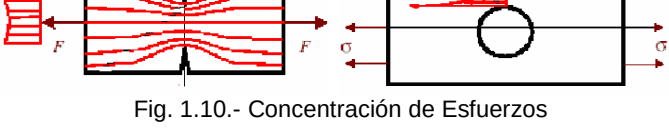


Fig. 1.10.- Concentración de Esfuerzos

Los cambios o variaciones de las secciones transversales de una pieza y especialmente las variaciones bruscas, resultan en la magnificación de los Esfuerzos efecto conocido como Concentración de Esfuerzos. Las hendiduras, agujeros y cambios de sección bruscos son Concentradores de Esfuerzos. Se ha podido verificar que por ejemplo un agujero circular en una placa plana incrementa los esfuerzos hasta tres veces.

1.7. TIPOS DE SOLICITACIÓN O CARGA

Los tipos de solicitación o carga son:

1.7.1.- Cargas Axiales de Tracción o Compresión

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Una barra recta esta sometida a cargas de tracción o compresión sometida a fuerzas paralelas a su eje centroidal. Dependiendo si la carga tiende a estirar o a comprimir la pieza, la carga será de tracción o compresión.

1.7.2.- Cargas Tangenciales o de Corte

Un cuerpo esta sometido a cargas tangenciales o de corte cuando sus caras o secciones internas soportan fuerzas tangenciales.

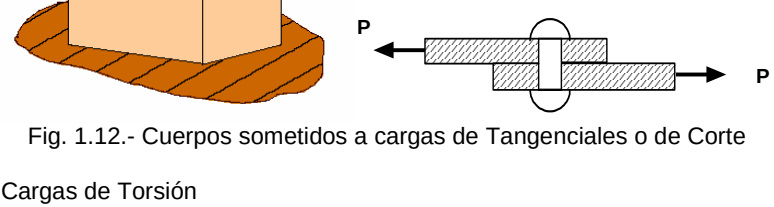


Fig. 1.12.- Cuerpos sometidos a cargas de Tangenciales o de Corte

1.7.3.- Cargas de Torsión

Una barra esta sometida a cargas de torsión cuando en sus extremos están aplicados momentos con dirección paralela al centroidal.

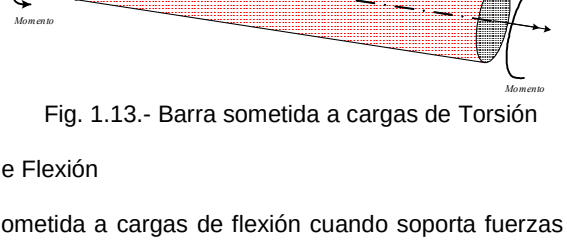
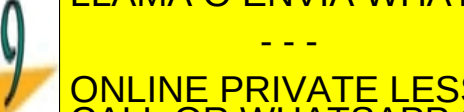


Fig. 1.13.- Barra sometida a cargas de Torsión

1.7.4.- Cargas de Flexión

Una viga esta sometida a cargas de flexión cuando soporta fuerzas y momentos con dirección perpendicular a su eje centroidal



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

1.7.5.- Cargas Combinadas

Los cuerpos y elementos bajo condiciones de carga reales presentaran la combinación de los anteriores tipos de carga. En el presente texto inicialmente se analizaran los tipos de carga individual separadamente El cómo combinar los diferentes tipos de carga, se analizar posteriormente.

1.8. DEFORMACIONES

Las deformaciones que presentan los cuerpos dependen de los tipos de carga a los que están sometidos

1.8.1.- Deformación provocada por Cargas de Axiales

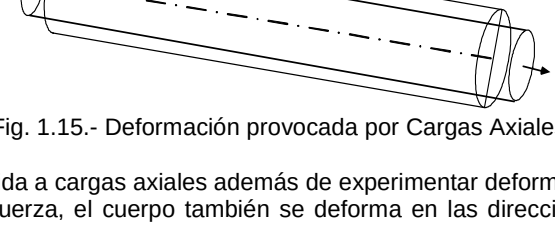


Fig. 1.15.- Deformación provocada por Cargas Axiales

Una barra sometida a cargas axiales además de experimentar deformación según la Dirección de la fuerza, el cuerpo también se deforma en las direcciones normales a ella. La tracción provoca alargamiento con adelgazamiento y la compresión acortamiento con ensanchamiento

Las deformaciones se definen como:

$\delta = l_f - l_o$	Deformación longitudinal
$\varepsilon = (l_f - l_o)/l_o$	Deformación longitudinal unitaria
$\delta_q = d_f - d_o$	Deformación transversal
$\varepsilon_q = (d_f - d_o)/d_o$	Deformación transversal unitaria
l_f, l_o, d_f y d_o	Dimensiones longitudinal y normal final e inicial

1.8.2. Coeficiente de Poisson

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

El coeficiente de Poisson vale de 0,25 a 0,35 en los materiales metálicos, de 0,1 a 0,25 para el concreto y para los elastómeros y materiales plásticos hasta 0,5.

1.8.3.- Deformación provocada por Cargas de Corte

Las cuerpos sometidos a Cargas de Corte mas que deformarse (cambio de dimensiones) se distorsionan (cambio de forma).

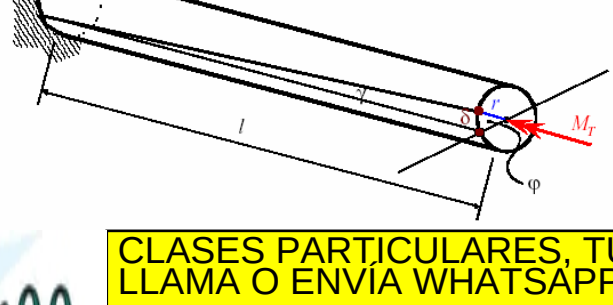
Fig. 1.16.- Distorsión provocada por Cargas de Corte

La deformación se define como:

γ Angulo de inclinación de las caras

1.8.4.- Deformación provocada por Cargas de Torsión

Las barras sometidas a cargas de Torsión no presentan deformaciones longitudinales sino rotaciones o deformaciones angulares. Las secciones transversales giran una respecto a otra.



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

1.8.5.- Deformación provocada por Cargas de Flexión

Los cuerpos generalmente rectos sometidos a cargas de Flexión se vuelven curvos por lo que presentan deformaciones lineales y angulares.

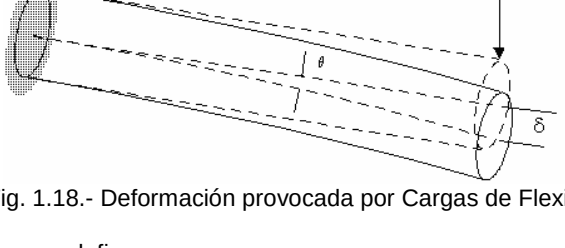


Fig. 1.18.- Deformación provocada por Cargas de Flexión

Las deformaciones se definen como:

Δ Deformación lineal
θ Deformación angular

1.9.- RELACIÓN ESFUERZO NORMAL – DEFORMACIÓN LONGITUDINAL.

1.9.1.- Ensayo de tracción

El ensayo de tracción consiste en someter a una barra a cargas axiales y graduales de tracción y hallar las deformaciones que estas producen. Para ello en una máquina de ensayos se traccionan probetas normalizadas para poder repetir internacionalmente el ensayo. Para los aceros, la probeta tiene en su parte central una sección transversal circular con un área de 1 cm2, (diámetro = 11,284 mm). Esta sección se ensancha gradualmente en sus extremos para una mejor sujeción a las mordazas de la máquina de ensayos.

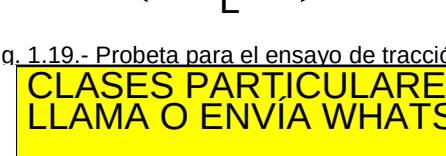


Fig. 1.19.- Probeta para el ensayo de tracción

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

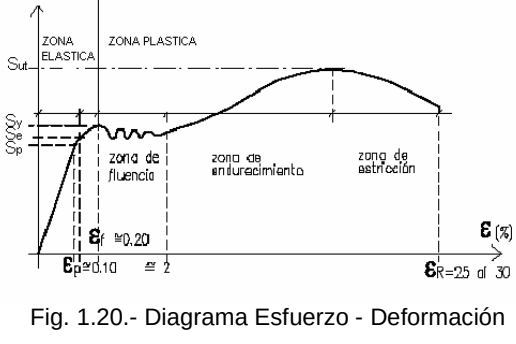


Fig. 1.20.- Diagrama Esfuerzo - Deformación

1.9.3.- Propiedades Mecánicas

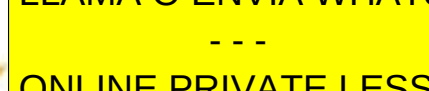
En el Diagrama Esfuerzo - Deformación se definen:

a) Zona elástica.- Zona donde las deformaciones no son permanentes
b) Zona plástica.- Zona donde las deformaciones son permanentes
c) Límite de elasticidad S_e.- Esfuerzo máximo que provoca deformaciones no permanentes
d) Límite de proporcionalidad S_p.- Esfuerzo máximo donde hay proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones
e) Límite de fluencia S_y.- Esfuerzo que produce uma aumento de deformacion sin incremento de esfuerzo

La esfuerzo de proporcionalidad resulta ser aproximadamente el 80% de la esfuerzo de fluencia.

$$\sigma_p = 0.8\sigma_y \qquad (1.6$$

Durante la fluencia se producen deslizamientos relativos entre los cristales y en la superficie de la probeta aparecen las llamadas líneas de Chernov - Lüders, que forman con el eje de la misma un ángulo de 45º.



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

e) Límite de rotura Sut.- Sobrepasada la fluencia, el material se endurece y admite un incremento de carga aunque con grandes deformaciones. El límite de rotura es el esfuerzo máximo del grafico. Este esfuerzo luego disminuye hasta que se produce la rotura o separación física.

Fig. 1.22.- Estriccion

f) Coeficiente de estricción lateral ψ.- Pasado el esfuerzo de rotura Sut, la sección central de la pieza se reduce por lo que aumentan las esfuerzos (diagrama efectivo) aunque para el cálculo de las esfuerzos se toma el área inicial (diagrama convencional).

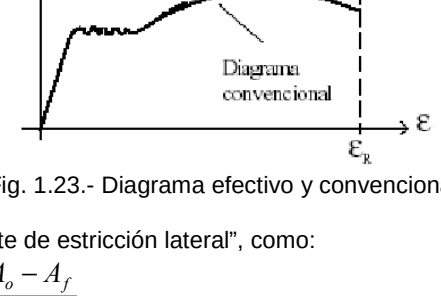


Fig. 1.23.- Diagrama efectivo y convencional

Se define el “coeficiente de estricción lateral”, como:

$$\psi = \frac{A_o - A_f}{A_f} \qquad (1.7$$

donde A_o y A_f son las áreas inicial y final. En los aceros ψ ~ 50%

g) Módulo de elasticidad E.- Es la tangente de la recta en la zona elástica

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$tg(\alpha) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \qquad (1.8$$

1.9.5.- Endurecimiento

Cuando una pieza metálica se descarga en la zona plástica, el esfuerzo desaparece por una recta paralela a la de la zona elástica, quedando una deformación permanente. Si la pieza se carga de nuevo la curva llega al punto N, y la proporcionalidad entre esfuerzos y deformadas se verifica hasta esfuerzos mayores a la fluencia inicial.

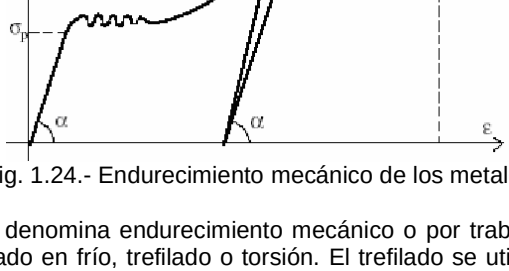


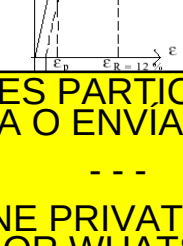
Fig. 1.24.- Endurecimiento mecánico de los metales

Este fenómeno se denomina endurecimiento mecánico o por trabajo en frío y puede lograrse por laminado en frío, trefilado o torsión. El trefilado se utiliza para endurecer alambres o barras circulares finas, y el torsionado para barras redondas. Las características de los aceros endurecidos son:

-. Sus límites de proporcionalidad y elasticidad son más elevados que los aceros comunes.

-. La deformación de rotura se reduce considerablemente

-. No hay una zona de escurrimiento plástico ni un límite de fluencia definido. Este se determina en forma convencional como la esfuerzo para la cual la deformación unitaria permanente del 0.2 %



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Los materiales como el acero dulce, que alcanzan una gran deformación antes de alcanzar la rotura, se denominan “dúctiles” y los materiales como el acero duro donde la rotura se produce sin grandes deformaciones se denominan “frágiles”.

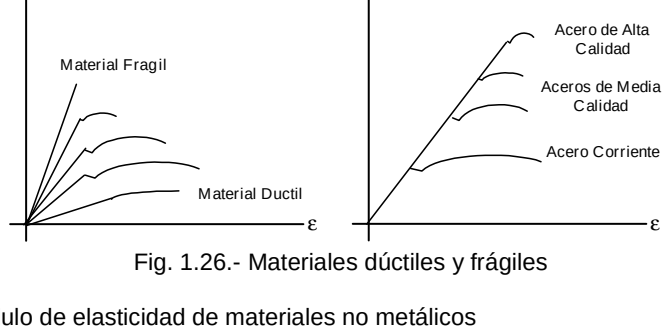


Fig. 1.26.- Materiales dúctiles y frágiles

1.9.7.- Modulo de elasticidad de materiales no metálicos

El diagrama esfuerzo deformación de algunos materiales no presenta un tramo recto (Ej. el hormigón) y se toman tres valores del módulo de elasticidad

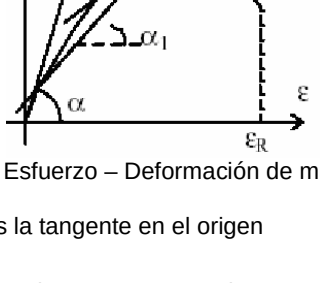


Fig. 1.27.- Diagrama Esfuerzo – Deformación de materiales no metálicos

a) Módulo al origen.- Que es la tangente en el origen

$$E = tg(\alpha) \qquad (1.9$$

b) Módulo instantáneo. Que es la tangente en cada punto

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = tg(\alpha) \qquad (1.10$$

c) Módulo secante.- Que es la tangente del ángulo α1.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Material	Coeficiente k
Hormigón	k = 1,15
Cobre	k = 1,10
Latón	k = 1,085
Cuero	k = 0,70

En el caso particular en que se toma k = 1, 0 se obtiene la ley de Hooke

1.9.8.- Diagramas esfuerzo – deformación ideal

Para simplificar el manejo matemático se puede idealizar los diagramas de esfuerzo deformación (Prandtl). Para un material dúctil se toman dos tramos rectos, el primero inclinado correspondiente al período elástico; el otro horizontal, correspondiente al período de fluencia. El período de endurecimiento no interesa porque la deformación al final de la fluencia es tan significativa que el material está en falla antes de llegar a la rotura.

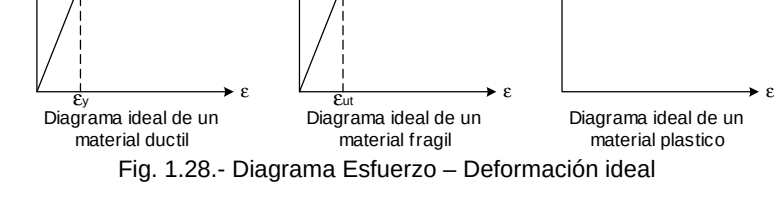


Fig. 1.28.- Diagrama Esfuerzo – Deformación ideal

Para un material frágil el límite de proporcionalidad es muy próximo a la esfuerzo de rotura, prescindiéndose entonces del tramo curvo.

Para materiales plásticos el diagrama es una recta horizontal, lo que significa que sometidos a una carga, se deforman indefinidamente sin incremento de esfuerzo.

1.10.- RELACIÓN ESFUERZO CORTANTE – DEFORMACIÓN ANGULAR.

1.10.1.- Ensayo de corte

El ensayo de corte consiste en someter a un cuerpo a cargas graduales de corte y hallar las deformaciones que estas producen. Para ello generalmente un

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

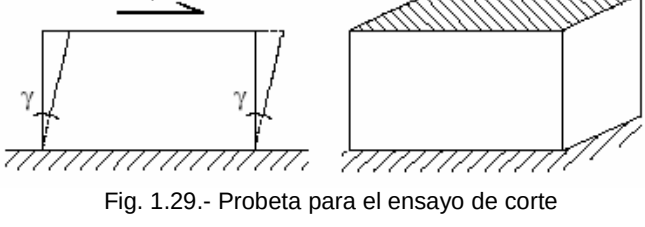


Fig. 1.29.- Probeta para el ensayo de corte

La grafica entre esfuerzos cortantes τ y deformaciones γ, es similar a la de esfuerzos normales.

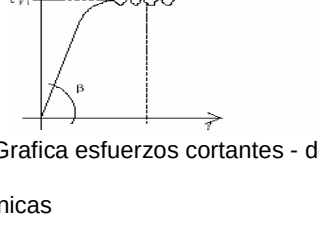


Fig. 1.30.- Grafica esfuerzos cortantes - deformaciones

1.10.2.- Propiedades Mecánicas

En el diagrama se definen:

a) Zona elástica.- Zona donde las deformaciones no son permanentes
b) Zona plástica.- Zona donde las deformaciones son permanentes
c) Límite de elasticidad S_e'.- Esfuerzo máximo al que el material se comporta elásticamente
d) Límite de proporcionalidad S_p'.- Esfuerzo máximo donde se verifica proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones
e) Limite de fluencia S_y'.- Esfuerzo que produce uma aumento de deformacion sin incremento de esfueroz
f) Módulo de elasticidad transversal G.- Es la tangente de la recta en la zona elástica

1.10.2.- Ecuación de Hooke

En la zona elástica los esfuerzos cortantes son proporcionales a las deformaciones

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Los módulos de elasticidad longitudinal y transversal están relacionados por:

$$E = 2\,G\,(1 + \nu) \qquad (1.14$$

1.11.- COEFICIENTE DE SEGURIDAD Y ESFUERZO ADMISIBLE

En una pieza existen numerosas causas de incertidumbres:

- Las hipótesis de cargas
- Las hipótesis de cálculo
- Los errores de cálculos
- Defectos del material
- Errores de las dimensiones
- Errores de ejecución

La falla de una pieza además de una perdida económica puede provocar perdidas humanas por lo que se debe buscar la máxima seguridad. La teoría de probabilidades nos enseña que no se puede lograr una seguridad absoluta, lo único que puede hacerse es mantener reducidas las probabilidades de falla. Para ello el esfuerzo máximo de trabajo no debe superar cierto valor.

$$\sigma_{\max} \le \frac{S_{adm}}{\eta} \qquad (1.15$$

$$\tau_{\max} \le \frac{S'_{adm}}{\eta} \qquad (1.16$$

donde :

η es el "coeficiente de seguridad" un número mayor que la unidad
S_L para materiales dúctiles es el límite de fluencia y para frágiles es el límite de rotura

La elección del coeficiente de seguridad es compleja pero disposiciones reglamentarias que tratan sobre construcciones de acero; indican valores que varían entre 1.25 y 1.60. Para estructuras de hormigón armado, los coeficientes de seguridad varían entre 1,75 y 2,10.

1.12.- CARGAS ESTÁTICAS Y VARIABLES

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

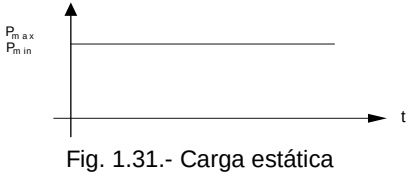


Fig. 1.31.- Carga estática

1.12.2.- Cargas Variables

Cargas Variables son aquellas en las que la magnitud de la carga varía con el transcurso del tiempo. Por lo general estas cargas pueden representarse por ondas armónicas.

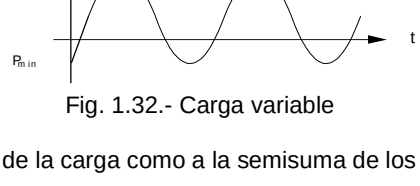


Fig. 1.32.- Carga variable

Se define el valor medio de la carga como a la semisuma de los valores extremos

$$P_{med} = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \qquad (1.17$$

Dos casos especiales de las cargas variables son:

- Cargas Intermitentes.- Son aquellas cuyo valor mínimo es cero.

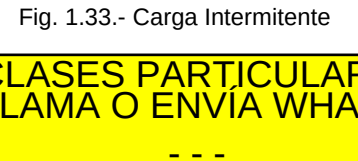


Fig. 1.33.- Carga Intermitente

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

- Cargas Alternantes.- Son aquellas cuyos valores máximos y mínimos tienen igual magnitud pero diferente sentido

Fig. 1.34.- Carga Alternante

$$P_{med} = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} = 0 \qquad (1.19$$

1.12.3.- Teoría de Goodman Modificado

Existen varias teorías para verificar la falla frente a cargas variables. En el presente libro se analizara sólo la teoría de Goodman Modificado que exige a los esfuerzos estar dentro de la región sombreada del Diagrama de Goodman

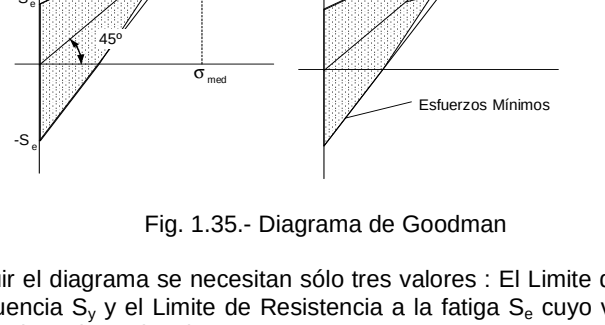
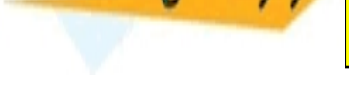


Fig. 1.35.- Diagrama de Goodman

Para construir el diagrama se necesitan sólo tres valores : El Limite de Rotura S_{ut} , El Limite de Fluencia S_y y el Limite de Resistencia a la fatiga S_e cuyo valor aproximado es la mitad de la resistencia a la rotura.

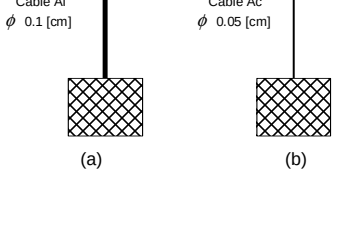


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1. Hallar la capacidad de carga de dos cables metálicos, el primero de Aluminio con un diámetro de 1 mm y el segundo de Acero con un diámetro de 0.5 mm. Tomar S_y al = 283 Mpa (2884.8 Kg/cm^2) y S_y ac= 428 Mpa (4362.8 Kg/cm^2).



Solución :

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq S_y$$

$$P \leq AS_y$$

De donde P_{al}= 22.65 Kg
P_{ac}= 8.56 Kg

Por lo que el cable de aluminio puede levantar una mayor carga que el de acero.

1.2. Dos barras “a” y “b” con una longitud inicial de 10 cm y 100 cm y un diámetro de 1 cm, se deforman hasta alcanzar longitudes finales de 11 cm y 105 cm respectivamente. Se pide calcular las deformadas longitudinales (total y unitaria)

Solución : $\delta = l_f - l_o$
$\varepsilon = \delta / l_o = (l_f - l_o)/ l_o$
δ_a = 1 cm
ε_a = 0.1 (10%)
δ_b = 5 cm
ε_b = 0.05 (5%)
Nótese que: $\delta_a < \delta_b$ pero $\varepsilon_a > \varepsilon_b$

1.3. En el problema anterior ambas se pide calcular las deformadas transversales

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

ε_{qa} = - 0.03 (3%)
d_{fa} = 0.97 cm
ε_{qb} = - 0.015 (1.5%)
d_{fb} = 0.985 cm

1.4. Para el problema 1.2 se pide hallar los esfuerzos a los que están sometidas las piezas si son de acero. Tomar E = 2.1 x 10 6 Kg/cm^2

Solución : $\sigma = E \varepsilon$
ε_a = 0.1 (10%)
ε_b = 0.05 (5%)
Entonces σ_a = 210000 Kg/cm^2
σ_b = 105000 Kg/cm^2
Ningún material soporta estos esfuerzos. Estas deformadas (10 y 5 %) son imposibles.

1.5. Cual es la deformada máxima que puede tener un acero antes de fallar. Tomar S_y = 428 Mpa (4362.8 Kg/cm^2) y E = 2.1 x 10 6 Kg/cm^2

Solución : $\sigma < S_y$
$\sigma = E \varepsilon$
$\varepsilon <= S_y / E$ = 0.00207 (0.2%)

1.6. Una carga de 100 Kg se aplica a dos piezas de aluminio y acero con el mismo diámetro de 1 cm. Tomando E_{acero} = 2.1 x 10 ^{6} Kg/cm^2, $E_{aluminio}$ = 0.9 x 10 ^{6} Kg/cm^2, $S_{y\ acero}$= 428 Mpa (4362.8 Kg/cm^2) y $S_{y\ aluminio}$ = 283 Mpa (2884.8 Kg/cm^2). Se pide hallar : La relación de deformadas y La relación de factores de seguridad.

Solución : $\varepsilon = \sigma / E$
$\eta = Sy/\sigma$
$\sigma_{acero} = P/A = \sigma_{aluminio}$
$\varepsilon_{acero}/\varepsilon_{aluminio} = E_{aluminio} / E_{acero}$ = 0.428 (42.8 %)
$\eta_{acero} / \eta_{aluminio} = S_{y\ acero} / S_{y\ aluminio}$ = 1,512 (151,2 %)

Estos resultados muestran primero que el acero se deforma menos que el aluminio y segundo que el acero resiste más que el aluminio

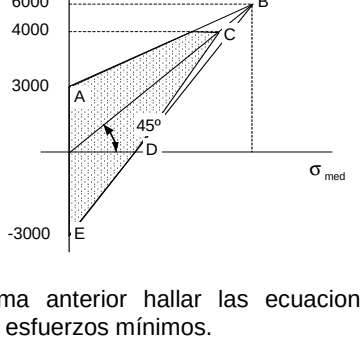
1.7. Hallar los módulos de elasticidad transversales del Acero y del Aluminio. Tomar v

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

1.8. Construir el diagrama de Goodman Modificado para un material con S_y = 4000 Kg/cm^2 S_{ut} = 6000 Kg/cm^2 y $S_e = S_{ut}/2$ = 3000 Kg/cm^2

Solución:



1.9. En el problema anterior hallar las ecuaciones de los esfuerzos máximos, esfuerzos medios y esfuerzos mínimos.

Solución: A (0,3000)
B (6000,6000)
C (4000,4000)
E (0,-3000)

La ecuación de la recta conocidos dos puntos es

$$\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)} = \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$$

Para (A,B) $\dfrac{(y-3000)}{(x-0)} = \dfrac{(6000-3000)}{(6000-0)}$ para $S_{max} < 4000$

Las curvas de esfuerzos mínimos van de B a E y de C a D

$$\frac{(y-6000)}{(x-6000)} = \frac{(-3000-6000)}{(0-6000)}$$

S_{min} = 1,5 x – 3000 para $\sigma_{min} < 0$

Cuando S_{min} = 0 se halla que x = 2000 y D = (2000,0)

$$\frac{(y-4000)}{(x-4000)} = \frac{(0-4000)}{(2000-4000)}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

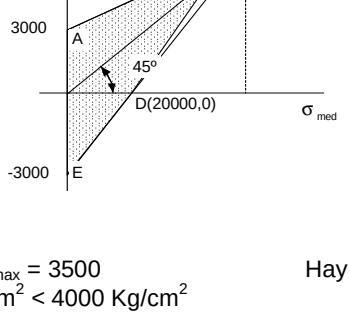
Solución :

a) Carga estática $S = S_y = 4000\ Kg/cm^2$
b) Carga intermitente $S =. S_{max} = x/2+3000$
para $x = 2000$ $S = 4000\ Kg/cm^2$
c) Carga alternante $S = S_e = 3000\ Kg/cm^2$

1.11. Para las cargas dadas determinar en cada caso si hay o no falla con el material del problema anterior.

$\sigma_{max} = 3500\ Kg/cm^2$ y $\sigma_{min} = -3500\ Kg/cm^2$.
$\sigma_{max} = 3500\ Kg/cm^2$ y $\sigma_{min} = -500\ Kg/cm^2$.
$\sigma_{max} = 4500\ Kg/cm^2$ y $\sigma_{min} = 0\ Kg/cm^2$.
$\sigma_{max} = 4500\ Kg/cm^2$ y $\sigma_{min} = 1500\ Kg/cm^2$.

Solución : $\sigma_{med} = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$
$\sigma_{a\ med} = 0$
$\sigma_{b\ med} = 1500\ Kg/cm^2$
$\sigma_{c\ med} = 2250\ Kg/cm^2$
$\sigma_{d\ med} = 3000\ Kg/cm^2$



a) $\sigma_{a\ med} = 0$
$S_{max} = 3000 < \sigma_{a\ max} = 3500$ Hay falla
b) $\sigma_{b\ max} = 3500\ Kg/cm^2 < 4000\ Kg/cm^2$
$y = x/2+3000$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

y = x/2+3000

S_{max} = 4125 $< \sigma_{b\,max}$ = 4500 Kg/cm^2 Hay falla

d) $\sigma_{d\,max}$ = 3000 Kg/cm^2 < 4000 Kg/cm^2

y = x/2+3000

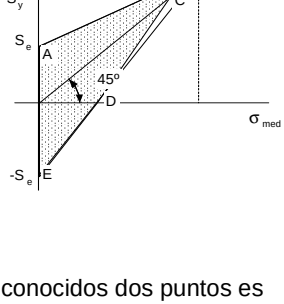
S_{max} = 4500 $< \sigma_{b\,max}$ = 4500 Kg/cm^2 No hay falla

$\sigma_{d\,min}$ = 3000 Kg/cm^2 > 0

y = 2x – 4000

S_{min} = 2000 $> \sigma_{b\,min}$ = 1500 Kg/cm^2 Hay falla

1.12. Hallar las ecuaciones genéricas de los esfuerzos máximos, esfuerzos medios y esfuerzos mínimos.



Solución:

La ecuación de la recta conocidos dos puntos es

$$\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)}=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$$

La curva de esfuerzos máximos va de A a B

$$\frac{(y-0.5S_{ut})}{(x-0)}=\frac{(S_{ut}-0.5S_{ut})}{(S_{ut}-0)}$$

$$S_{max}=\frac{(x+S_{ut})}{2}$$ para $S_{max} < S_y$

Las curvas de esfuerzos mínimos van de B a E y de C a D

BE) $$\frac{(y-S_{ut})}{(x-S_{ut})}=\frac{(-0.5S_{ut}-S_{ut})}{(0-S_{ut})}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\frac{(y-S_y)}{(x-S_y)} = \frac{(0-S_y)}{(\frac{S_{ut}}{3}-S_y)}$$

$$y = \frac{(x-S_y)(-S_y)}{(\frac{S_{ut}}{3}-S_y)} + S_y$$

$$S_{\min} = \frac{(x-S_y)(-S_y)}{(\frac{S_{ut}}{3}-S_y)} + S_y$$

para $\sigma_{min} > 0$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.13. Se pide hallar la carga que pueden levantar (resistencia) dos cables metálicos, el primero de Aluminio con un diámetro de 2 mm y el segundo de Acero con un diámetro de 1 mm. Tomar S_y al = 2884.8 Kg/cm^2 y $S_{y\ ac}$= 4362.8 Kg/cm^2

1.14. Se pide hallar resistencia de los cables del 1.anterior, para cargas Alternante e Intermitente.

1.15. Una carga de 100 Kg se aplica a una pieza de Acero con un diámetro de 1 cm y una longitud de 100 cm. Se pide calcular las deformadas longitudinal y transversal.

1.16. En el anterior 1.se pide calcular la variación del volumen debido a la deformación.

1.17. Que carga aplicada a una pieza cilíndrica de Acero con un diámetro de 1 cm y una longitud de 100 cm produce una deformación de 0,1 mm.

1.18. Cual es la deformada máxima que puede tener un Aluminio antes de alcanzar la fluencia. Tomar S_y = 2884.8 Kg/cm^2 y E = 0.7 x 10 6 Kg/cm^2

1.19. Construir el diagrama de Goodman Modificado para un material con
S_y = 3000 Kg/cm^2 S_{ut} = 5000 Kg/cm^2 y S_e = S_{ut}/2 = 2500 Kg/cm^2

1.20. En el anterior 1.hallar las ecuaciones de los esfuerzos máximos, esfuerzos medios y esfuerzos mínimos.

1.21. Hallar los esfuerzos admisibles para carga estática, carga intermitente y carga alternante del material de los problemas 4 y 5

1.22. Para las cargas dadas determinar en cada caso si hay o no falla con el material de los problemas 4, 5 y 6

σ_{max} = 3000 Kg/cm^2 y σ min = – 3000 Kg/cm^2.
σ_{max} = 3000 Kg/cm^2 y σ min = – 500 Kg/cm^2.
σ_{max} = 4000 Kg/cm^2 y σ min = 0 Kg/cm^2.
σ_{max} = 4000 Kg/cm^2 y σ min = 1500 Kg/cm^2.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROPIEDADES MECÁNICAS

Material	Sy		Sut		E		G		ν
	Ksi	MPa	Ksi	MPa	Ksi	GPa	Ksi	GPa	
Aluminun allys 2014-T4	41	283	62	428	10,600	73	4,000	27.6	0.33
Aluminun allys 2014-T6	60	410	70	480	10,600	73	3,800	26.2	0.33
Aluminun allys 2024-T4	48	331	68	470	10,600	73	3,900	27	0.33
Aluminun allys 6061-T6	40	276	45	310	10,400	72	3,900	27	0.33
Aluminun allys 7075-T6	70	483	80	552	10,000	69	3,750	26	0.33
Brass (Red, cold rolled)	60	414	75	518	15,000	104	5,500	38	0.34
Brass (Red, annealed)	15	104	40	276	15,000	104	5,500	38	0.34
Bronze (cold rolled)	75	772	100	515	15,000	104	6,500	44.9	0.34
Bronze (annealed)	20	138	50	345	15,000	104	6,500	44.9	0.34
Cast iron (esfuerzo)	29.5	205	40	275	25,000	173	12,500	86.3	0.28
Cast iron (compression)	-	-	125	870	25,000	173	12,500	86.3	0.28
Concrete (compression)	2	13.8	5	35	4,500	31	-	-	0.15
Copper (cold-drawn)	40	280	45	310	17,000	117	6,300	43.5	0.35
Plate glass	-	-	10	70	10,000	69	4,000	27.6	0.2
Magnesium alloy	22	150	40	280	24,000	166	20,000	138	0.35
Monel (wrough, hot rolled)	50	345	90	621	26,000	179	9,500	65.6	0.32
Nickel alloy	60	414	80	552	30,000	207	11,400	78.7	0.31
Nylon	-	-	9	60	400	2.76	-	-	0.4
Polyethylene	-	-	2.5	17.5	150	1	-	-	0.4
Rubber (average)	0.6	4	2	13.5	0.4	0.00276	0.0007	41.5	0.48
Steel .2% C hardened	62	428	90	620	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel .2% C cold-rolled	60	414	85	587	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel .2% C hot-rolled	53	366	62	428	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel .4% C hot-rolled	53	366	84	580	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel .8% C hot-rolled	76	524	122	842	30,000	207	11,600	80	0.32
Steel Stainless (cold-rolled)	165	1140	190	1310	29,000	200	12,500	86.3	0.27
Steel Stainless (heat-treated)	132	911	150	1040	29,000	200	12,500	86.3	0.27
Steel, structural					-	-	-	-	-
Steel ASTM-A36	36	250	60	400	29,000	200	11,000	75.9	0.32
Steel ASTM-A572	50	340	70	500	29,000	200	11,000	75.9	0.32
Steel ASTM-A514	100	700	120	830	29,000	200	11,000	75.9	0.32

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.- TRACCIÓN COMPRESIÓN

2.1- INTRODUCCIÓN

Una barra esta sometida a cargas de tracción o compresión cuando soporta fuerzas en sus extremos dirigidos a lo largo de su eje centroidal. Dependiendo si la carga tiende a estirar o a comprimir la pieza, la carga será de tracción o compresión.

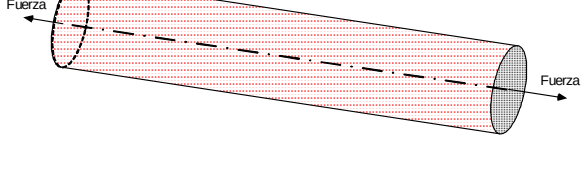


Fig. 2.1.- Barra sometida a carga de tracción

Ejemplos reales de elementos sometidos a este tipo de carga son los cables metálicos usados en maquinas de elevación, arriostres y elementos de Armaduras.

Para la validez de las ecuaciones y resultados de este capítulo se asume la veracidad de las siguientes condiciones :

1.- Los elementos son rectos
2.- Los elementos tienen secciones transversales uniformes
3.- Las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje axial
4.- Las deformaciones son pequeñas comparadas con las dimensiones de la barra
5.- Los esfuerzos no sobrepasan los límites de fluencia.
6.- Las cargas están aplicadas en los centros de gravedad de la sección transversal, de modo que no se produce flexión
7.- Los elementos no son tan esbeltos para producir pandeo.

2.2.- ESFUERZOS

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

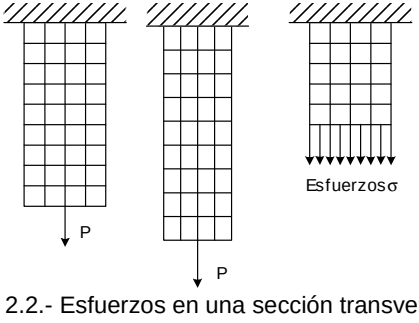


Fig. 2.2.- Esfuerzos en una sección transversal

Entonces en cualquier sección transversal actúan solamente esfuerzos normales, distribuidas uniformemente. Por lo que:

$$P = \int_A \sigma_n dA = \sigma_n \int_A dA = \sigma_n A \qquad (2.1$$

$$\sigma_n = \frac{P}{A} \qquad (2.2$$

$$\tau_n = 0 \qquad (2.3$$

Sin embargo en una sección inclinada un ángulo ρ respecto a la sección transversal,

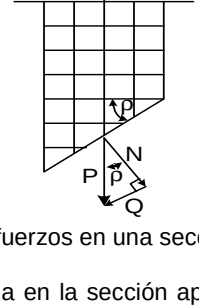


Fig. 2.3.- Esfuerzos en una sección inclinada

Para equilibrar a la fuerza externa en la sección aparece una fuerza interna de igual magnitud la que puede descomponerse en una fuerza N perpendicular a la sección que produce esfuerzos normales y en otra fuerza Q tangencial a la sección que

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$A_N = A_\rho \cos \rho$ (2.8

De 2.2, 2.3 y 2.6

$$\sigma_\rho = \frac{N}{A_\rho} = \frac{PCos\rho}{\frac{A_N}{Cos\rho}} = \frac{PCos^2\rho}{A_N}$$

$$\sigma_\rho = \frac{P(1+Cos2\rho)}{2A_N} \quad \textbf{(2.9}$$

De 2.4, 2.5 y 2.6

$$\tau_\rho = \frac{Q}{A_\rho} = \frac{PSin\rho}{\frac{A_N}{Cos\rho}} = \frac{PSin\rho Cos\rho}{A_N}$$

$$\tau_\rho = \frac{P(Sin2\rho)}{2A_N} \quad \textbf{(2.10}$$

Reemplazando ρ = 0 en 2.7 y 2.8, se verifican los resultados de 2.1

Ya que $(\text{Sin } 2\ \rho)^2 + (\text{ Cos } 2\ \rho)^2 = 1$ (2.11

De 2.7
$$Cos2\rho = \frac{(\sigma_\rho - \frac{P}{2A_N})}{\frac{P}{2A_N}}$$ (2.12

De 2.8
$$Sin2\rho = \frac{\tau_\rho}{\frac{P}{2A_N}}$$ (2.13

Entonces
$$(\sigma_\rho - \frac{P}{2A_N})^2 + \tau_\rho{}^2 = (\frac{P}{2A_N})^2$$ (2.14

Lo que demuestra que la relación entre σ_ρ y τ_ρ es una circunferencia con radio de $P/2A_N$ y centro en $P/2A_N$, conocido como el circulo de Mohr.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

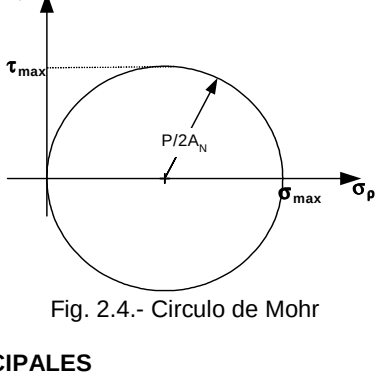


Fig. 2.4.- Circulo de Mohr

2.3.- ESFUERZOS PRINCIPALES

Se llaman esfuerzos principales a los valores máximos de los esfuerzos normales. De 2.7 y 2.8 y del gráfico

Para $\rho = 0$ $\quad \sigma_{max} = \sigma_N = P/A_N \quad \tau_{min} = 0$ (2.15

Para $\rho = 45$ $\quad \sigma_{45} = P/2A_N \quad \tau_{max} = P/2A_N$ (2.16

Estos resultados indican que una barra sometida a carga axial de tracción y compresión presenta los esfuerzos normales máximos en una sección transversal a la carga $\rho = 0$ y los esfuerzos cortantes máximos en una sección a $\rho = 45^o$. Para evitar la falla, ambos esfuerzos máximos no deben exceder de los límites de fluencias longitudinales y transversales respectivamente

.

$$\sigma_{max} = P/A_N < S_y$$
$$\tau_{max} = P/2A_N < S'_y \quad (2.17$$

2.4.- DEFORMACIONES

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Una barra sometida a cargas axiales experimenta cambios en su longitud y en sus dimensiones transversales.

En la sección 1.8.1 se definieron las deformaciones longitudinales como:

$\delta = l_f - l_o$ Deformación longitudinal

$\varepsilon = \delta / l_o$ Deformación longitudinal unitaria (2.18

Ahora bien, en la dirección axial solo hay esfuerzos normales y si estos no sobrepasan el limite de fluencia (zona elástica) es valida la ecuación de Hooke 1.8

$\sigma = E\,\varepsilon$ (2.19

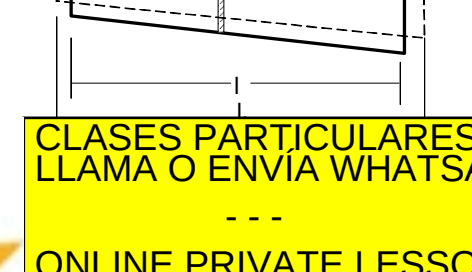
$\sigma = P/AN$ (2.20

Entonces $\delta = \frac{Pl_0}{EA}$ **(2.21**

Ecuación que indica que la deformación es proporcional a la carga P y a la longitud l_o de la barra, pero inversamente proporcional al producto EA, el cual se denomina "Rigidez Axial". Efectivamente, este producto representa la oposición de la pieza a la deformación.

La ecuación es válida para solicitaciones de tracción como de compresión. Sin embargo, en cuerpos sujetos a compresión las ecuaciones pierden validez si los elementos son largos y delgados donde se presenta un fenómeno denominado "pandeo", cuyo estudio se realiza posteriormente.

La ecuación 2.17 solo es valida para barras de sección con área constante. En una barra con sección variable se puede aplicar esta ecuación a un elemento diferencial "dx" en la que el área se puede considerar constante.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Entonces $$d\delta = \frac{Pdx}{EA}$$ (2.22

$$\delta = \int_0^l \frac{Pdx}{EA}$$

Y **(2.23**

2.5.- CARGA BIAXIAL

Se denomina carga biaxial en un cuerpo que soporta cargas en dos direcciones perpendiculares.

2.5.1.- Esfuerzos

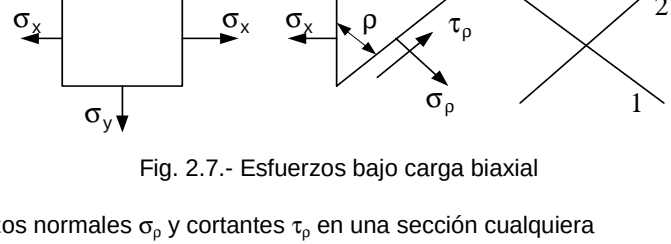


Fig. 2.7.- Esfuerzos bajo carga biaxial

Los esfuerzos normales σ_ρ y cortantes τ_ρ en una sección cualquiera

$l_\rho \text{ Cos } \rho = dy$ (2.24

$l_\rho \text{ Sin } \rho = dx$ (2.25

$\Sigma F_1 = 0$ $\sigma_\rho\, l_\rho\, dz - \sigma_y\, dx\, dz \text{ Sin } \rho - \sigma_x\, dy\, dz \text{ Cos } \rho = 0$ (2.26

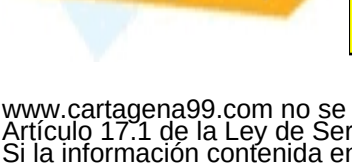
$\sigma_\rho - \sigma_y \text{ Sin}^2 \rho - \sigma_x \text{ Cos}^2 \rho = 0$ (2.27

$$\sigma_\rho = \sigma_y \frac{(1 - Cos2\rho)}{2} + \sigma_x \frac{(1 + Cos2\rho)}{2}$$ (2.28

$$\sigma_\rho = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} Cos2\rho$$ **(2.29**

$\Sigma F_2 = 0$ $\tau_\rho\, l_\rho\, dz + \sigma_y\, dx\, dz \text{ Cos } \rho - \sigma_x\, dy\, dz \text{ Sin } \rho = 0$ (2.30

$\tau_\rho + \sigma_y \text{ Sin } \rho \text{ Cos } \rho - \sigma_x \text{ Sin } \rho \text{ Sin } \rho = 0$ (2.31



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\left(\sigma_\rho - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}\right)^2 + \tau_\rho{}^2 = \left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right)^2 \qquad \textbf{(2.34}$$

Las ecuaciones 2.26 y 2.29 dan los esfuerzos normales y cortantes para cualquier sección inclinada. Similar a una dimensión, las ecuaciones representan una circunferencia con desplazamiento solo en σ_ρ de $(\sigma_x + \sigma_y)/2$, y radio igual al $(\sigma_x - \sigma_y)/2$.

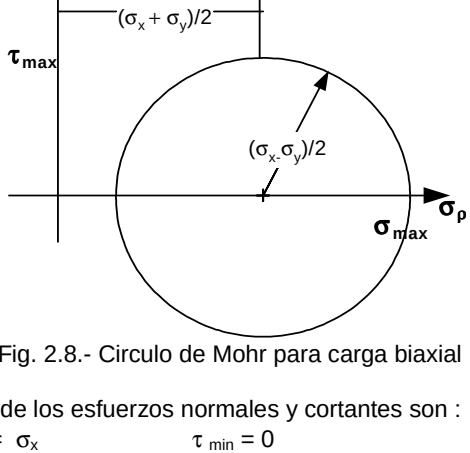


Fig. 2.8.- Circulo de Mohr para carga biaxial

Los valores máximos de los esfuerzos normales y cortantes son :

Para ρ = 0	$\sigma_{max} = \sigma_x$	$\tau_{min} = 0$	(2.35
Para ρ = 90	$\sigma_{max} = \sigma_y$	$\tau_{min} = 0$	(2.36
Para ρ = 45	$\sigma_{min} = 0$	$\tau_{max} = (\sigma_x - \sigma_y)/2$	(2.37

Los esfuerzos normales máximos ocurren en las direcciones “x” y “y” y los esfuerzos cortantes máximos en una dirección ρ = 45º.

2.5.2.- Deformaciones

Consideremos una placa sometida a cargas tracción compresión biaxial :

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

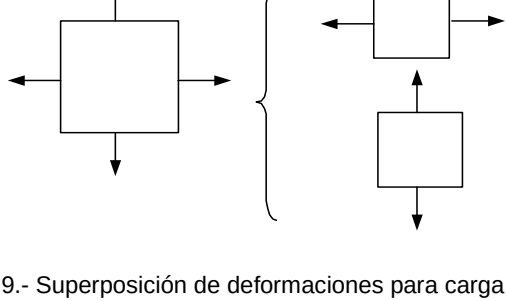


Fig. 2.9.- Superposición de deformaciones para carga biaxial

Por el principio de superposición, se puede superponer las deformaciones provocadas por las cargas horizontales con las provocadas por las cargas verticales.

Las deformaciones provocadas por las cargas horizontales

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E \qquad (2.38$$

$$\varepsilon_y = - \varepsilon_q = - \nu \sigma_x / E \qquad (2.39$$

Las deformaciones provocadas por las cargas verticales

$$\varepsilon_y = \sigma_y / E \qquad (2.40$$

$$\varepsilon_x = - \varepsilon_q = - \nu \sigma_y / E \qquad (2.41$$

Superponiendo

$$\varepsilon_{xt} = \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E = \varepsilon_x - \nu\varepsilon_y \qquad (2.42$$

$$\varepsilon_{yt} = \sigma_y / E - \nu \sigma_x / E = \varepsilon_y - \nu\varepsilon_x \qquad (2.43$$

2.5.3.- Recipientes de pared delgada

Un caso muy común de la carga biaxial son los recipientes de pared delgada sometidos a presión interna. Considérese un cilindro de radio interior “r” y espesor de pared delgado “e” sometido a una diferencia de presión, “p”, entre el interior y el exterior.

$$r/e >= 10$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

En un punto cualquiera del espesor de la pared se originan dos esfuerzos normales, uno axial □2 y otra circunferencial □1.

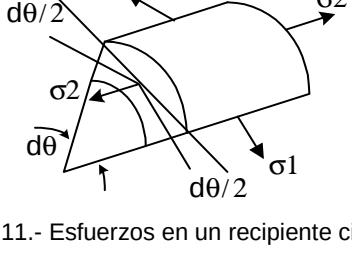


Fig. 2.11.- Esfuerzos en un recipiente cilíndrico

Debido a que el espesor es pequeño se pueden considerar estos esfuerzos constantes. Aplicando la estática en la dirección circunferencial

$$\sigma_1 Cos\frac{d\theta}{2} - \sigma_1 Cos\frac{d\theta}{2} = 0 \qquad \text{(2.44}$$

Aplicando la estática en la dirección radial

Presión x área interior = Componente radial esfuerzo x área lateral

$$p(rd\theta dz) - 2\sigma_1 Sin\frac{d\theta}{2}(edz) = 0 \qquad \text{(2.45}$$

$$Sin\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} \qquad \text{(2.46}$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{e} \qquad \textbf{(2.47}$$

Aplicando la estática en la dirección axial

$$p(\pi r^2) = \sigma_2 2\pi re = 0 \qquad \textbf{(2.48}$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2e} \qquad \textbf{(2.49}$$

Para recipientes esféricos los esfuerzos en cualquier dirección se calculan con 2.49

2.6.- PESO PROPIO

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

la del medio soporta sobre sus hombros el peso de una persona y la de abajo soporta sobre sus hombros el peso de dos personas.

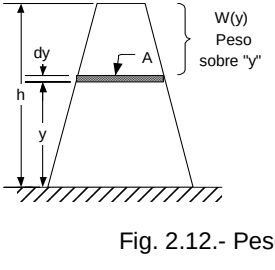


Fig. 2.12.- Peso propio

El peso de un elemento diferencial “dy” en la que el área de su sección puede tomarse constante es

$$dW = \gamma\, A(y)\, dy \qquad (2.50$$

El peso de la porción del cuerpo sobre una altura “y” es

$$W(y) = \int_{y}^{h} \gamma A8y)dy \qquad (2.51$$

Si se tomar el límite inferior como cero la ecuación calcular el peso de todo el cuerpo. Los esfuerzos son :

$$\sigma = \frac{Fuerza}{Area} = \frac{P + \int_{y}^{h} \gamma A(y)dy}{A} \qquad (2.52$$

La deformación se halla con 2.19

$$\delta = \int_{0}^{h} \frac{Pdy}{EA} = \int_{0}^{0} \frac{\left(P + \int_{y}^{h} \gamma A(y)dy\right)}{EA} dy \qquad (2.53$$

Expresión que da la deformación producida por una carga exterior y el peso propio.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Las deformaciones térmicas lineales se calculan mediante:

$$\delta_t = l\ \alpha\ \Delta T \qquad (2.54$$

donde α es el coeficiente de dilatación térmica lineal

Material	α (x 10-6/ºC)
Aluminio	23.2
Fundición	10.4
Cobre	16.7
Acero	11.7
Hormigón	10.8

Entonces $\varepsilon_t = \alpha\ \Delta T$ (2.55

La deformación se debe a la acción de cargas y a cambios de temperatura.

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_P + \varepsilon_t = \sigma/E + \alpha\ \Delta T \qquad (2.56$$

Ésta ecuación deriva en la ley de Hooke extendida que también es llamada la ley de Duhamel – Neumann

$$\sigma = E\ (\varepsilon_P - \alpha\ \Delta T) \qquad (2.57$$

Si la expansión térmica de un sistema se restringe por ejemplo anclando una pieza entre dos paredes rígidas, pequeños cambios de temperatura producen grandes esfuerzos térmicos. Esto se debe al modulo de Young que para la mayoría de los materiales usados en Ingeniería es grande

2.8.- PROBLEMAS HIPERESTATICOS

Desde el punto de vista estático, la condición de hiperestaticidad viene dada por el hecho de que la cantidad de ecuaciones que surgen de los planteos de equilibrio de la Estática es menor que la cantidad de incógnitas reactivas planteadas. Para poder resolver estas estructuras es necesario agregar ecuaciones de compatibilidad. Estas reciben este nombre precisamente porque tratan de expresar la compatibilidad entre las deformaciones y la vinculación existente, que como hemos dicho, resulta

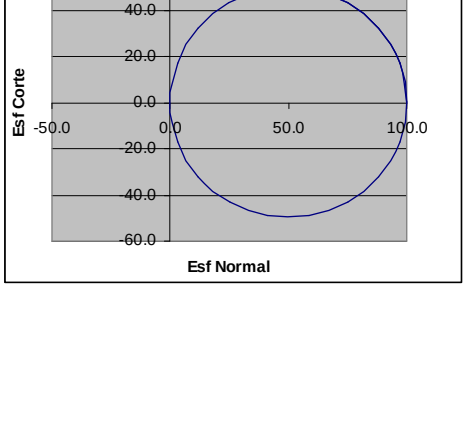
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. Una pieza con una sección de 1 cm^2 está sometida a una fuerza de tracción en una dimensión de 100 Kg Hallar los esfuerzos en secciones con ángulos de 0º hasta 360º con un intervalo de 10º.
Solución :

ϕ (Gr)	ϕ (Rad)	$\sigma_\phi = (P/2An)(1+\cos 2\phi)$	$\tau\phi = (P/2An)(\sin 2\phi)$
0	0.0	100.0	0.0
10	0.2	97.0	17.1
20	0.3	88.3	32.1
30	0.5	75.0	43.3
40	0.7	58.7	49.2
50	0.9	41.3	49.2
60	1.0	25.0	43.3
70	1.2	11.7	32.1
80	1.4	3.0	17.1
90	1.6	0.0	0.0
100	1.7	3.0	-17.1
110	1.9	11.7	-32.1
120	2.1	25.0	-43.3
130	2.3	41.3	-49.2
140	2.4	58.7	-49.2
150	2.6	75.0	-43.3
160	2.8	88.3	-32.1
170	3.0	97.0	-17.1
180	3.1	100.0	0.0
190	3.3	97.0	17.1
200	3.5	88.3	32.1
210	3.7	75.0	43.3
220	3.8	58.7	49.2
230	4.0	41.3	49.2
240	4.2	25.0	43.3
250	4.4	11.7	32.1
260	4.5	3.0	17.1
270	4.7	0.0	0.0
280	4.9	3.0	-17.1
290	5.1	11.7	-32.1
300	5.2	25.0	-43.3
310	5.4	41.3	-49.2
320	5.6	58.7	-49.2
330	5.8	75.0	-43.3



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.2. Hallar los esfuerzos máximos del 2.1.

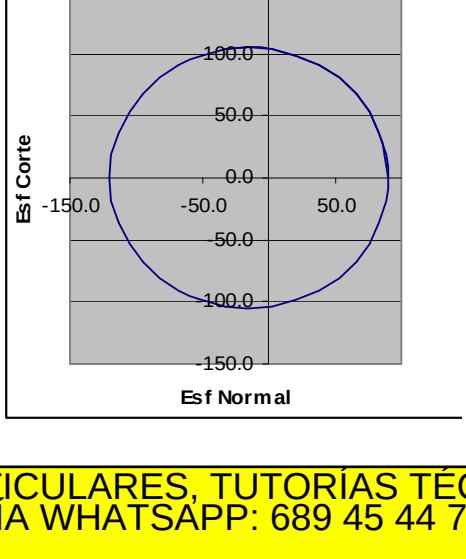
Solución : $\sigma_{max} = P/A_N = 100/1 = 100\ Kg/cm^2$

$\tau_{max} = P/2A_N = 100/2 = 50\ Kg/cm^2$

2.3. Una pieza está sometida a cargas de tracción compresión en dos dimensiones con σ_x = 90 Kg/cm^2 y σ_y = -120 Kg/cm^2. Hallar los esfuerzos para ángulos desde 0º hasta 360º con un intervalo de 10º. Graficar los resultados.

Solución :

ϕ (Gr)	ϕ (Rad)	$\sigma_\phi = (\sigma_x+\sigma_y)/2 + (\sigma_x-\sigma_y)(\cos 2\phi)/2$	$\tau_\phi = (\sigma_x-\sigma_y)(\sin 2\phi)/2$
0	0.0	90.0	0.0
10	0.2	83.7	35.9
20	0.3	65.4	67.5
30	0.5	37.5	90.9
40	0.7	3.2	103.4
50	0.9	-33.2	103.4
60	1.0	-67.5	90.9
70	1.2	-95.4	67.5
80	1.4	-113.7	35.9
90	1.6	-120.0	0.0
100	1.7	-113.7	-35.9
110	1.9	-95.4	-67.5
120	2.1	-67.5	-90.9
130	2.3	-33.2	-103.4
140	2.4	3.2	-103.4
150	2.6	37.5	-90.9
160	2.8	65.4	-67.5
170	3.0	83.7	-35.9
180	3.1	90.0	0.0
190	3.3	83.7	35.9
200	3.5	65.4	67.5
210	3.7	37.5	90.9
220	3.8	3.2	103.4
230	4.0	-33.2	103.4
240	4.2	-67.5	90.9
250	4.4	-95.4	67.5
260	4.5	-113.7	35.9
270	4.7	-120.0	0.0
280	4.9	-113.7	-35.9
290	5.1	-95.4	-67.5
300	5.2	-67.5	-90.9



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.4. Hallar los esfuerzos máximos del problema 2.3.
Solución :

$\rho = 0$ $\quad \sigma_{max} = \sigma_x = 90\ kg/cm^2$

$\rho = 90$ $\quad \sigma_{max} = \sigma_y = -120\ Kg/cm^2$

$\rho = 45$ $\quad \tau_{max} = (\sigma_x - \sigma_y)/2 = 105\ kg/cm^2$

2.5. Una pieza cilíndrica de Acero tiene $\varnothing$ = 3 cm y largo L=100 cm está sometida a una carga de 1000 Kg Se pide hallar :
Los esfuerzos máximos
Los esfuerzos a 30^o
Las deformadas total y unitaria longitudinal y transversal
Los coeficientes de seguridad S_y= 1800 Kg/cm^2 y $S_y' = 960\ Kg/cm^2$

Soluciona:

a) $A = \pi\varnothing^2/4 = 7{,}07\ cm^2$

$\sigma_{max} = \sigma_N = P/A_N = = 141{,}47\ Kg/cm^2$ para $\rho = 0^o$

$\tau_{max} = P/2A_N = 70{,}73\ Kg/cm^2$ para $\rho = 45^o$

b) $\sigma_\rho = (P/2A_N)(1 + \cos 2\rho)$

$\sigma_{30} = 106{,}10\ Kg/cm^2$

$\tau_\rho = (P/2AN) \operatorname{Sin} 2\rho$

$\tau_{30} = 61{,}25\ Kg/cm^2$

c) $\delta = Pl/EA = 6{,}73 \times 10\text{-}3\ cm$

$\varepsilon = \delta/l = 67 \times 10\text{-}6$ ($67 \times 10 -4$ %)

$\varepsilon_q = -\mu\ \varepsilon = -20{,}20 \times 10 -6$ ($-20{,}20 \times 10 -4$ %)

$\delta_q = \varepsilon_q\ d = -60{,}6 \times 10 -6$ cm

d) $\eta\sigma = S_y/\sigma_{max} = 1800/141{,}47 = 12{,}72$

$\eta\tau = S_y'/\tau_{max} = 960/70{,}73 = 13{,}57$

2.6. Una pieza de a = 2 cm de ancho por b = 3 cm de alto y c = 1 cm de profundidad está sometida a una fuerza horizontal de 100 Kg y una vertical de 200 Kg Se pide hallar las dimensiones finales. Tomar ν =0.3

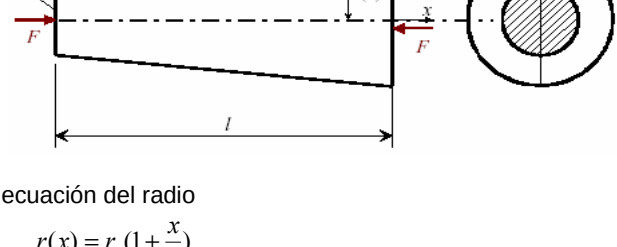
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Solución :

$\sigma_x = F_x/(b\ c) = 33{,}33$ Kg/cm2
$\sigma_y = F_y/(a\ c) = 100{,}00$ Kg/cm2
$\varepsilon_{xt} = \sigma_x /E - \nu\ \sigma_y /E = 1{,}58 \times 10\text{-}6$
$\varepsilon_{yt} = \sigma_y /E - \nu\ \sigma_x /E = 4{,}28 \times 10\text{-}5$
$a_f = a + a\ \varepsilon_{xt} = 2{,}000003$ cm
$b_f = b + b\ \varepsilon_{yt} = 3{,}00012$ cm

2.7.- Halle la distribución de esfuerzos en una barra cónica con radios ro y 2ro y longitud l sometida a cargas de compresión F

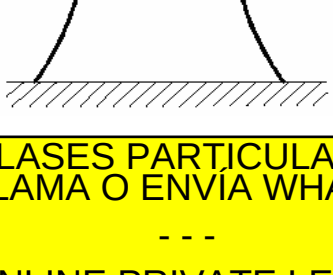


Solución: La ecuación del radio

$$r(x) = r_o(1 + \frac{x}{l})$$

El esfuerzo $$\sigma(x) = \frac{F}{\pi r_o^{\ 2}(1 + \frac{x}{l})^2}$$

2.8.- Halle la forma de la sección de una barra que soporta una carga F para que los esfuerzos sean constantes



Solución:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$P + \int_{y}^{h} \gamma A(y)dy = A(y)cte$$

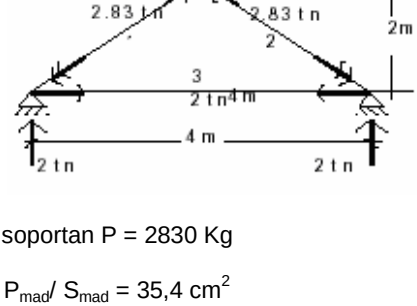
Derivando $$\gamma A(y) = \frac{dA(y)}{dy} cte$$

$$dy = \frac{dA(y)}{A(y)} \frac{cte}{\gamma} = \frac{\pi 2rdr}{\pi r^2} \frac{cte}{\gamma} = \frac{2dr}{r} \frac{cte}{\gamma}$$

Integrando $$y = \frac{2cte}{\gamma} \ln(r) + cte1$$

$$r = ke^{\frac{y\gamma}{2cte}}$$

2.9.- Dimensionar las barras del reticulado de la figura. Para las barras 1 y 2 debe emplearse madera con σ_{adm} = 80 kg/cm^2, δ_{adm} = L/300 y E = 100 t/cm^2 y para la barra 3 debe emplearse acero con σ_{adm} = 2.400 kg/cm^2, δ_{adm} = L/500 y E = 2.100 kg/cm^2



Solución:
Las barras de madera soportan P = 2830 Kg

$A_{mad} = P_{mad} / S_{mad}$ = 35,4 cm^2

Se adopta una escuadra de 3" x 2" con un área de A = 38.7 cm^2

$$\delta_{mad} = \frac{Pl}{EA} = 0{,}2cm < \frac{283}{3002} = 0{,}94cm$$

La barra de acero soporta P = 2000 Kg

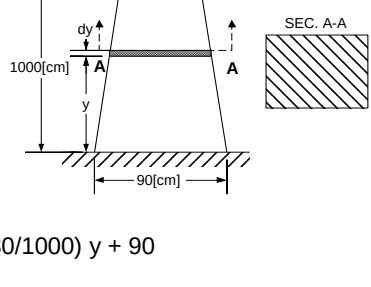
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\delta_{ac} = \frac{Pl}{EA} = 0{,}34cm < \frac{400}{500} = 0{,}8cm$$

2.10. En la pirámide truncada de área transversal cuadrada de la figura. Se pide calcular:

a) El peso parcial sobre cualquier altura “y”
b) El esfuerzo normal máximo
c) La deformada total



Solución : b(y) = (- 30/1000) y + 90

a) El peso sobre y es

$$W(y) = \int_y^h \gamma A(y)dy = \int_y^h \gamma \frac{\pi}{4}\left[(-30/1000)y + 90\right]^2 dy$$

$$W(y) = -\frac{\gamma\pi 250}{90}\left[60^3 - \left(-\frac{30y}{1000} + 90\right)^3\right]$$

b) El esfuerzo normal es máximo en la base (y = 0)

$$\sigma_{\max} = \frac{-\gamma\pi 250(60^3 - 90^3)}{90^3}$$

$\sigma_{max} = 552.68\ \gamma$

c) La deformada

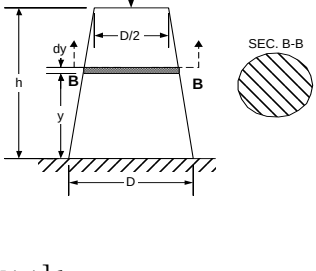
$$\delta = \int_0^h \frac{Wdy}{EA}$$

$$\frac{\gamma\pi 250}{\left[\quad\right.}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.11. En la pieza cónica truncada de la figura, se pide hallar la deformación debida a la acción de la fuerza P y del peso propio.



Solución :

$$\delta = \int_0^h \frac{[P + W(y)]dy}{EA}$$

$$d = \frac{D}{2}\left(-\frac{y}{h} + 2\right)$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{D}{2}\left(-\frac{y}{h} + 2\right)\right]^2$$

$$W(y) = \int_0^y \gamma A(y)dy = \int_0^y \gamma \frac{\pi}{4}\frac{D^2}{4}\left(2 - \frac{y}{h}\right)^2 dy$$

$$W(y) = \frac{\gamma\pi D^2}{16}\left(2 - \frac{y}{h}\right)^3\left(-\frac{h}{3}\right)_0^y = -\frac{\gamma\pi D^2 h}{48}\left[\left(2 - \frac{y}{h}\right)^3 - 2^3\right]$$

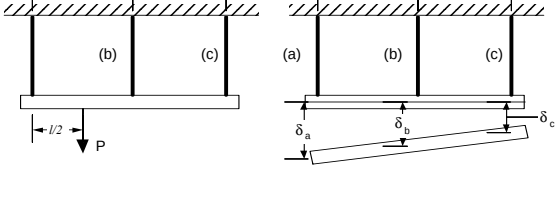
$$\delta = \int_0^h \frac{(P+W)dy}{EA} = \int_0^h \frac{\left\{P - \frac{\gamma\pi D^2 h}{48}\left[\left(2 - \frac{y}{h}\right)^3 - 2^3\right]\right\}}{E\frac{\pi}{4}\left[\frac{D}{2}\left(2 - \frac{y}{h}\right)\right]^2} dy$$

$$\delta = \frac{h(48P + \gamma\pi D^2 5)}{6E\pi D^2}$$

2.12. En el sistema de la figura se piden las esfuerzos en los cables.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución:

$\Sigma F_y = 0$ $\quad T_a + T_b + T_c = P$ (i

$\Sigma M_a = 0$ $\quad P\,l/2 - T_b\,l - T_c\,2l = P/2 - T_b - T_c\,2 = 0$ (ii

El sistema es hiperestático con 3 incógnitas (T_a, T_b, T_c) y 2 ecuaciones. La tercera ecuación se halla analizando las deformaciones

$(\delta_a - \delta_c)/2l = (\delta_b - \delta_c)/l$

$$\frac{T_a l}{EA_a} - \frac{T_c l}{EA_c} = 2\left(\frac{T_b l}{EA_b} - \frac{T_c l}{EA_c}\right)$$

$T_a - T_c = 2\,(T_b - T_c)$

$T_a - 2\,T_b + T_c = 0$ (iii

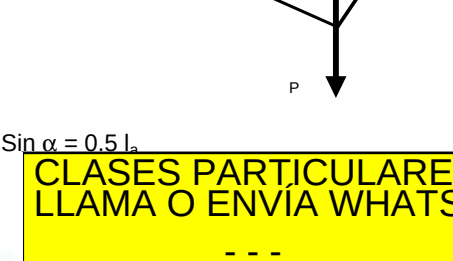
De i, ii y iii $\quad T_a = P - T_b - Tc = 2\,T_b - Tc$

$T_b = P/3$

$T_c = P/12$

$T_a = 7P/12$

2.13. En el sistema de la figura se piden las esfuerzos en los cables



Solución :

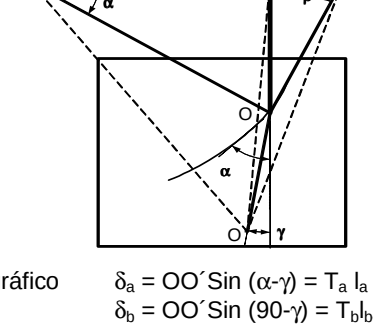
$l_b = l_a \operatorname{Sin} \alpha = 0.5\, l_a$

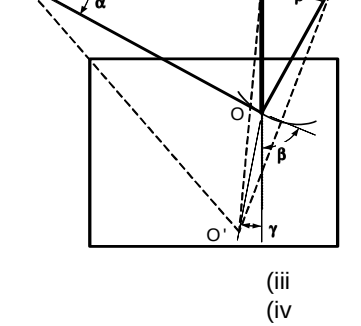
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Σ Ma = 0 No existe ya que las fuerzas son concurrentes

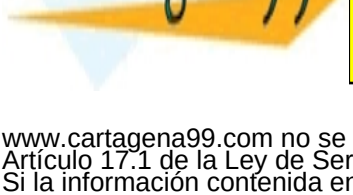
Sistema hiperestático con 3 incógnitas (Ta,Tb,Tc) y 2 ecuaciones. De las deformaciones





Del gráfico	$\delta_a = OO' Sin (\alpha-\gamma) = T_a l_a / EA$	(iii
	$\delta_b = OO' Sin (90-\gamma) = T_b l_b/EA$	(iv
	$\delta_c = OO' Sin (\beta+\gamma) = T_c l_c/EA$	(v
De iii y iv	$T_a l_a/ Sin (\alpha-\gamma) = T_b l_b/ Sin (90-\gamma)$	(vi
De iv y v	$T_b l_b/ Sin (90-\gamma) = T_c l_c/ Sin (\beta+\gamma)$	(vii
	$l_a\ 0.5 = l_b$	
	$l_c\ \ 0{,}866 = l_b$	
De vi	$T_a l_a/(Sin\ \alpha Cos\gamma - Sin\ \gamma\ Cos\ \alpha) = T_b l_b/ Cos\ \gamma$	
	$T_a\ (l_b/0.5)/(Cos\gamma\ 0.5 - Sin\ \gamma\ 0{,}866) = T_b l_b/ Cos\ \gamma$	
	$T_a = 0.5T_b(0.5 - 0.866\ Tan\ \gamma)$	
	$0.5 - (T_a / 0.5T_b) = 0.866\ Tan\ \gamma$	
	$Tan\ \gamma = [(0.52T_b - T_a) / (0.5T_b)]/0.866$	(viii
De vii	$T_b l_b/ Cos\gamma = T_c l_c/ Sin\beta Cos\gamma + Sin\gamma\ Cos\beta)$	
	$T_b l_b/ Cos\gamma = T_c\ (lb/0.866)/ (0.866 Cos\gamma + Sin\gamma\ 0.5)$	
	$0.5\ Tan\ \gamma = (T_c/0.866\ T_b) - 0.866$	
	$Tan\ \gamma = [(T_c - 0.8662T_b) / (0.866\ T_b)]/0.5$	(ix
De viii y ix	$[(0.52T_b - T_a) / (0.5T_b)]\ 0.5 = [(T_c - 0.8662T_b) / (0.866\ T_b)]\ 0.866$	
	$(0.52T_b - T_a) = (T_c - 0.8662T_b)$	
	$1.3862T_b = T_a + T_c$	(x

Esta es la ecuación de deformaciones. Con ella



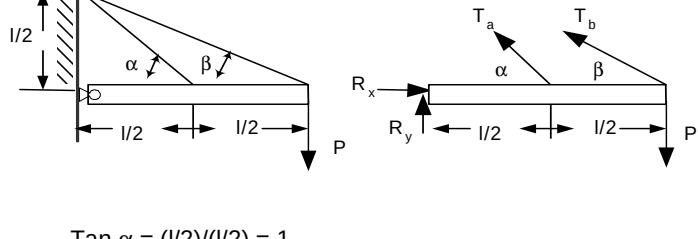
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.14. En el sistema de la figura se piden hallar los esfuerzos en los cables a y b. La barra horizontal se supone rígida y articulada en la pared



Solución:

Tan α = (l/2)/(l/2) = 1

α = 45º

Tan β = (l/2)/l = 0.5

β = 26,56

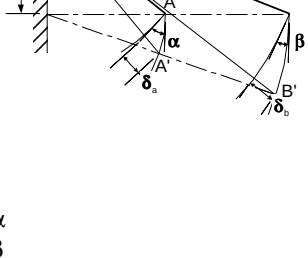
$\Sigma F_x = 0$ $\quad R_x - T_a \text{Cos}\ \alpha - T_b \text{Cos}\ \beta = 0$ (i

$\Sigma F_y = 0$ $\quad R_y + T_a \text{Sin}\ \alpha + T_b \text{Sin}\ \beta - P = 0$ (ii

$\Sigma M_o = 0$ $\quad - T_a \text{Sin}\ \alpha\ l/2 - T_b \text{Sin}\ \beta\ l + P\ l = 0$

$T_a\ 0.3535 + T_b\ 0.4472 = P$ (iii

Son tres ecuaciones con cuatro incógnitas R_x , R_y , T_a y T_b



Del grafico $\quad l_a \text{Cos}\ \alpha = l/2$

$l_b \text{Cos}\ \beta = l$

$\delta_a = AA' \text{Sin}\ \alpha$

$\delta_b = BB' \text{Sin}\ \beta$

$AA' = BB'/2$

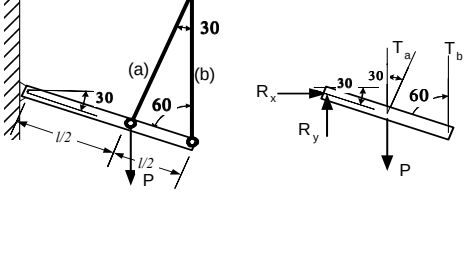
Entonces $\quad AA' = \delta_a / \text{Sin}\ \alpha = BB'/2 = \delta b\ /2 \text{Sin}\ \beta$

$T_a l/(EA \text{Sin}\ \alpha) = T_b l / (2EA \text{Sin}\ \beta)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

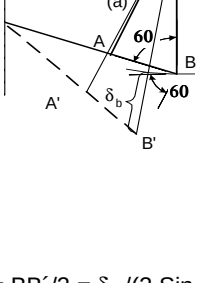
2.15. Hallar las esfuerzos en los cables a y b



Solución :

$\Sigma F_x = 0$	$R_x + T_a \text{ Sin } 30 = 0$	(i
$\Sigma F_y = 0$	$R_y + T_a \text{ Cos } 30 + T_b - P = 0$	(ii
$\Sigma M_o = 0$	$-T_a\, l/2 - T_b \text{ Sin } 60\, l + P \text{ Sin } 60\, l/2 = 0$	
	$-T_a\, 0{,}5 - T_b\, 0{,}866 + P\, 0{,}433 = 0$	(iii

El sistema es hiperestático con tres ecuaciones y cuatro incógnitas R_x , R_y , T_a y T_b



$l_b \text{ Cos } 30 = la$
$\delta_a = AA' \text{ Sin } 90$
$\delta_b = BB' \text{ Sin } 60$
$AA' = BB'/2$

Entonces $AA' = \delta_a / \text{ Sin } 90 = BB'/2 = \delta_b /(2 \text{ Sin } 60)$
$T_a l_a/(EA) = T_b l_b/ (2EA \text{ Sin } 60)$
$T_a\, l_b \text{ Cos } 30 = T_b\, l_b / (2 \text{ Sin } 60)$
$T_a\, 1{,}5 = T_b$ (iv

Cartagena99

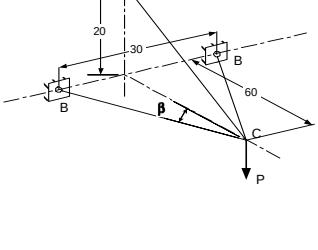
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

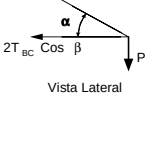
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.16. Se pide hallar el diámetro de la barra AC. Tomar Sy = 1800 Kg/cm2





Solución :

Tan α = 20/60 α = 18.43

Tan β = 15/60 β = 14.03

$\Sigma F_y = 0$ T_{AC} Sin α = P

T_{AC} = 3163.09 Kg Tracción

$\Sigma F_x = 0$ T_{AC} Cos α + 2T_{BC} Cos β = 0

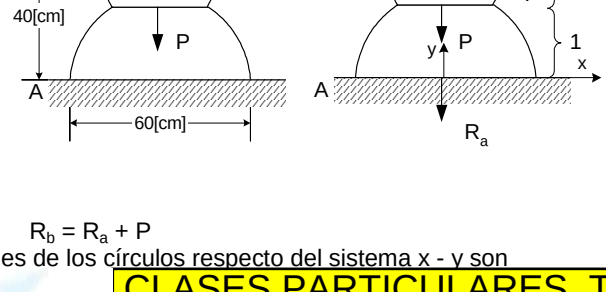
T_{BC} = - 1546.56 kg Compresión - Pandeo

Analizando solo la barra AC

$\sigma_{AC} = T_{AC}/(\pi\, d_{AC}2/4) < Sy$

d_{AC} = 1.49 cm

2.17. En el sistema de la figura se piden las reacciones en A y B



Solución :

$\Sigma F_y = 0$ $R_b = R_a + P$ (i

Las ecuaciones de los círculos respecto del sistema x - y son

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$\varnothing_2 = 2\,[15^2-(y-40)^2]^{1/2}$

éstos se igualan a un altura de

$2(30^2-y^2)^{1/2} = 2[15^2-(y-40)^2]^{1/2}$

$30^2-y^2 = 15^2- y^2+ 80y -1600$

$y = 28,43$

La deformación total es nula

$\delta_t = \delta_1 + \delta_2 = 0$

$$\delta_1 = \int_0^{28,43} \frac{R_a dy 4}{E\pi\left[2(30^2-y^2)^{1/2}\right]^2} = \frac{R_a}{E\pi 60}\int_0^{28,43}\left[\frac{1}{(30+y)}+\frac{1}{(30-y)}\right]dy$$

$$\delta_1 = \frac{R_a}{E\pi 60}(3.6167)$$

$$\delta_2 = \int_{28,43}^{40} \frac{(R_a+P) dy 4}{E\pi\left[2(15^2-(y-40)^2)^{1/2}\right]^2} = \frac{(R_a+P)}{E\pi 30}\int_{28,43}^{40}\left[\frac{1}{15+(y-40)}+\frac{1}{15-(y-40)}\right]dy$$

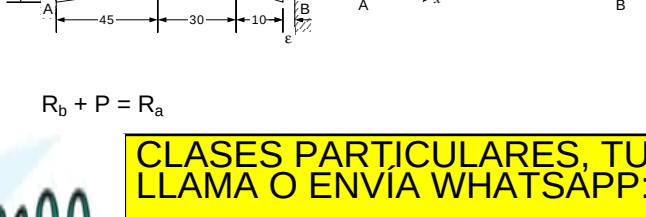
$$\delta_2 = \frac{(R_a+P)}{E\pi 30}(2.0472)$$

$$\delta_1+\delta_2 = \frac{R_a}{E\pi 60}(3.6167)+\frac{(R_a+P)}{E\pi 30}(2.0472) = 0$$

$R_a = - 0.259\ P$

$R_b = 0.741\ P$

2.18. Se pide hallar las reacciones en las paredes del sistema de la figura



Solución :

$\Sigma F_x = 0$ $\quad R_b + P = R_a$ (i

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\delta_1 = \int_0^{45} \frac{R_a 4}{E\pi(-30x/45+60)^2}dx = \frac{4R_a}{E\pi(-30x/45+60)}\frac{45}{30}$$

$$\delta_1 = \frac{4(45)R_a}{E\pi 30}\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{60}\right) = R_a 9{,}09e^{-7}$$

$$\delta_2 = \frac{R_a 30(4)}{E\pi 30^2} = R_a 2{,}02e^{-8}$$

$$\delta_3 = \int_{75}^{85} \frac{(R_a - P)4}{E\pi(3x-195)^2}dx = \frac{4(R_a-P)}{E\pi(3x-195)(-3)}$$

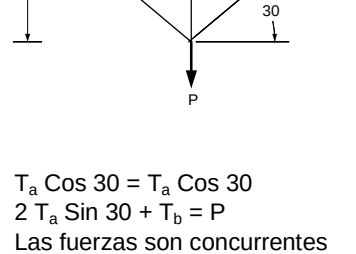
$$\delta_3 = \frac{4(R_a-P)}{E\pi(-3)}\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{30}\right) = (R_a-P)3{,}36e^{-9}$$

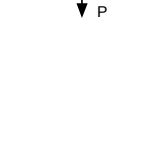
La ecuación de deformadas $\delta_t = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \varepsilon$

$R_a 9{,}09e - 7 + R_a 2{,}03e - 8 + (R_a - P)3{,}36e - 9 = 0{,}001$

$R_a = 0.75\ P$
$R_b = 0.25\ P$

2.19. Hallar los esfuerzos en las barras del sistema de la figura

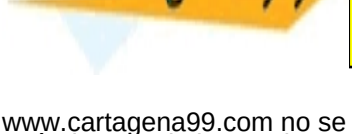




Solución

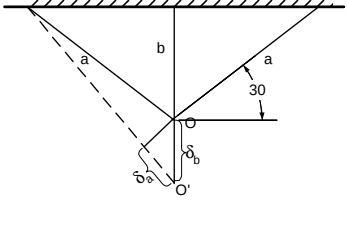
$\Sigma F_x = 0$	$T_a \text{ Cos } 30 = T_a \text{ Cos } 30$	No aporta
$\Sigma F_y = 0$	$2\ T_a \text{ Sin } 30 + T_b = P$	(i
$\Sigma M = 0$	Las fuerzas son concurrentes	

Se tiene una ecuación y dos incógnitas. De las deformaciones



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

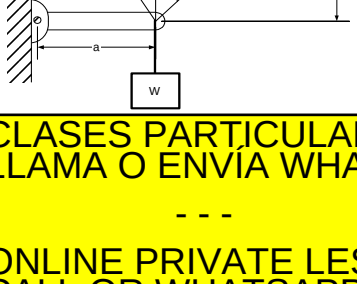


$\delta_b = OO'$
$\delta_a = OO' \text{Sin } 30$
$\delta_b = \delta a / \text{Sin } 30$
$T_b\, l_b/EA = T_a l_a/(EA \text{ Sin } 30)$
$l_a \text{ Sin } 30 = l_b$
$T_b\, l_a \text{ Sin } 30 = T_a\, l_a/\text{Sin } 30$
$T_b = T_a / \text{Sin2 } 30$
$T_b = 4T_a$ (ii

De i y ii $2\, T_a \text{ Sin } 30 + 4T_a = P$

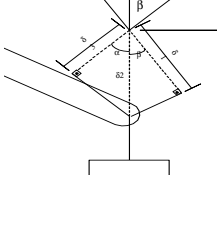
$T_a = 0.2\, P$
$T_b = 0.8\, P$

2.20. Una barra rígida horizontal esta articulada en su extremo izquierdo mientras que en su extremo derecho hay tres cables y un peso W como se indica en la figura. a) Determinar las expresiones para calcular los esfuerzos en cada una de las barras y la fuerza total sobre la barra AO. b) Utilizando las anteriores relaciones determinar las esfuerzos sí: $A_1 = A_2 = A_3 = 2\ cm^2$ $\alpha = 30^o$; $\beta = 45^o$; W = 2500 kg



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Además

$$\cos\alpha = \delta_1 / \delta_2$$

$$\cos\beta = \delta_3 / \delta_2 \qquad \text{(ii}$$

$$l_1 \cos\alpha = l_2 = l_3 \cos\beta \qquad \text{(iv}$$

$$T_1 = \cos^2\alpha \cdot \left(\frac{A_1}{A_2}\right) \cdot T_2$$

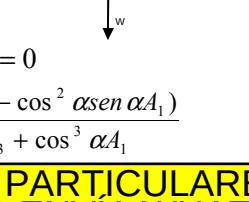
$$T_3 = \cos^2\beta \cdot \left(\frac{A_3}{A_2}\right) \cdot T_2 \qquad \text{(v}$$

$$T_1 = \frac{\cos^2\alpha A_1 W}{A_2 + \cos^3\beta A_3 + \cos^3\alpha A_1} \qquad \text{(vi}$$

$$T_2 = \frac{A_2 W}{A_2 + \cos^3\beta A_3 + \cos^3\alpha A_1} \qquad \text{(vii}$$

$$T_3 = \frac{\cos^2\beta A_3 W}{A_2 + \cos^3\beta A_3 + \cos^3\alpha A_1} \qquad \text{(viii}$$

Además



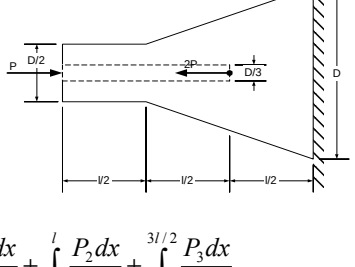
$$T_3 sen\beta - T_1 sen\alpha - R = 0$$

$$R = \frac{W(\cos^2\beta sen\beta A_3 - \cos^2\alpha sen\alpha A_1)}{A_2 + \cos^3\beta A_3 + \cos^3\alpha A_1} \qquad \text{(ix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.21. Hallar la deformación total de la barra de la figura, considerando el material Acero con D = 10 cm, l = 50 cm, E = 2.1x10^6 Kg/cm^2 y P = 2000 Kg



Solución :

$$\delta_T = \int_0^{l/2} \frac{P_1 dx}{EA_1} + \int_{l/2}^{l} \frac{P_2 dx}{EA_2} + \int_{l}^{3l/2} \frac{P_3 dx}{EA_3}$$

P_1 = -P (compresión) P_2 = -P (compresión) P_3 = P (tracción)

$$D_1 = \frac{D}{2}$$

$$d_1 = \frac{D}{3}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(D_1^{\,2} - d_1^{\,2}) = \frac{5\pi D^2}{144}$$

$$D_2 = \frac{Dx}{2l} + \frac{D}{4} = D(\frac{2x+l}{4l})$$

$$d_2 = \frac{D}{3}$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}(D_2^{\,2} - d_2^{\,2}) = \frac{\pi D^2}{4}\left[\left(\frac{2x+l}{4l}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$$

$$D_3 = \frac{Dx}{2l} + \frac{D}{4} = D(\frac{2x+l}{4l})$$

$$d_3 = 0$$

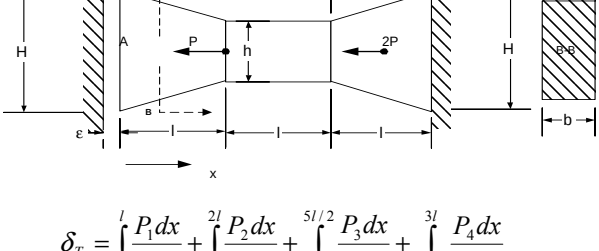
$$A_3 = \frac{\pi}{4}(D_3^{\,2} - d_3^{\,2}) = \frac{\pi D^2}{4}\left[\left(\frac{2x+l}{4l}\right)^2\right]$$

$$\delta = \int_0^{l/2} \frac{P_1 dx}{EA_1} + \int_{l/2}^{l} \frac{P_2 dx}{EA_2} + \int_{l}^{3l/2} \frac{P_3 dx}{EA_3} = \frac{72Pl}{\pi E D^2} + \frac{12Pl}{\pi E D^2} \ln\frac{25}{8} = \frac{Pl}{\pi E D^2}\left(72 + 12\ln\frac{25}{8}\right)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.22. Para el sistema de la figura, se pide determinar las reacciones que soportan las paredes rígidas por efecto de las cargas que se indican. El espesor de la barra es “b” y L = 30 cm; H = 10 cm; h = H/3; E = 2.1x10^6 kg/cm^2 ; P = 5000 kg; b = 5 cm



Solución :

$$\delta_T = \int_0^l \frac{P_1 dx}{EA_1} + \int_l^{2l} \frac{P_2 dx}{EA_2} + \int_{2l}^{5l/2} \frac{P_3 dx}{EA_3} + \int_{5l/2}^{3l} \frac{P_4 dx}{EA_3}$$

$$A_1 = b\left(1 - \frac{2x}{3l}\right)H$$

$$A_2 = bH/3$$

$$A_3 = A_4 = b\left(\frac{H-h}{l}\right)x' + h = \frac{bH(l+2x')}{3l}$$

Asumiendo que el bloque no llega a chocar en el extremo izquierdo

$P_1 = 0$

$P_2 = P$

$P_3 = P$

$P_4 = 3P$

Reemplazando

$$\delta_T = \int_0^l \frac{0\,dx}{Eb\left(1 - \frac{2x}{3l}\right)H} + \int_l^{2l} \frac{P dx}{E\frac{bH}{3}} + \int_0^{l/2} \frac{P dx}{E\frac{bH(l+2x')}{3l}} + \int_{l/2}^{l} \frac{3P dx}{E\frac{bH(l+2x')}{3l}}$$

$$\delta_T = \int_0^l \frac{0\,dx}{Eb\left(1 - \frac{2x}{3l}\right)H} + \int_l^{2l} \frac{P dx}{E\frac{bH}{3}} + \int_0^{l/2} \frac{P dx}{E\frac{bH(l+2x')}{3l}} + \int_{l/2}^{l} \frac{3P dx}{E\frac{bH(l+2x')}{3l}}$$

$$\delta_T = \frac{PL}{EbH}(3 - 3\ln 2 + \frac{9}{2}\ln 3) = 0.00837cm$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$P_2 = P - R_1$
$P_3 = P - R_1$
$P_4 = 3P - R_1$

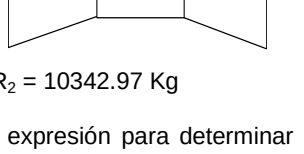
Y la deformación iguala a la tolerancia dada (ε=0.001)

$$\delta_T = \int_0^l \frac{-R_1 dx}{Eb\left(1-\frac{2x}{3l}\right)H} + \int_l^{2l} \frac{(P-R_1)dx}{E\frac{bH}{3}} + \int_0^{l/2} \frac{(P-R_1)dx}{E\frac{bH(l+2x')}{3l}} + \int_{l/2}^{l} \frac{(3P-R_1)dx}{E\frac{bH(l+2x')}{3l}} = 0.001$$

$$\delta_T = \frac{3Pl}{2EbH}(2-2\ln 2+3\ln 3) - \frac{3R_1 l}{EbH}(\ln 3+1) = 0.001$$

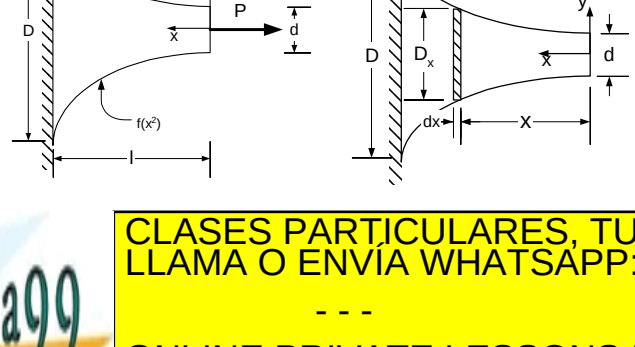
De donde $R_1 = 4657.03$ Kg

Además $R_2 = P + 2P - R_1$



De donde $R_2 = 10342.97$ Kg

2.23. Hallar una expresión para determinar la deformación que sufre una barra con sección variable según una función cuadrática, como se ve en la figura.



Solución :

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$D_x = Ax^2 + B$$

para x = 0 $D_x = d$

para x = l $D_x = D$

$$D_x = \left(\frac{D-d}{l^2}\right)x^2 + d$$

Resolviendo

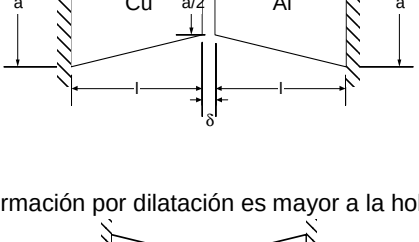
$$A_x = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\left(\frac{D-d}{l^2}\right)\cdot x^2 + d\right)^2$$

$$\delta_t = \int_0^l \frac{P\cdot dx}{E\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(\left(\frac{D-d}{l^2}\right)\cdot x^2 + d\right)^2}$$

$$\delta_t = \frac{2P\cdot l}{E\cdot\pi\cdot d\cdot D}\left(1 + \frac{D}{D-d}\,arctg\left(\frac{D-d}{\sqrt{d(D-d)}}\right)\right)$$

De donde

2.24. Hallar una expresión para determinar la reacción en cada uno de los apoyos, de los elementos mostrados en la figura, originados por un aumento de la temperatura ΔT, considerando como datos: δ, l, a.



Solución :

Suponiendo que la deformación por dilatación es mayor a la holgura

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$D_x = \frac{a}{2}(\frac{x}{l}+1)$$

$$\delta_{cu} = \int_0^l \frac{R \cdot dx}{E_{cu}\frac{\pi}{4}\left[\frac{a}{2}\left(\frac{x}{l}+1\right)\right]^2}$$

$$\delta_{cu} = \frac{8Rl}{E_{cu}\pi a^2}$$

En el aluminio la deformación es similar:

$$\delta_{al} = \int_0^l \frac{R \cdot dx}{E_{al} A_x}$$

$$D_x = \frac{a}{2}(\frac{x}{l}+1)$$

$$\delta_{al} = \int_0^l \frac{R \cdot dx}{E_{al}\frac{\pi}{4}\left[\frac{a}{2}\left(\frac{x}{l}+1\right)\right]^2}$$

$$\delta_{al} = \frac{8Rl}{E_{al}\pi a^2}$$

La deformación por la variación de temperatura:

$$\delta_{\Delta T} = l\alpha_{cu}\Delta T + l\alpha_{al}\Delta T = l(\alpha_{cu}+\alpha_{al})\Delta T$$

Además

$$\delta_{cu} + \delta_{al} = \delta_{\Delta T} - \delta$$

reemplazando, obtenemos:

$$\frac{8Rl}{E_{cu}\pi a^2} + \frac{8Rl}{E_{al}\pi a^2} = l(\alpha_{cu}+\alpha_{al})\Delta T - \delta$$

$$\frac{8R*l}{E_{cu}*\pi*a^2} + \frac{8R*l}{E_{al}*\pi*a^2} = l*\Delta T(\alpha_{cu}+\alpha_{al}) - \delta$$

De donde:

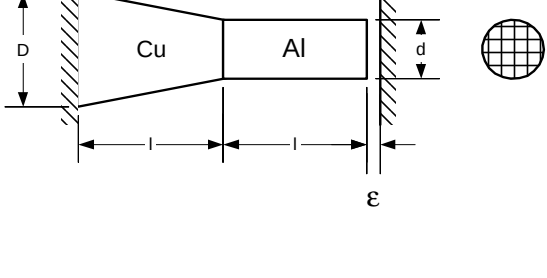
$$\frac{8Rl}{E_{cu}\pi a^2} + \frac{8Rl}{E_{al}\pi a^2} = l(\alpha_{cu}+\alpha_{al})\Delta T - \delta$$

$$R = \frac{E_{cu}E_{al}\pi a^2}{8(E_{cu}+E_{al})}[\alpha_{cu}+\alpha_{al})\Delta T - \delta]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

D = 5 cm, d = 2 cm, $\alpha_{cu} = 17x10^{-6}$[1/ºC]; $\alpha_{al} = 22.2x10^{-5}$[1/ºC]; $E_{cu} = 1.1x10^{6}$ Kg/cm^2; $E_{al} = 7x10^{5}$ Kg/cm^2



Solución :

La deformación debido a la dilatación es:

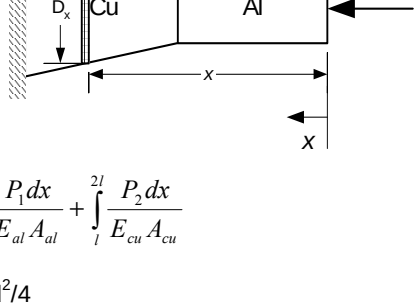
$$\delta_{\Delta T} = l\alpha_{cu}\Delta T + l\alpha_{al}\Delta T = l(\alpha_{cu} + \alpha_{al})\Delta T$$

$$\delta_{\Delta T} = 20(17x10^{-6} + 22.2x10^{-5})(120 - 25)$$

$$\delta_{\Delta T} = 0.4541cm$$

Ya que la deformada es mayor a la holgura, hay contacto en la pared derecha.

$$\delta_R = \delta_{\Delta T} - \varepsilon$$



$$\delta_R = \int_0^l \frac{P_1 dx}{E_{al} A_{al}} + \int_l^{2l} \frac{P_2 dx}{E_{cu} A_{cu}}$$

$P_1 = R$

$A_1 = \pi\, d^2/4$

$P_2 = R$

$A_2 = \pi\, D^2/4$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$D_x = \frac{D-d}{l}x + 2d - D$$

reemplazando:

$$\delta_R = \int_0^l \frac{Rdx}{E_{al}\frac{\pi d^2}{4}} + \int_l^{2l} \frac{Rdx}{E_{cu}\frac{\pi}{4}\left(\frac{D-d}{l}x + 2d - D\right)^2}$$

resolviendo:

$$\delta_R = \frac{4R(DE_{al} + dE_{cu})}{Dd^2\pi E_{al}E_{cu}}$$

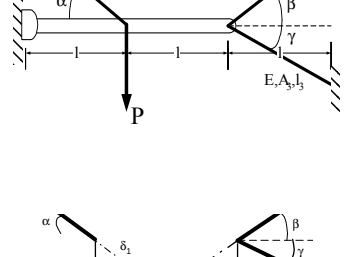
Reemplazando

$$\frac{4R(DE_{al} + dE_{cu})}{Dd^2\pi E_{al}E_{cu}} = \delta_{\Delta T} - \varepsilon$$

con los datos

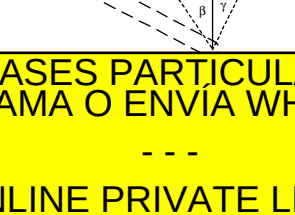
R = 2599.39 Kg

2.26. Para el sistema de la figura se piden las fuerzas que soportan los cables que soportan a la barra rígida, articulada en uno de sus extremos.



Solución :

Las deformaciones



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

además $l = l_1 \cos\alpha$

$l = l_2 \cos\beta$

$l = l_3 \cos\gamma$

reemplazando:

$$\frac{\delta_2}{sen\beta} = 2\frac{\delta_1}{sen\alpha}$$

$$\delta_2 = 2\frac{\delta_1 sen\beta}{sen\alpha}$$

$$\delta_3 = 2\frac{\delta_1 sen\gamma}{sen\alpha}$$

Las deformadas:

$$\delta_1 = \frac{T_1 l_1}{EA_1}$$

$$\delta_2 = \frac{T_2 l_2}{EA_2}$$

$$\delta_3 = \frac{T_3 l_3}{EA_3}$$

$$\frac{T_2 \dfrac{l}{\cos\beta}}{EA_2} = 2\frac{T_1 \dfrac{l}{\cos\alpha sen\beta}}{EA_1 sen\alpha}$$

$$T_2 = \frac{2sen\beta\cos\beta A_2 T_1}{sen\alpha\cos\alpha A_1}$$

$$\frac{T_3 \dfrac{l}{\cos\gamma}}{EA_3} = 2\frac{T_1 \dfrac{l}{\cos\alpha sen\gamma}}{EA_1 sen\alpha}$$

$$T_3 = \frac{2sen\gamma\cos\gamma A_3 T_1}{sen\alpha\cos\alpha A_1}$$

De la estática

$$T_1 sen\alpha l - Pl + T_2 sen\beta 2l + T_3 sen\gamma 2l = 0$$

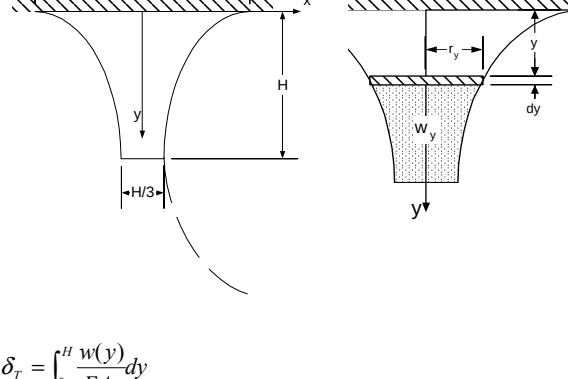
$$T_1 = \frac{sen\alpha\cos\alpha A_1 P}{K}$$

$$sen\beta\cos\beta A_2 2P$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.27. Determinar la deformación debido al peso propio del bloque mostrado en la figura. La sección transversal es circular y con variación parabólica



Solución :

$$\delta_T = \int_0^H \frac{w(y)}{EA_y} dy$$

la ec. de la parábola es

$$x - x_o = P(y - y_o)^2$$

$$(x_o, y_o) = (\frac{H}{6}, H)$$

para x = H/2 y = 0

$$x = r_r = \frac{(y-H)^2}{3H} + \frac{H}{6}$$

El área a cualquier altura “y” es:

$$A(y) = \pi r_r^{\,2} = \pi\left[\frac{(y-H)^2}{3H} + \frac{H}{6}\right]^2$$

El peso por debajo de “y” es:

$$w(y) = \int \gamma \pi r_y^{\,2} dy$$

Reemplazando y simplificando:

$$w(y) = \frac{\gamma\pi}{H^2 540}\left(47H^5 - 135H^4 y + 180H^3 y^2 - 140H^2 y^3 + 60Hy^4 - 12y^5\right)$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\delta_T = \int_0^H \left[\frac{\frac{\gamma\pi}{H^2 540}\left(47H^5 - 135H^4 y + 180H^3 y^2 - 140H^2 y^3 + 60Hy^4 - 12y^5\right)}{E\pi\left[\frac{(y-H)^2}{3H} + \frac{H}{6}\right]^2} \right] dy$$

simplificando:

$$\delta_T = \frac{\gamma H^2}{90E}(17 + 6\ln 3)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS PROPUESTOS

2.28. Hallar el esfuerzo normal en una barra de sección circular sujeta a una carga de tracción de 100 Kg si su diámetro es de 1 cm.

2.29. Hallar los esfuerzos normal y cortante para una sección a 30º en el anterior problema

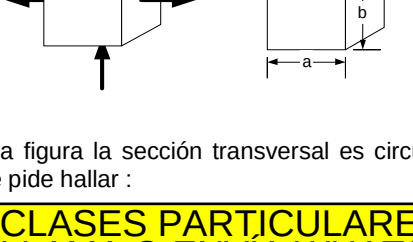
2.30. Una pieza esta sometida a esfuerzos de tracción compresión en dos dimensiones con σx = - 120 Kg/cm2 y σy = -150 Kg/cm2. Hallar los esfuerzos para una sección que forma un ángulo de 30º con la horizontal

2.31. Hallar el círculo de Mohr y los esfuerzos máximos en el anterior problema.

2.32. Una pieza de acero tiene sección cuadrada de 3 x 4 cm y un largo de 900 cm y esta sometida a una carga de 1500 Kg Se pide hallar :

Los esfuerzos máximos
Los esfuerzos a 30o
Las deformadas total y unitaria longitudinal y transversal
Los coeficientes de seguridad Sy = 1800 Kg/cm2 y Sy´= 960 Kg/cm2

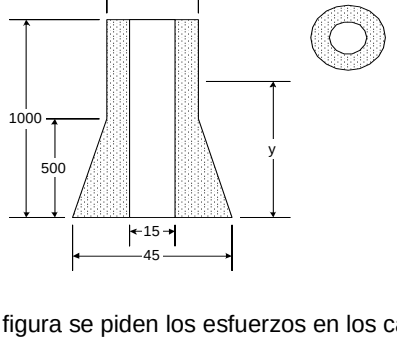
2.33. Una pieza de a = 3 cm de ancho por b = 4 cm de alto y c = 2 cm de profundidad esta sometida a una fuerza horizontal de 150 Kg y una vertical de -200 Kg Se pide hallar las dimensiones finales. Tomar ν =0.3



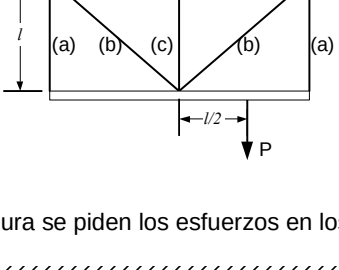
2.34. En el sistema de la figura la sección transversal es circular y las dimensiones están en centímetros. Se pide hallar :

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

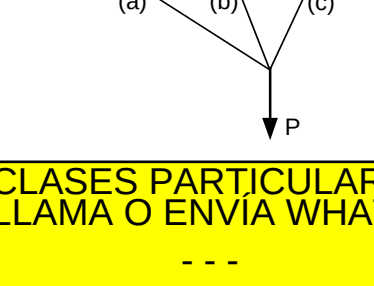
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



2.35. En el sistema de la figura se piden los esfuerzos en los cables.



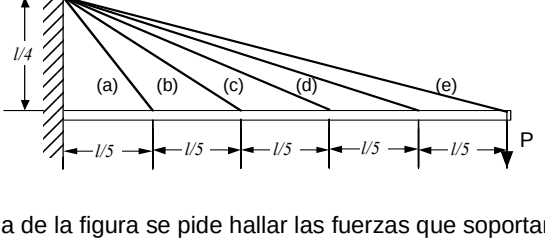
2.36. En el sistema de la figura se piden los esfuerzos en los cables



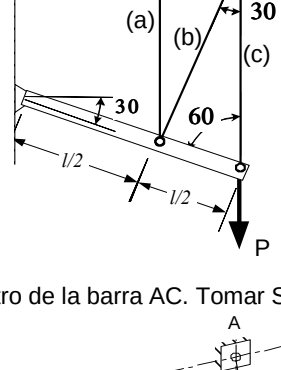
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

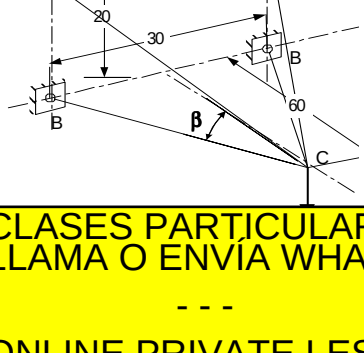
2.37. En el sistema de la figura se pide hallar las fuerzas que soportan los cables



2.38. En el sistema de la figura se pide hallar las fuerzas que soportan los cables



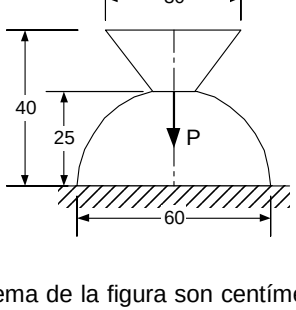
2.39. Se pide hallar el diámetro de la barra AC. Tomar Sy = 1800 Kg/cm2



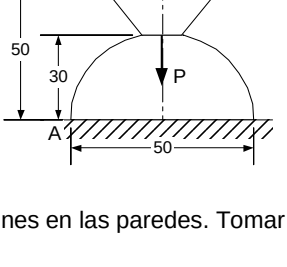
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

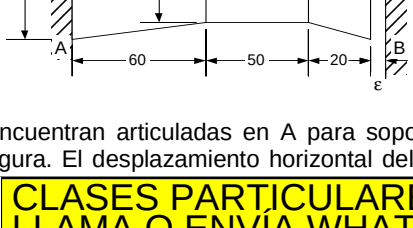
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



2.41. Las unidades en el sistema de la figura son centímetros. Se pide las reacciones en A y B



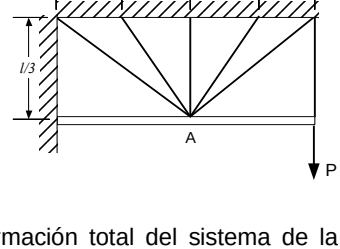
2.42. Se pide hallar las reacciones en las paredes. Tomar ε = 0.01 cm



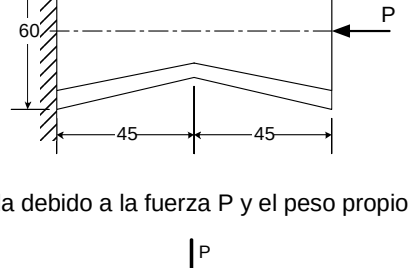
2.43. Tres barras se encuentran articuladas en A para soportar juntas, un peso W como se indica en la figura. El desplazamiento horizontal del punto A esta impedido

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

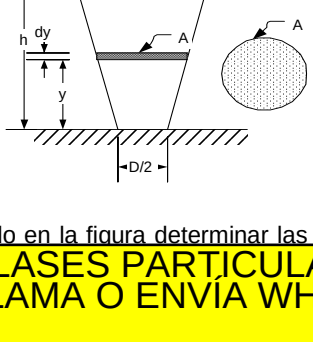
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



2.44. Determinar la deformación total del sistema de la figura. Tomar E = 2.1x106 Kg/cm2 y P = 2000 Kg



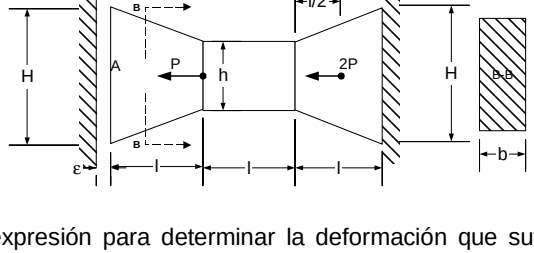
2.45. Hallar la deformada debido a la fuerza P y el peso propio



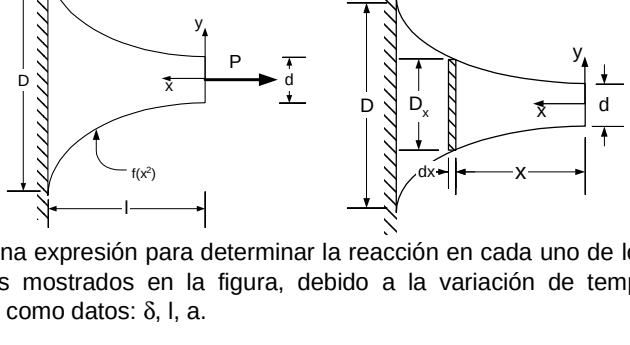
2.46. En el sistema mostrado en la figura determinar las reacciones que soportan las

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

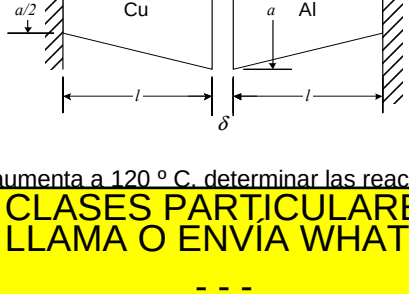
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



2.47 Hallar una expresión para determinar la deformación que sufre una barra con sección variable según una función cúbica, como se ve en la figura.



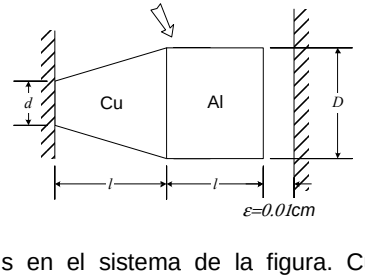
2.48. Hallar una expresión para determinar la reacción en cada uno de los apoyos, de los elementos mostrados en la figura, debido a la variación de temperatura ΔT, considerando como datos: δ, l, a.



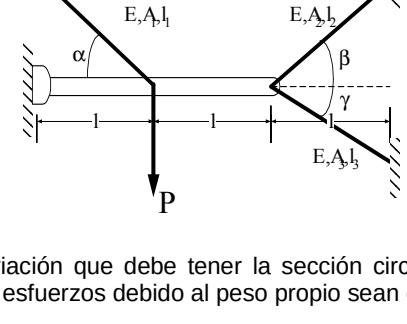
2.49. Si la temperatura aumenta a 120 º C, determinar las reacciones que soportan los

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

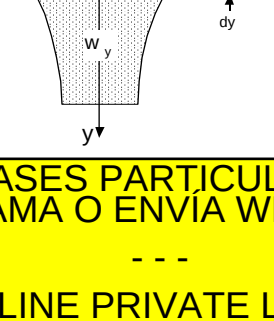
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



2.50. Hallar los esfuerzos en el sistema de la figura. Cuando las deformaciones además de la carga P provienen de un incremento de la temperatura ΔT



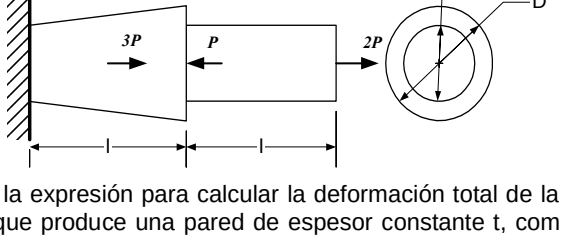
2.51. Determinar la variación que debe tener la sección circular del elemento de la figura, de modo que los esfuerzos debido al peso propio sean constantes.



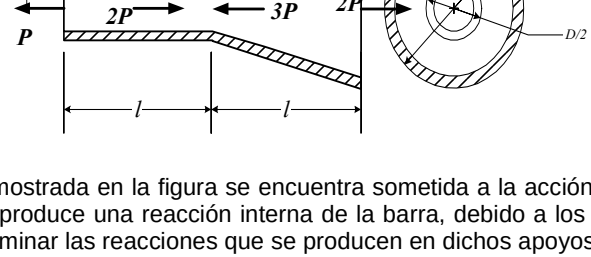
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

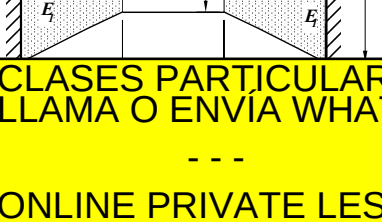
2.52. La barra maciza mostrad en la figura, consta de un tramo troncocónico y otro cilíndrico, determinar la deformación total del sistema siendo el material el mismo para ambos tramos.



2.53. Determinar la expresión para calcular la deformación total de la barra, que tiene una perforación que produce una pared de espesor constante t, como se muestra en la figura, la barra se encuentra sometida a la acción de las respectivas cargas. La sección de la barra varía según se ve en dicha figura.



2.54. La barra mostrada en la figura se encuentra sometida a la acción de las fuerzas mostradas que produce una reacción interna de la barra, debido a los apoyos que se muestran, determinar las reacciones que se producen en dichos apoyos, considerando además que los materiales tienen diferente módulo de elasticidad, y su sección transversal es circular y varia en cada tramo.

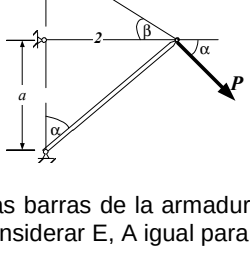


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

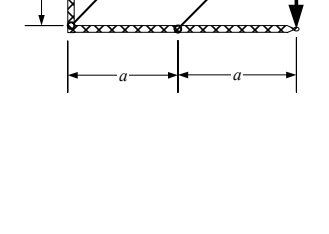
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.55. Determinar la ecuación para determinar el Área de las secciones transversales de los elementos elásticos que se muestran en la figura. Considerar conocidas las longitudes de cada una de éstas.

2.56. Hallar los esfuerzos de los elementos mostrados en la figura.



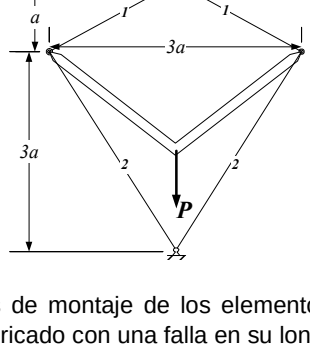
2.57. Hallar los esfuerzos en las barras de la armadura mostrada en la figura cuando se aplica la fuerza indicada. Considerar E, A igual para todas las barras.



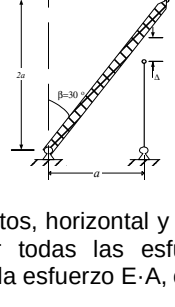
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.58. Una armadura simétrica experimenta las cargas mostradas en la figura. Determinar los esfuerzos normales que experimentan cada una de ellas.



2.59. Calcular las esfuerzos de montaje de los elementos flexibles mostrados en la figura, si uno de ellos fue fabricado con una falla en su longitud Δ=0.5cm.

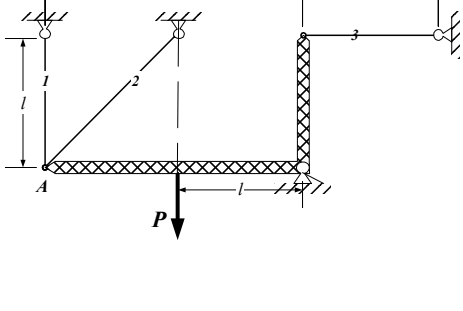


2.60. Determinar los desplazamientos, horizontal y vertical, del punto de aplicación de la fuerza P, además determinar todas las esfuerzos en las diferentes barras. Considerar, el módulo de rigidez a la esfuerzo E·A, constante.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

2.61. Determinar el desplazamiento del punto A debido a las cargas aplicadas sobre la armadura mostrada en la figura.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

3.- CORTE PURO

3.1.- INTRODUCCIÓN

Como se vio en el capítulo 1 en cualquier sección de un cuerpo que soporta cargas externas, se origina una fuerza interna que puede descomponerse dos fuerzas la primera con dirección normal y la segunda con dirección tangencial a la sección. Cuando la fuerza interna solo tiene un componente tangencial a la sección se originan esfuerzos cortantes y la carga se conoce como de corte.

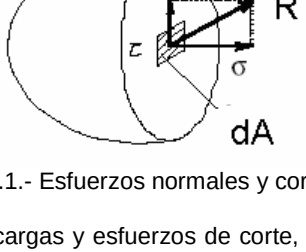


Fig. 3.1.- Esfuerzos normales y cortantes

Una pieza está sometida a cargas y esfuerzos de corte, cuando sobre ella se aplican fuerzas externas dirigidas perpendicularmente a su eje centroidal.

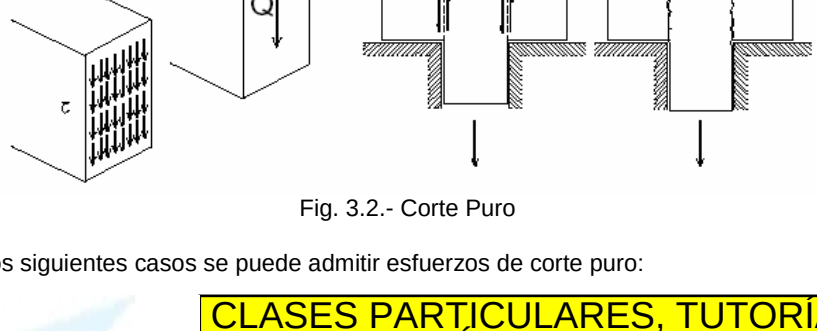


Fig. 3.2.- Corte Puro

En los siguientes casos se puede admitir esfuerzos de corte puro:

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

3.2.- ESFUERZOS

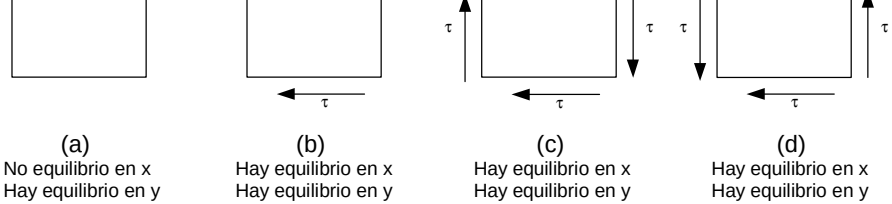
Si no hay presencia de esfuerzos normales (corte puro), del equilibrio

$$Q = \int_A \tau_n dA = \tau_n \int_A dA = \tau_n A$$

$\tau_n = Q/A$

$\sigma_n = 0$ (3.1

Analizando un elemento diferencial y para que en él se verifique el equilibrio



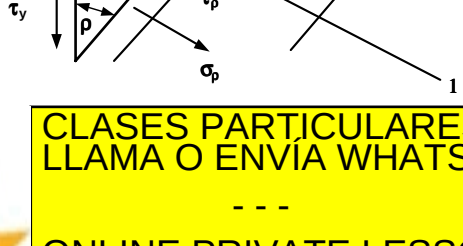
(a)	(b)	(c)	(d)
No equilibrio en x Hay equilibrio en y No equilibrio en z	Hay equilibrio en x Hay equilibrio en y No equilibrio en z	Hay equilibrio en x Hay equilibrio en y No equilibrio en z	Hay equilibrio en x Hay equilibrio en y Hay equilibrio en z

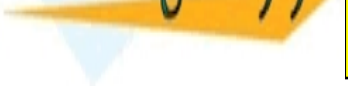
Fig. 3.3.- Condiciones de Equilibrio

Solo se verifica equilibrio en el caso (d). Se puede concluir que:

- Los esfuerzos de corte aparecen en las cuatro caras del elemento diferencial.
- Los esfuerzos son concurrentes o divergentes en las aristas y tienen igual valor.

Ahora bien, analizando una sección inclinada a un ángulo ρ





CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

De la estática

$\Sigma F1 = 0$ $\quad \sigma\rho\, dl\, dz + \tau y\, dy\, dz \operatorname{Sin}\rho + \tau x\, dx\, dz \operatorname{Cos}\rho = 0$ (3.3

$\sigma\rho + \tau y \operatorname{Cos}\rho \operatorname{Sin}\rho + \tau x \operatorname{Sin}\rho \operatorname{Cos}\rho = 0$

$$\sigma\rho = -\tau \operatorname{Sin} 2\rho \qquad \textbf{(3.4}$$

$\Sigma F2 = 0$ $\quad \tau\rho\, dl\, dz - \tau y\, dy\, dz \operatorname{Cos}\rho + \tau x\, dx\, dz \operatorname{Sin}\rho = 0$ (3.5

$\tau\rho - \tau y \operatorname{Cos}\rho \operatorname{Cos}\rho + \tau x \operatorname{Sin}\rho \operatorname{Sin}\rho = 0$

$$\tau\rho = \tau \operatorname{Cos} 2\rho \qquad \textbf{(3.6}$$

Cuando $\rho = 0$ se verifica que

$$\sigma_0 = \sigma_{90} = 0$$
$$\tau_0 = \tau_{90} = \tau$$

Ya que $\quad (\operatorname{Sin} 2\rho)^2 + (\operatorname{Cos} 2\rho)^2 = 1$

De 3.3 y 3.5 $\quad \sigma_\rho^{\,2} + \tau_\rho^{\,2} = \tau^2$ (3.6

Que es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen.

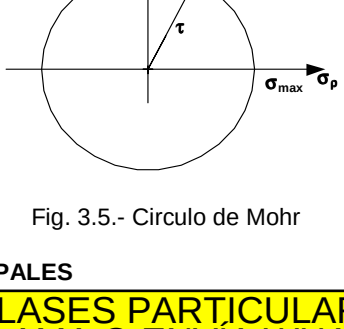


Fig. 3.5.- Circulo de Mohr

3.3.- ESFUERZOS PRINCIPALES

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Para evitar la falla, ambos esfuerzos máximos no deben exceder de los límites de fluencias longitudinales y transversales respectivamente

$$\sigma_{max} = P/A_N < S_y$$
$$\tau_{max} = P/A_N < S'_y \qquad (3.9$$

3.4.- DEFORMACIÓN

Una pieza sometida a esfuerzos de corte puro se distorsiona

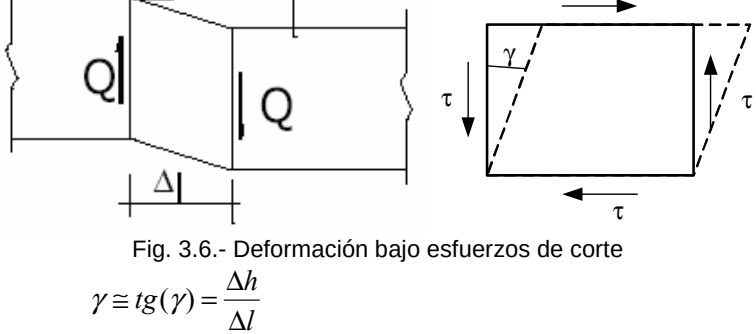


Fig. 3.6.- Deformación bajo esfuerzos de corte

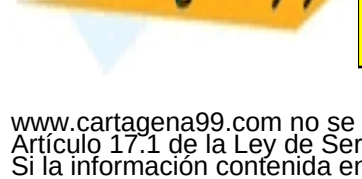
$$\gamma \cong tg(\gamma) = \frac{\Delta h}{\Delta l} \qquad (3.10$$

3.5...- ECUACIÓN DE HOOKE

Mientras los esfuerzos no sobrepasen el límite de fluencia, ellos son proporcionales a las deformaciones

$$\tau = G\gamma \qquad (3.11$$

Ecuación conocida como la ley de Hooke, dónde G recibe el nombre de módulo de elasticidad transversal.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

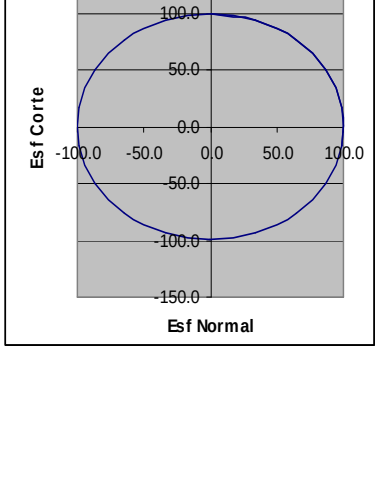
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1. Una pieza con un área de 1 cm^2 soporta una fuerza cortante de 100 Kg Se pide hallar: a) Los esfuerzos en ángulos de 0º a 360º con intervalos de 10º y b) Graficar σ vs. τ

Solución:

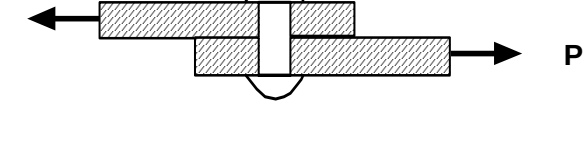
ϕ (Gr)	ϕ (Rad)	$\sigma_\phi = (Q/An)\text{Sin } 2\phi$	$\tau_\phi = (Q/An)\text{Cos } 2\phi$
0	0.0	0.0	100.0
10	0.2	34.2	94.0
20	0.3	64.3	76.6
30	0.5	86.6	50.0
40	0.7	98.5	17.4
50	0.9	98.5	-17.4
60	1.0	86.6	-50.0
70	1.2	64.3	-76.6
80	1.4	34.2	-94.0
90	1.6	0.0	-100.0
100	1.7	-34.2	-94.0
110	1.9	-64.3	-76.6
120	2.1	-86.6	-50.0
130	2.3	-98.5	-17.4
140	2.4	-98.5	17.4
150	2.6	-86.6	50.0
160	2.8	-64.3	76.6
170	3.0	-34.2	94.0
180	3.1	0.0	100.0
190	3.3	34.2	94.0
200	3.5	64.3	76.6
210	3.7	86.6	50.0
220	3.8	98.5	17.4
230	4.0	98.5	-17.4
240	4.2	86.6	-50.0
250	4.4	64.3	-76.6
260	4.5	34.2	-94.0
270	4.7	0.0	-100.0
280	4.9	-34.2	-94.0
290	5.1	-64.3	-76.6
300	5.2	-86.6	-50.0
310	5.4	-98.5	-17.4



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

3.2. Cuantos remaches de 1 cm. de diámetro se necesitan para unir dos placas y soportar una fuerza de 1000 Kg Tomar Sy´= 900 Kg/cm^2

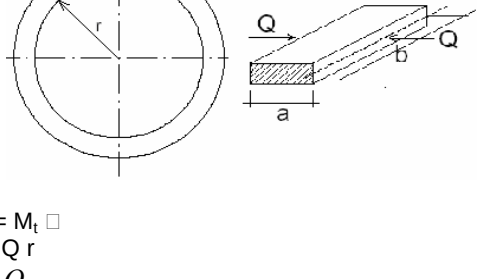


Solución:

$\tau_{max} < P/A_N = 1000/[n(\pi\ 12^2)/4] < 900$

n = 1.41 Se adoptan 2 remaches

3.3.- Hallar el área que necesita una chaveta en el eje de un motor y una polea



Solución :

Pot = M_t □

$M_t = Q\ r$

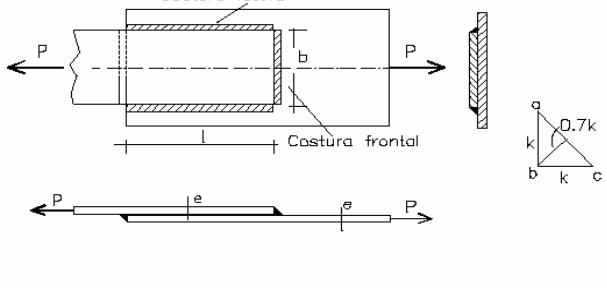
$$\tau = \frac{Q}{ab} \leq Sy'$$

De donde $$ab \geq \frac{Pot}{\omega r Sy'}$$

3.4.- Hallar la carga que soportan los dos cordones laterales y dos frontales de soldadura que unen dos planchas.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

Asumiendo que las soldaduras fallan en su sección menor

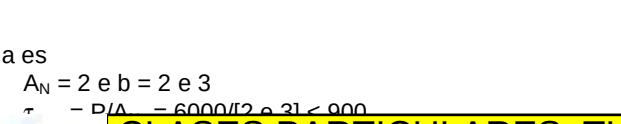
$$Area = \frac{Diagonal}{2} LongCordon = \frac{\sqrt{2e^2}}{2} LongCordon$$

área costura frontal = b x 0.7 e
área costura lateral = l x 0.7 e

$$\tau = \frac{Q}{AreaTotal} = \frac{Q}{2(b+l)0.7e} \leq Sy'$$

$$Q \geq Sy'2(b+l)0.7e$$

3.5. Dos placas unidas por dos cordones de soldadura a 45º soportan una carga de corte de 6000 Kg Si el ancho de las placas es de b = 3 cm, se pide hallar las dimensiones de la garganta y de la base de la soldadura. Tomar Sy´= 900 Kg/cm^2.



Solución :

El área mínima es

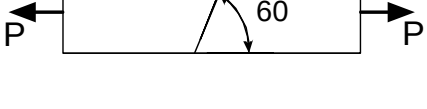
$A_N = 2\ e\ b = 2\ e\ 3$

$\tau = P/A_N = 6000/[2\ e\ 3] < 900$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

3.6. Una pieza de madera con una sección transversal de 3 x 3 cm. está colada como se ve en la figura. Hallar la fuerza máxima que puede soportar. Tomar Sy´= 200 Kg/cm2



Solución :

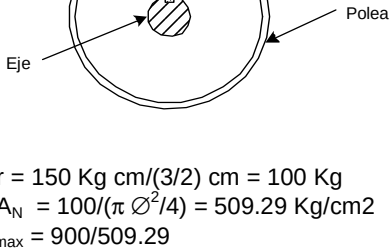
De 2.7 y 2.8 $\sigma_\rho = (P/2A_N)\ (1 + \text{Cos } 2\ \rho)$

$\tau_\rho = (P/2A_N)\ \text{Sin } 2\ \rho$

$\tau_{60} = (P/2A_N)\ \text{Sin } 2\ \rho = P/[2(3)(3)]\ \text{Sin } (120) < 200$

$P = 4156.92$ Kg

3.7. Una polea está fijada a su eje por medio de un pasador cilíndrico. Los ejes del eje y del pasador son perpendiculares. Si el momento torsor soportado es de 150 Kg cm. y el diámetro del eje de 3 cm. Se pide hallar el coeficiente de seguridad en el pasador. Tomar diámetro pasador 0,5 cm. y Sy`=900 Kg/cm^2



Solución :

$Q = M_t / r = 150$ Kg cm/(3/2) cm = 100 Kg

$\tau_{max} = P/A_N = 100/(\pi\ \varnothing^2/4) = 509.29$ Kg/cm2

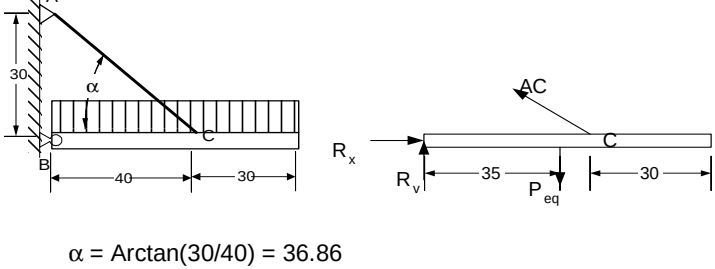
$\eta = Sy´/\tau_{max} = 900/509.29$

$\eta = 1.76$

3.8. Hallar la intensidad máxima U de la carga que puede soportar la plataforma rígida

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución:

α = Arctan(30/40) = 36.86

La carga equivalente

P_{eq} = H 70

$\Sigma F_x = 0$ R_x – AC Cos α = 0 (i

$\Sigma F_y = 0$ R_y + AC Sin α = Peq (ii

$\Sigma M_B = 0$ AC Sin α 40 = P_{eq} 35 (iii

AC = H(70)35/(Sin α 40) = 102,08 H

R_x = AC Cos α = 81.66 H

R_y = H70 - AC Sin α = 8.75 H

$$R = \sqrt{(R_x^{\,2} + R_y^{\,2})} = 82.12H$$

τ_{AC} = AC/A_N = 102,08H/(π 1^2/4) < 900 Kg/cm2

HAC = 6.92 Kg/cm

τ_O = R/A_N = 82,12H/(π 1^2/4) < 900 Kg/cm2

HO = 8.6 Kg/cm

Entonces H = 6.92 Kg/cm.

3.9. La plataforma rígida de la figura está soportada por dos cables a y b. Hallar el diámetro del pasador en O si S_y´= 900 Kg/cm^2 y P = 100 Kg

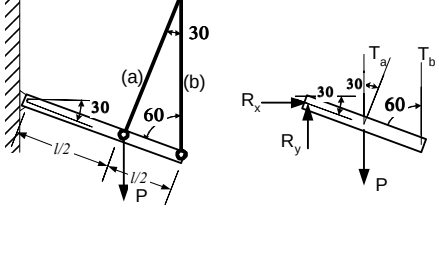
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

De 2.12T_a = 0.24 P = 24 Kg

T_b = 0.36 P = 36.1Kg

Σ Fx = 0 $R_x + T_a$ Sin 30 = 0 (i

R_x = -12.04 Kg

Σ Fy = 0 R_y + Ta Cos 30 + T_b - P= 0 (ii

R_y = 43.2 Kg

$$R = \sqrt{(R_x{}^2 + R_y{}^2)} = 44.64 Kg$$

$\tau_O = R/A_N = 44.64/(\pi \varnothing pas^2/4) < 900$ Kg/cm2

$\varnothing_{pas}$ = 0.25 cm

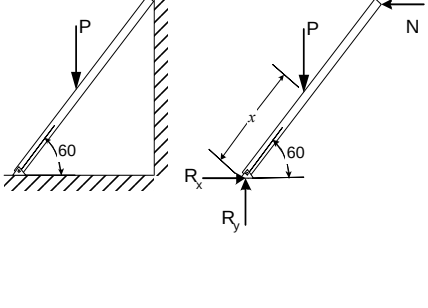
3.10. Hallar la fuerza que se necesita para troquelar un disco de 3 cm de diámetro y 0,2 cm de alto . Tomar Sy´= 1500 Kg/cm2.

Solución :

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

3.11. Una escalera esta diseñada para soportar una persona de 500 Kg y esta fijada al piso por dos pasadores que evitan su deslizamiento. Se pide hallar el diámetro de los pasadores: Tomar $S_y' = 900$ Kg/cm2.



Solución :

$\Sigma F_x = 0$	$R_x = N$	(i
$\Sigma F_y = 0$	$R_y = P$	(ii
$\Sigma M_A = 0$	P x Cos 60 – N l Sin 60 = 0	(iii
	N = P x Cot 60 /l	
	$R_x = N = P$ x Cot 60 /l	
	$R_y = P$	

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} = P\sqrt{1+(\frac{x}{l}Cot60)^2}$$

Máx con x = l

R = 1.15 P

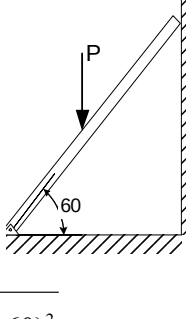
$\tau_{max} = R/A_N = 1.15\ (500)/(2\pi\ \varnothing pas^2/4) < 900$ Kg/cm^2

$\varnothing_{pas} = 0.6377$ cm

3.12. Una escalera soporta una persona de 500 Kg fijada al piso por dos pasadores que evitan su deslizamiento. Se pide hallar el diámetro de los pasadores: Tomar Sy´= 900 Kg/cm2.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución : Del anterior problema

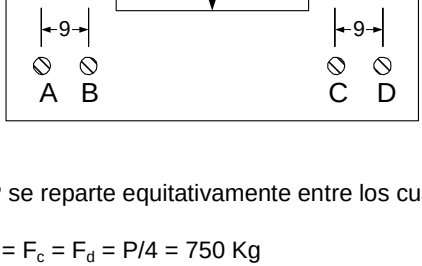
$$R = P\sqrt{1+(\frac{x}{l}Cot60)^2}$$

para x = l/2 R = 1,04 P

$\tau_{max} = R/A_N = 1{,}04\ (500)/(2\pi\ \varnothing pas^2/4) < 900\ Kg/cm^2$

$\varnothing_{pas} = 0.606$ cm

3.13. La pieza de la figura esta fijada por cuatro pasadores y soporta una carga de P = 3000 Kg Se pide hallar el diámetro mínimo de los pasadores. Tomar $S_y' = 1100\ Kg/cm^2$.



Solución :

Por simetría, la carga P se reparte equitativamente entre los cuatro pernos

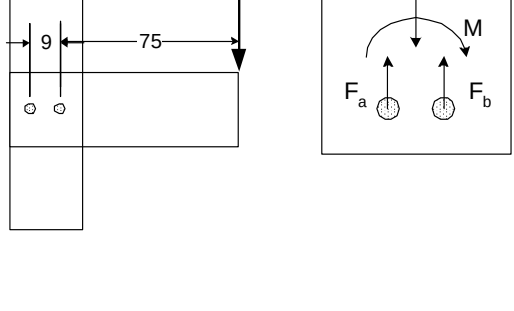
$\Sigma F_y = 0$ $F_a = F_b = F_c = F_d = P/4 = 750$ Kg

$\tau = F/A < S'_y$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

3.14. La plataforma de la figura soporta una carga de 100 Kg y esta soportada por 2 pasadores de 1 cm de diámetro. Se pide el coeficiente de seguridad en los pasadores. Tomar $S_y' = 1100\ Kg/cm^2$.



Solución :

Los pasadores además de soportar la carga vertical deben soportar el momento que se origina respecto del centro de los mismos.

$\Sigma F_y = 0$ $\quad F_a + F_b = P$ (i

$\Sigma M_A = 0$ $\quad P\,(75+9) = F_b\,9$ (ii

De i y ii $\quad F_b = 933.33\ Kg$

$F_a = -\,833.33\ Kg$

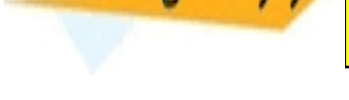
$\tau_a = F_a / A = 833.33/(\pi\, 1^2/4) = 1061.02\ Kg/cm^2$

$\tau_b = F_B / A = 933{,}33/(\pi\, 1^2/4) = 1188.34\ Kg/cm^2$

$\eta_a = S`_y / \tau_a = 1.036$ (No hay falla)

$\eta_b = S`_y / \tau_b = 0.925$ (Hay falla)

3.15. La plataforma de la figura soporta una carga de 400 Kg y esta soportada por 4 pasadores de 1 cm de diámetro. Se pide el coeficiente de seguridad en los pasadores. Tomar $S_y' = 1100\ Kg/cm^2$.

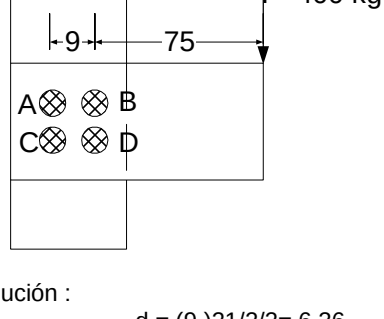


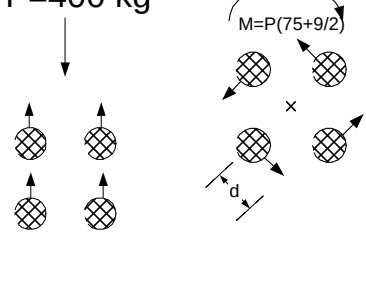
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





Solución :

d = (9)21/2/2= 6,36

$\Sigma F_y = 0$ $F_a = F_b = F_c = F_d = P/4 = 100$ Kg (i

$\Sigma M_o = 0 F_a = F_b = F_c = F_d = M/(d4)$ (ii

$F_a = F_b = F_c = F_d = [400(75+9/2)]/[4(6.36)] = 1250$ Kg

La composición da

F_{ax} =-1250 Cos 45 = - 883.88 Kg
F_{ay} =100-1250 Sin 45 = -783.88 Kg
F_{atot}= 1181.40 Kg
F_{bx} =-1250 Cos 45 = - 883.88 Kg
F_{by} =100+1250 Sin 45 = 983.88 Kg
F_{btot}= 1322.60 Kg
F_{cx} = 1250 Cos 45 = 883.88 Kg
F_{cy} =100-1250 Sin 45 = -783.88 Kg
F_{ctot}= 1181.40 Kg
F_{dx} = 1250 Cos 45 = 883.88 Kg
F_{dy} =100+1250 Sin 45 = 983.88 kg
F_{dtot}= 1322.60 Kg

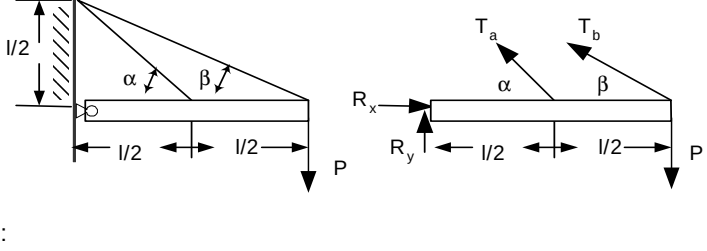
Los pasadores más solicitados son los “b” y “d”, es decir los de la derecha

$\tau_b = \tau_d = F/A = 1322.60/(\pi\, 1^2/4) = 1683.98$ Kg/cm^2

$\eta = S`_y/\ \tau = 0.653$ (Hay Falla)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

De 2.11T_a = 1.405 P = 1405 Kg

T_b = 1.124 P = 1124 Kg

Σ Fx = 0 R_x- TaCos α -T_b Cos β= 0 (i

Σ Fy = 0 R_y + Ta Sin α +T_b Sin β-P= 0 (ii

α = 45º

β = 26,56

R_x = 1998.9 Kg

R_y = -1496.9 Kg

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$$

R = 2497.21 Kg

$\tau_{max} = R/A_N = 1577.21/(\pi \varnothing pas^2/4) < 900\ Kg/cm^2$

$\varnothing_{pas}$ = 1.88 cm

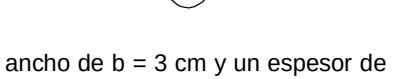
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

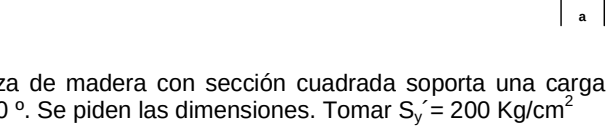
PROBLEMAS PROPUESTOS

3.17. Una pieza circular con un diámetro de 1 cm soporta una fuerza cortante de 150 Kg Se piden a) Los esfuerzos para ángulos de 0 a 360 con intervalos de 10.y b) Graficar σ vs. τ

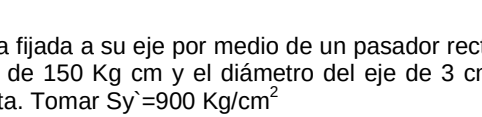
3.18. Cuantos remaches de 2 cm. de diámetro se necesitan para unir dos placas que deben soportar una fuerza de corte de 1500 Kg Tomar $S_y' = 900$ Kg/cm^2



3.19. Dos placas con un ancho de b = 3 cm y un espesor de e = 0,5 cm. están unidas por cordones de soldadura a 45º: Se pide hallar la carga máxima que la unión soportan. Tomar $S_y' = 900$ Kg/cm^2



3.20. Una pieza de madera con sección cuadrada soporta una carga de 1000 Kg y esta unida a 70 º. Se piden las dimensiones. Tomar $S_y' = 200$ Kg/cm^2

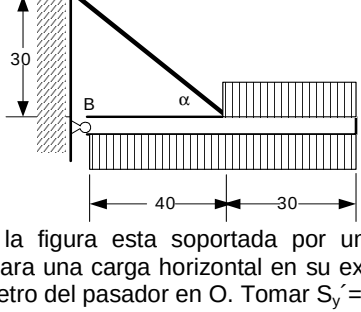


3.21. Una polea esta fijada a su eje por medio de un pasador rectangular. El momento torsor soportado es de 150 Kg cm y el diámetro del eje de 3 cm. Hallar el área que debe tener la chaveta. Tomar Sy`=900 Kg/cm^2

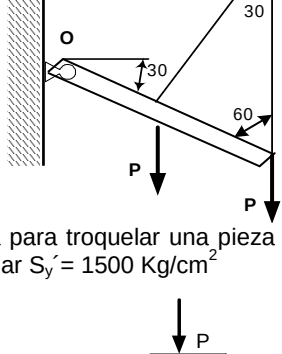
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

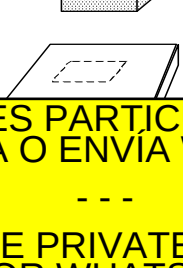
3.22. La plataforma de la figura esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y un cable. Para una intensidad de la carga distribuida de H = 10 Kg/cm. Se pide hallar los diámetros de los pasadores en A, B y C. Tomar $S_y' = 900\ Kg/cm^2$



3.23. La plataforma de la figura esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y dos cables. Para una carga horizontal en su extremo derecho de P = 100 Kg, se pide hallar el diámetro del pasador en O. Tomar $S_y' = 900\ Kg/cm^2$

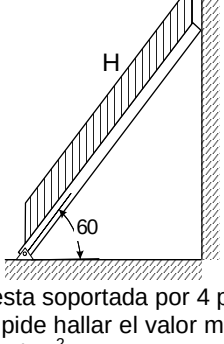


3.24. Que fuerza se necesita para troquelar una pieza de sección cuadrada de 6 cm de lado y 0,3 cm de alto. Tomar $S_y' = 1500\ Kg/cm^2$



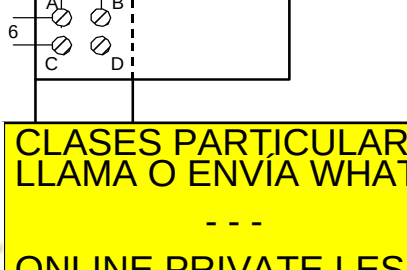
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



3.26. La plataforma de la figura esta soportada por 4 pasadores de diámetro de 1,5 cm y en ella actúa una fuerza P. Se pide hallar el valor máximo de P que pueden soportar los pasadores. Tomar $S_y' = 900$ Kg/cm^2.

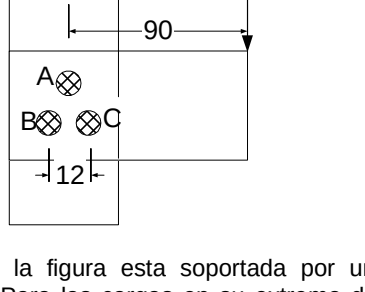
3.27. La plataforma de la figura esta soportada por 4 pasadores con un diámetro de 1 cm y en ella actúa una fuerza P = 2000 Kg Se pide el factor de seguridad en los pasadores. Tomar $S_y' = 1100$ Kg/cm^2



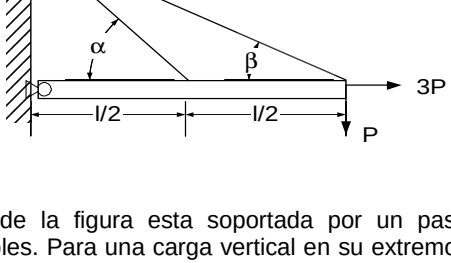
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

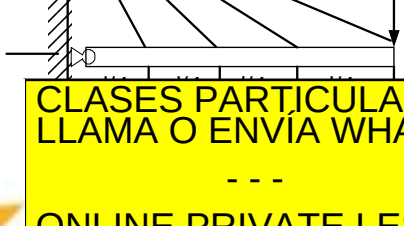
3.28. La plataforma de la figura esta soportada por 3 pasadores con un diámetro de 1 cm y en ella actúa una fuerza P = 400 Kg Se pide el factor de seguridad en los pasadores. Tomar $S_y' = 1100\ Kg/cm^2$.



3.29. La plataforma de la figura esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y dos cables. Para las cargas en su extremo derecho de P y 3P, se pide hallar el diámetro del pasador en O. Tomar $S_y' = 900\ Kg/cm^2$ y P = 1000 Kg



3.30. La plataforma de la figura esta soportada por un pasador en su extremo izquierdo y cuatro cables. Para una carga vertical en su extremo derecho de P= 1000 Kg, se pide hallar el diámetro del pasador en O. Tomar $S_y' = 900\ Kg/cm^2$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

4.- TORSIÓN

4.1.- INTRODUCCIÓN

Una pieza está sometida a cargas de torsión cuando sobre ella están aplicadas Pares o Momentos dirigidos a lo largo de su eje centroidal y perpendicularmente a la sección transversal (a-a).

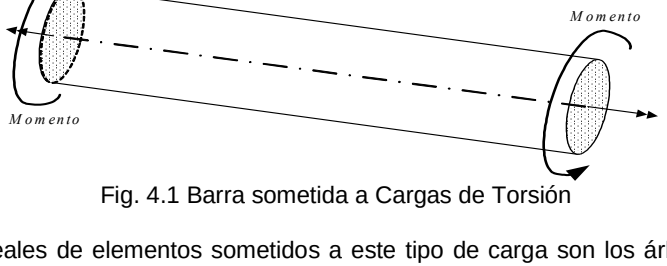


Fig. 4.1 Barra sometida a Cargas de Torsión

Ejemplos reales de elementos sometidos a este tipo de carga son los árboles y ejes que por lo general tienen movimiento giratorio

Para la validez de las ecuaciones y resultados de este capítulo se asume la veracidad de las siguientes condiciones :

1.- Los elementos son rectos
2.- Los elementos tienen secciones transversales uniformes
3.- Las dimensiones de la sección transversal son pequeños respecto a la longitud
4.- Las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje axial
5.- Las deformaciones son pequeñas comparadas con las dimensiones de la barra
6.- Los esfuerzos no sobrepasan los límites de fluencia.
7.- Las cargas se aplican en el eje de simetría de la sección transversal de la viga
8.- Las vigas son relativamente largas y angostas respecto a su peralte

4.2.- ESFUERZOS

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

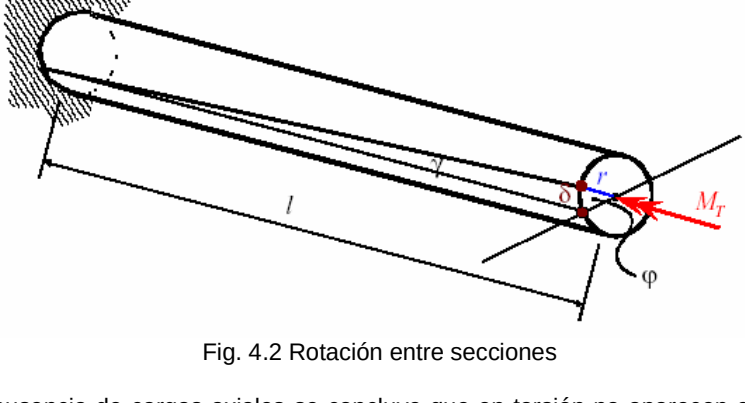


Fig. 4.2 Rotación entre secciones

Por la ausencia de cargas axiales se concluye que en torsión no aparecen esfuerzos normales sino únicamente tangenciales.

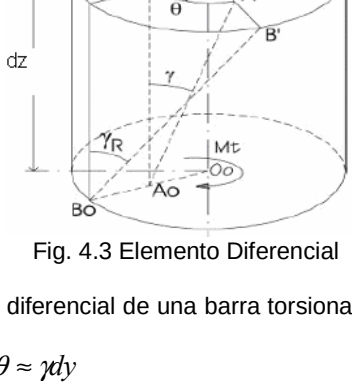


Fig. 4.3 Elemento Diferencial

Considérese un elemento diferencial de una barra torsionada. El ángulo que giran sus extremos es dθ. Además

$$AA' = rd\theta \approx \gamma dy \qquad (4.1$$

$$BB' = Rd\theta \approx \gamma_R dy \qquad (4.2$$

r

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\tau = G\gamma = G\gamma_R \frac{r}{R} = Gr\frac{d\theta}{dy} \qquad (4.4$$

Expresión que muestra que los esfuerzos tangenciales varían linealmente con el radio, alcanzando su valor máximo en el borde de la sección:

De la estática

$$Mt = \int_A \tau(r)dA = \int_A Gr\frac{d\theta}{dy}(r)dA = G\frac{d\theta}{dy}\int_A r^2 dA = G\frac{d\theta}{dy} I_o \qquad (4.5$$

De 4.4 y 4.5

$$\tau = \frac{M_t r}{I_o} \qquad (4.6$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t R}{I_o} \qquad (4.7$$

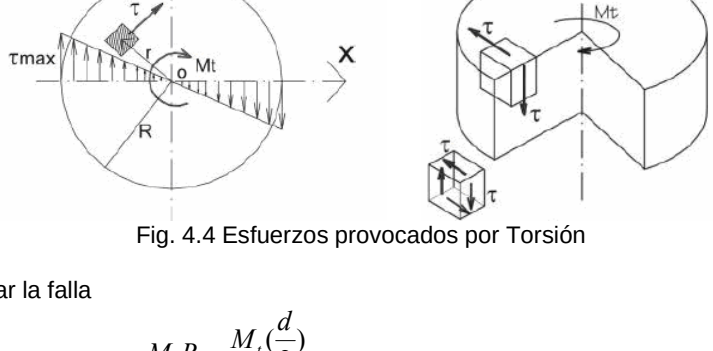


Fig. 4.4 Esfuerzos provocados por Torsión

Para evitar la falla

$$\tau_{\max} = \frac{M_t R}{I_o} = \frac{M_t(\frac{d}{2})}{\frac{\pi d^4}{32}_o} \le S_y' \qquad (4.8$$

De donde $$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi S_y'}} \qquad (4.9$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\theta = \int_l \frac{M_t}{GI_o} dy \qquad (4.10$$

4.4 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES PARA BARRAS CIRCULARES HUECAS

Las ecuaciones 4.7 y 4.10 son validas para barras circulares huecas con la inercia igual a :

$$I_o = \frac{\pi(d_2^{\,4} - d_1^{\,4})}{32} = \frac{\pi(r_2^{\,4} - r_1^{\,4})}{2} \qquad (4.11$$

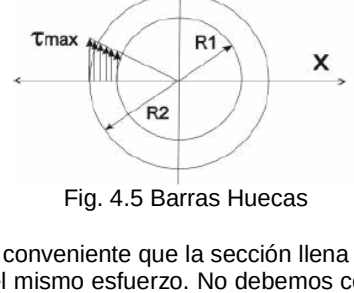
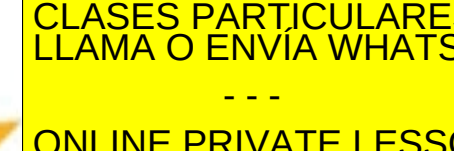


Fig. 4.5 Barras Huecas

La sección hueca es más conveniente que la sección llena ya que siempre se requiere menor área para resistir el mismo esfuerzo. No debemos confundir área con diámetro, ya que para igual resistencia el diámetro de la sección maciza será menor que el exterior de la hueca. Lo que importa es que aún con menor diámetro, la sección maciza es siempre más pesada y por ende más cara. Lo que concluimos recientemente se debe a que los esfuerzos desarrollados en la parte central de la sección maciza son muy pequeños y no tienen un aporte muy significativo, por lo que para resistir a la torsión las secciones más convenientes son las huecas.

4.5 SECCIÓN TUBULAR CERRADA DE PEQUEÑO ESPESOR



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Considérese una barra tubular de forma arbitraria. Si su espesor es muy delgado, en cualquier punto se puede suponer que los esfuerzos cortantes son constantes y que su dirección es tangente al contorno medio de la sección
La fuerza en un pequeño elemento tubular es

$$dF = \tau\, dA = \tau\, e\, ds \qquad (4.12$$

Si elegimos un punto cualquiera del plano de la sección y llamamos r a la distancia al mismo de la fuerza dF, el momento

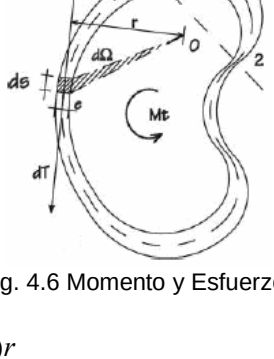
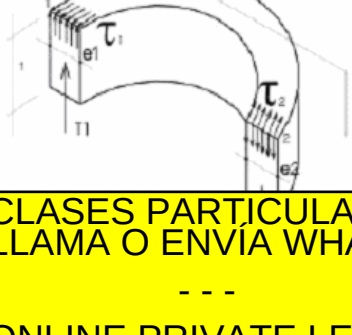


Fig. 4.6 Momento y Esfuerzos

$$Mt = \int_A (\tau e dS) r \qquad (4.13$$



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Si se aísla una porción tubular, en sus extremos se tienen esfuerzos cortantes tangenciales que originan a su vez esfuerzos cortantes axiales que por razones de equilibrio deben dar fuerzas axiales de igual magnitud

$$T_1 = \tau_1 e dz = \tau_1 e dz = T_2$$

$$\tau e = cte \qquad (4.14$$

$$Mt = \tau e \int_A rdS \qquad (4.15$$

$$rdS = 2dA \qquad (4.16$$

$$Mt = 2\tau e \int_A dA = 2\tau eA \qquad (4.17$$

$$\tau = \frac{M_t}{2eA} \qquad \textbf{(4.18}$$

A Área que encierra la línea media de la sección

4.6 SECCIÓN RECTANGULAR

La solución exacta pertenece a la Teoría de la Elasticidad. En la figura se muestran los esfuerzos tangenciales donde los máximos tienen lugar en el centro del lado mayor.

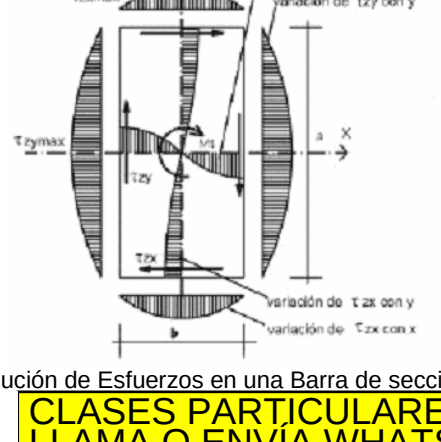


Fig. 4.7 Distribución de Esfuerzos en una Barra de sección Rectangular

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\tau_{zy\max} = \frac{M_t}{\alpha a b^2} \quad \textbf{(4.19}$$

$$\tau_{zx\max} = \gamma \tau_{zy\max} \quad \textbf{(4.20}$$

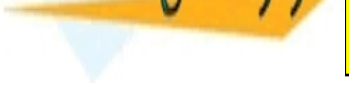
$$\theta = \frac{M_t}{\beta a b^3 G} \quad \textbf{(4.21}$$

a/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
γ	1.00	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

Tabla 4.1 Coeficientes de torsión rectangular

4.7 PROBLEMAS HIPERESTATICOS

Al igual que en la tracción, en torsión hay problemas que no pueden ser resueltos con las ecuaciones de equilibrio ya que el número de incógnitas es superior al de las ecuaciones. Estos se conocen como problemas hiperestaticos y para su solución se deben incluir ecuaciones adicionales de deformaciones.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1. Una pieza cilíndrica de Acero de diámetro ∅ = 3 cm y largo L=100 cm esta sometida en sus extremos a una carga de torsión de 1000 Kg cm. Se pide hallar :
a) Los esfuerzos máximos
b) El coeficiente de seguridad si la fluencia es $Sy' = 960\ Kg/cm^2$
c) Las deformadas total y unitaria longitudinal y transversal

Solución :

La inercia es $I = \pi \varnothing^4/32 = 7{,}95\ cm^4$

a) Esfuerzo máximo

$$\tau_{max} = M_t R/I_o = 1000(1{,}5)/7{,}95$$
$$\tau_{max} = 188{,}62\ Kg/cm^2$$

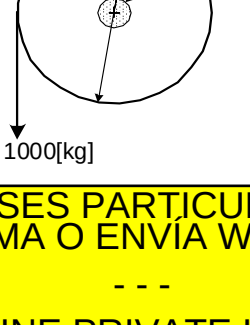
b) Coeficiente de seguridad

$$\eta = S`_y/\tau_{max} = 960/188{,}62 = 5{,}08$$
$$\eta = 5{,}08$$

c) Deformada $\theta = M_t l/(GI_o) = 1000(100)/(6{,}67 \times 105\ 7{,}95)$

$$\theta = 0{,}0188\ rad$$

4.2. Un tambor cuyo diámetro es 30 cm esta montado sobre un eje y debe levantar una carga de 1000 Kg Calcular el diámetro del eje. Tomar Sy`= 900 Kg/cm2



Solución :

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

De 4.9 $$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi S_y'}}$$

d = 4,39 cm

4.3. Un motor de 5 Hp esta acoplado por medio de una transmisión a un eje que gira a 30 rpm. Tomando un limite de fluencia de $S`_y$ = 900 Kg/cm^2 y η = 1,5 se pide calcular el diámetro del eje.

Solución:

La potencia Pot (CV) = M_t (Kg m) ω (rad/seg)/ 75

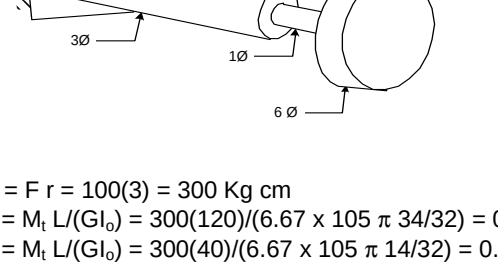
ω (rad/seg) = (30 rpm) (2π rad / rev) (min/60 s) = 3,14 rad/seg

El momento M_t = 5 (75)/3,14 = 119,36 Kg m = 11942,59 Kg cm

De 4.9 $$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi S_y'}}$$ = 4,66 cm

Se adopta d = 5 cm

4.4. En el sistema de la figura, se pide el ángulo de deformación del extremo libre respecto al empotramiento. El material es acero y las dimensiones están en cm



Solución:

M_t = F r = 100(3) = 300 Kg cm

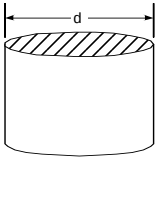
$\theta_1 = M_t L/(GI_o)$ = 300(120)/(6.67 x 105 π 34/32) = 0.00678 rad

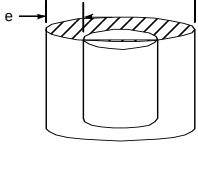
$\theta_2 = M_t L/(GI_o)$ = 300(40)/(6.67 x 105 π 14/32) = 0.182 rad

$\theta_{tot} = \theta_1 + \theta_2$ = 0.189 rad

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





Solución:

a) Los esfuerzos de corte deben ser menores a la fluencia

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{I_o} <= S_y'$$

$$\frac{T}{S_y'} <= \frac{I_o}{R}$$

En el cilindro sólido

$$\frac{T}{S_y'} <= \frac{\pi d^4}{32}\frac{2}{d} \qquad \text{(i}$$

En el cilindro hueco

$$\frac{T}{S_y'} <= \frac{\pi\left[D^4 - (D-2e)^4\right]}{32}\frac{2}{D} \qquad \text{(ii}$$

Ya que ambos tienen la misma carga y el mismo material. Igualando i y ii

$$\frac{d^4}{d} = \frac{\left[D^4 - (D-2e)^4\right]}{D}$$

$$d = \left[\frac{\left[D^4 - (D-2e)^4\right]}{D}\right]^{1/3} \qquad \text{(iii}$$

La masa del cilindro hueco es

$$M_h = \rho\frac{\pi}{4}\left[D^2 - (D-2e)^2\right] \qquad \text{(iv}$$

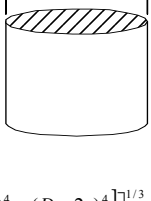
La masa del cilindro sólido

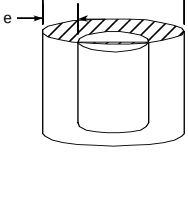
$$m = \rho\frac{\pi d^2}{4} = \rho\frac{\pi}{4}\left[\frac{\left[D^4 - (D-2e)^4\right]}{D}\right]^{2/3} \qquad \text{(v}$$

4.6 Halle el diámetro "d" y la masa "m" de un cilindro sólido que tenga la misma

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





Solución:

a)
$$d = \left[\frac{\left[D^4 - (D-2e)^4\right]}{D}\right]^{1/3}$$

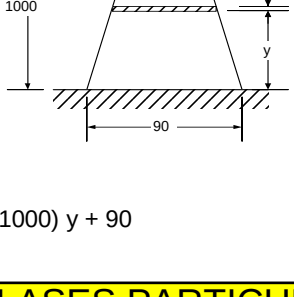
d = 3.6849 cm

b)
$$\frac{M_h}{M_s} = \frac{\left[D^2 - (D-2e)^2\right]}{d^2}$$

$(M_h/M_s) = 0.41536$

Este resultado indica que el diámetro del cilindro sólido es menor que el del hueco pero que la pieza hueca solo pesa el 41,64 % de la pieza sólida.

4.7. En el sistema de la figura se calcular
a) El esfuerzo cortante máximo
b) La deformada total



Solución:

El diámetro d(y) = - (30/1000) y + 90
y = 0 d = 90
v = 1000 d = 60

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

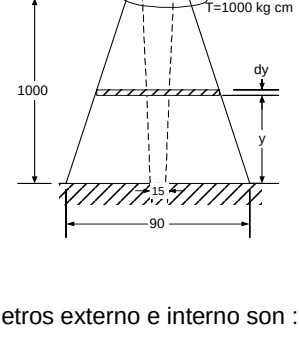
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

b) La deformada

$$\theta = \int_0^h \frac{M_t}{GI_o} dy = \int_0^{1000} \frac{1000(32)}{G\pi(-0{,}03y + 90)^4} dy$$

θ = 0.368717 /G

4.8. En el sistema de la figura se pide calcular
a) El esfuerzo cortante máximo
b) La deformada total



Solución :

Las ecuaciones de los diámetros externo e interno son :

D(y) = - (30/1000) y + 90
d(y) = (30/1000) y + 15

La inercia $$I_0 = \int_0^h \left[\left(-\frac{30}{1000} y + 90 \right)^4 - \left(\frac{30}{1000} y + 15 \right)^4 \right] \frac{\pi}{32} dy$$

a) El esfuerzo máximo se presenta en la menor inercia y = 1000

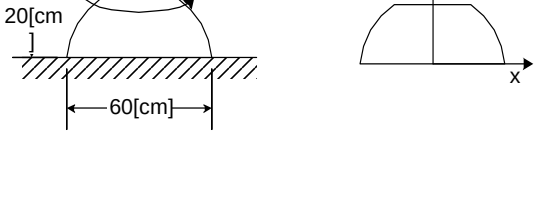
$I_{o\ min} = \pi (60^4 - 45^4)/32 = 869767.09\ cm^4$
$\tau_{max} = M_t R/I_o = (1000)(30)/ 869767.09$
$\tau_{max} = 0{,}0344\ Kg/cm^2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$\theta = 0{,}4145 / G$

4.9. La pieza de la figura tiene una forma semiesférica truncada, con un diámetro en la base de 60 cm y una altura de 20 cm. Para un momento torsor T aplicado en su parte superior, se pide la deformación angular.



Solución:

Definiendo un sistema de coordenadas en la base. La ecuación del círculo es:

$x^2+y^2 = 30^2$

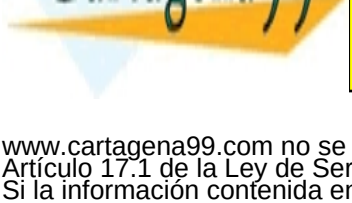
El diámetro $d = 2x = 2\sqrt{(30^2 - y^2)}$

$$\theta = \int_0^{20} \frac{T32dy}{G\pi\left[2(30^2 - y^2)^{1/2}\right]^4} = \frac{T2}{G\pi}\int_0^{20} \frac{dy}{(30^2 - y^2)^2}$$

$$\theta = \int_0^{h} \frac{M_t}{GI_o}dy = \int_0^{20} \frac{M_t(32)}{G\pi\left[2\sqrt{(30^2 - y^2)}\right]^4}dy$$

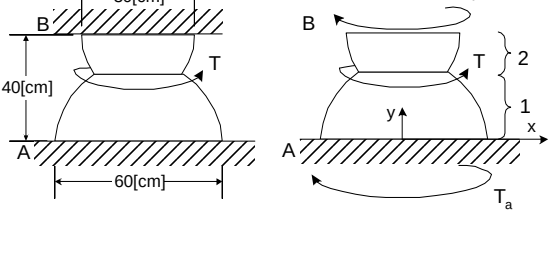
$\theta = 2{,}3634\ 10\text{-}5\ M_t / G$

4.10. La pieza de la figura esta formada por dos semiesferas truncadas con diámetros de 60 y 30 cm en sus bases. Para un momento torsor T aplicado en la sección común, se pide hallar los momentos de reacción en A y B



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución:

$\Sigma M = 0\ T_a + T_b = T$ (i

Sistema hiperestatico con una ecuación y dos incógnitas. La ec de deformadas

$$\theta_t = \theta_1 + \theta_2 = 0$$

Con el sistema de coordenadas en la base, las ec de los círculos y diámetros son:

$$x^2 + y^2 = 30^2$$
$$x^2 + (y - 40)^2 = 15^2$$
$$d_1 = 2x = 2(30^2 - y^2)^{1/2}$$
$$d_2 = 2x = 2[15^2 - (y-40)^2]^{1/2}$$

Los diámetros se igualan cuando

$$d_1 = 2(30^2 - y^2)^{1/2} = d_2 = 2[15^2 - (y-40)^2]^{1/2}$$
$$y = 28{,}43$$

$$\theta_1 = \int_0^{28{,}43} \frac{T_a\, 32\, dy}{G\pi\left[2(30^2 - y^2)^{1/2}\right]^4} = \frac{T_a(1.309)10^{-4}}{G}$$

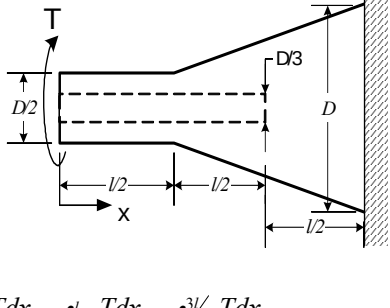
$$\theta_2 = \int_{28{,}43}^{40} \frac{(T_a - T)32 dy}{G\pi\left[2(15^2 - (y-40)^2)^{1/2}\right]^4} = \frac{(T_a - T)(2.761)10^{-4}}{G}$$

$$\theta_T = \frac{T_a(1.309)10^{-4}}{G} + \frac{(T_a - T)(2.761)10^{-4}}{G} = 0$$

De donde $T_a = 0{,}678\ T$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución:

$$\theta = \int_0^{l/2} \frac{Tdx}{GI_{o1}} + \int_{l/2}^{l} \frac{Tdx}{GI_{o2}} + \int_{l}^{3l/2} \frac{Tdx}{GI_{o3}} \qquad \text{(i}$$

$0 < x < l/2$ $\quad \varnothing_{ext} = D/2$

$\varnothing_{int} = D/3$

$$I_{o1} = \frac{\pi\left[(D/2)^4 - (D/3)^4\right]}{32} \qquad \text{(ii}$$

$l/2<x<l$ $\quad \varnothing_{ext} = (D/2)\,(x/l) + D/4$

$\varnothing_{int} = D/3$

$$I_{o2} = \frac{\pi\left\{\left[\frac{Dx}{2l} + \frac{D}{4}\right]^4 - \left(\frac{D}{3}\right)^4\right\}}{32} \qquad \text{(iii}$$

$l < x < 3l/2$ $\quad \varnothing_{ext} = (D/2)\,(x/l) + D/4$

$\varnothing_{int} = 0$

$$I_{o3} = \frac{\pi\left[\frac{Dx}{2l} + \frac{D}{4}\right]^4}{32} \qquad \text{(IV}$$

$$\theta = \frac{T32}{G\pi D^4}\left[\int_0^{l/2} \frac{dx}{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^4} + \int_{l/2}^{l} \frac{dx}{\left(\frac{x}{2l} + \frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^4} + \int_{l}^{3l/2} \frac{dx}{\left(\frac{x}{2l} + \frac{1}{4}\right)^4}\right]$$

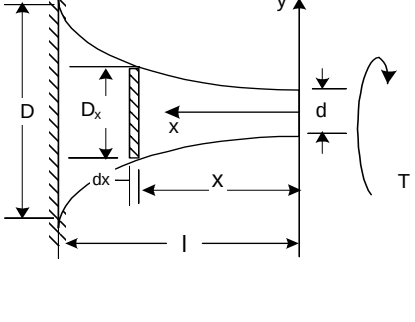
Reemplazando (V

$\theta = 0.51\ T/G$

4.12. Hallar una expresión para determinar la deformación que sufre una barra con

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución:

La variación del diámetro en función de x es cuadrática

$$D = Ax^2 + B$$

para x = 0 D = d
x = l D = D

resolviendo

$$D_x = \left(\frac{D-d}{l^2}\right)\cdot x^2 + d$$

$$\theta = \int_0^l \frac{T\cdot dx}{G\cdot I_o}$$

$$\theta = \int_0^l \frac{T32dx}{G\cdot\pi\left[(\frac{D-d}{l^2})x^2 + d\right]^4}$$

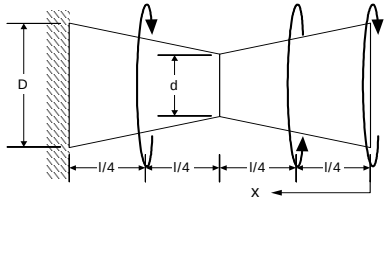
$$\theta = \frac{Tl}{G\pi}\left\{\frac{10A\tan\left[\frac{(D-d)}{\sqrt{d(D-d)}}\right]}{d^3\sqrt{d(D-d)}} + \frac{10}{d^3D} + \frac{20}{3d^2D^2} + \frac{16}{3dD^3}\right\}$$

$$\theta = \int_0^l \frac{T\cdot dx}{G\cdot I_o} = \int_0^l \frac{T32dx}{G\cdot\pi\left[(\frac{D-d}{l^m})x^m + d\right]^4}$$

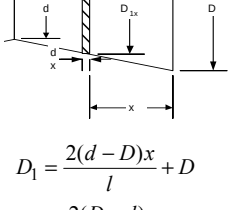
4.13. Determinar la deformación angular de la pieza de sección circular, sometida a

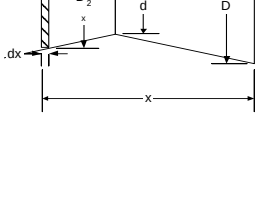
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución:





$$D_1 = \frac{2(d-D)x}{l} + D$$

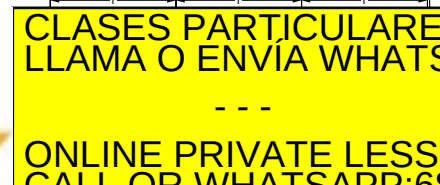
$$D_2 = \frac{2(D-d)x}{l} - D + 2d$$

$$\theta = \int_0^{l/4} \frac{M_t 32}{G\pi D_1^{\,4}}dx + \int_{l/4}^{l/2} -\frac{M_t 32}{G\pi D_1^{\,4}}dx + \int_{l/2}^{3l/4} -\frac{M_t 32}{G\pi D_2^{\,4}}dx + \int_0^{l/4} \frac{2M_t 32}{G\pi D_2^{\,4}}dx$$

$$\theta = \frac{M_t l}{G\pi}\left[\frac{16(7D^2+4Dd+d^2)}{3D^3(D+d)^3} - \frac{16(7D^2-32Dd+37d^2)}{3(D-2d)^3(D-3d)^3} - \frac{16(D^2+4Dd+7d^2)}{3d^3(D+d)^3} + \frac{32(7D^2+4Dd+d^2)}{3D^3(D+d)^3}\right]$$

θ = - 4.283 Mt/G

4.14. Calcular la deformación angular del eje circular de la figura. Tomar D = 20 cm; l = 50 cm G_{ac} = 7.64x105 kg/cm^2; G_{al} = 2.65x105 kg/cm^2; G_{cu} = 4.1x105kg/cm^2; Mt = 2000 Kg·cm



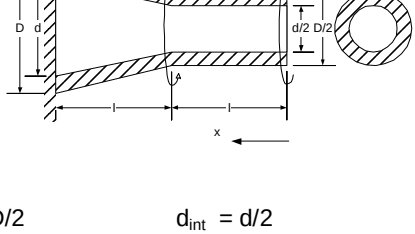
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\theta = \frac{M_t l}{\pi D^4}\left[\frac{2(32)(81)}{G_{cu}} + \frac{1(32)(16)}{G_{al}} + \frac{4(32)(1)}{G_{ac}}\right]$$

$\theta = 5.866 \times 10^{-5}$ rad

4.15. Hallar la deformación de la pieza troncocónica y cilíndrica hueca mostrada en la figura. Tomar D = 20cm, d = 5 cm, Mt = 8000 Kg·cm, G = 7.6x105 Kg/cm^2.



Solución:

0 < x < l $\quad D_{ext} = D/2 \quad d_{int} = d/2$

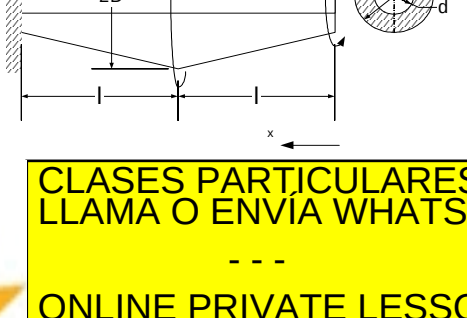
l < x < 2l $\quad D_{ext} = (Dx)/(2l) \quad d_{int} = (dx)/(2l)$

$$\theta = \int_0^l \frac{M_t 32}{G\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right]}dx - \int_l^{2l} \frac{M_t 32}{G\pi\left[\left(\frac{Dx}{2l}\right)^4 - \left(\frac{dx}{2l}\right)^4\right]}dx$$

Integrando

$\theta = 7.243 \times 10\text{-}4\ M_t/G$

4.16. Hallar la deformación angular del extremo derecho de la pieza mostrada en la figura. Evaluar el resultado cuando d = D/2 ;



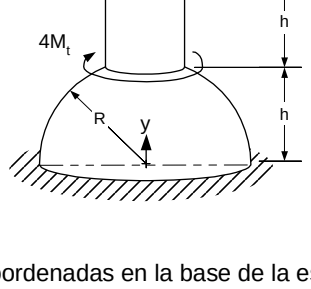
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\theta = \int_0^l \frac{M_{t1}32}{G\pi(D_1{}^4 - d^4)}dx + \int_l^{2l} \frac{M_{t2}32}{G\pi(D_2{}^4 - d^4)}dx$$

simplificando $$\theta = \frac{-9.195M_t l}{G\pi D^4}$$

4.17. Hallar la deformación angular del sistema. Tomar H=3R/4 y R=5 cm



Solución :

Definiendo un sistema de coordenadas en la base de la esfera

$x^2 + y^2 = R^2$

$$D_1(y) = 2x = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

Cuandoy = h = 3R/4 $D_1 = D_2$

$$D_2 = 2\sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{7}R/2$$

$$\theta = \int_0^{3R/4} \frac{3M_t 32}{G\pi D_1(y)^4}dy + \int_{3R/4}^{3R/2} \frac{-M_t 32}{G\pi D_2(y)^4}dy$$

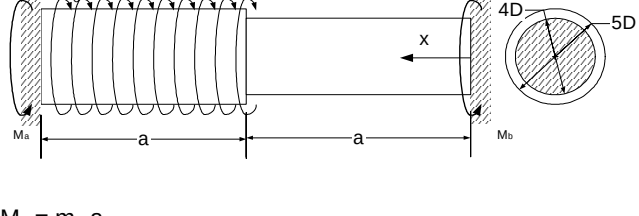
$$\theta = \int_0^{3R/4} \frac{3M_t 32}{G\pi 2^4 (R^2 - y^2)^2}dy + \int_{3R/4}^{3R/2} \frac{-M_t 32(16)}{G\pi 49R^4}dy$$

evaluando $$\theta = \frac{M_t}{G\pi}\left(\frac{3\ln 7}{2R^3} + \frac{36}{7R^3}\right) - \frac{M_t}{G\pi}\left(\frac{512}{49R^3}\frac{3}{4}\right)$$

4.18. Hallar las reacciones en los extremos empotrados del eje de sección circular mostrado en la figura. Tomar m0=10 kg·cm/cm, a = 100 cm y D = 2 cm.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

$\Sigma M = 0\, M_a + M_b = m_o\, a$

El sistema es hiperestatico con una ecuación y dos incógnitas. De las deformadas

$$\theta_{total} = \theta_1 + \theta_2 = 0$$

$$\theta = \int_0^a \frac{(M_a - m_o x)32}{G\pi(5D)^4}dx + \int_a^{2a} \frac{(M_a - m_o a)32}{G\pi(4D)^4}dx = 0$$

$$\frac{(M_a - m_o \frac{a}{2})}{(5)^4} + \frac{(M_a - m_o a)}{(4)^4} = 0$$

Entonces $M_a = 0.8547\ m_o a$

$M_b = 0.1452\ m_o a$

4.19. Hallar la longitud que debe tener un eje macizo de acero de d=13 mm de diámetro para que sus extremos giren 90º uno respecto del otro. No se debe rebasar un esfuerzo cortante permisible de $S_y' = 713.8$ kg/cm^2, y G = 8.1573x10^5 kg/cm^2.

Solución :

Las ecuaciones de deformación y esfuerzo

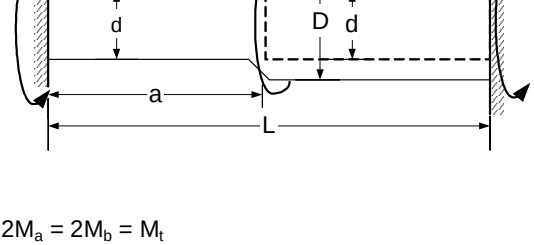
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

De ambas $$l = \frac{rG\theta}{\tau_{\max}}$$

l = 116.68 m

4.20. La barra de la figura tiene sección transversal circular sólida en el tramo AB, y sección transversal circular hueca en el tramo BC. Obtener la expresión de la relación a/L tal que los momentos de reacción en los apoyos sean iguales.



Solución :

$\Sigma M = 0\, M_a + M_b = 2M_a = 2M_b = M_t$ (i

El sistema es hiperestatico. La ecuación de deformación es :

$$\theta_{tot} = \theta_1 + \theta_2 = 0$$

$$\theta = \frac{M_a a 32}{G\pi d^4} + \frac{(M_a - M_t)(l-a)32}{G\pi(D^4 - d^4)} = 0$$

resolviendo $$M_a = \frac{d^4 M_t (l-a)}{(aD^4 - 2ad^4 + d^4 l)}$$ (ii

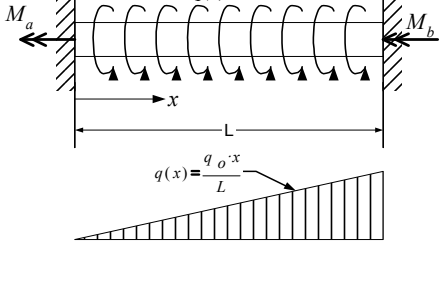
De i y ii $$\frac{2d^4 M_t (l-a)}{(aD^4 - 2ad^4 + d^4 l)} = M_t$$

$(a / l) = (d / D)^4$

4.21. La barra circular de la figura está empotrada en sus extremos. Sobre ella actúa un Par de Torsión distribuido q(x) en toda su longitud con intensidad cero en A y qo en B. Se piden los momentos de reacción M_a y M_b.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

$\Sigma M = 0\, M_a + M_b = M_t$ (i

El sistema es hiperestatico. La ecuación de deformación es :

$$\theta_{tot} = 0$$

$$\theta = \int_0^l \frac{[M_a - q(x)x]}{GI_o} dx = 0$$

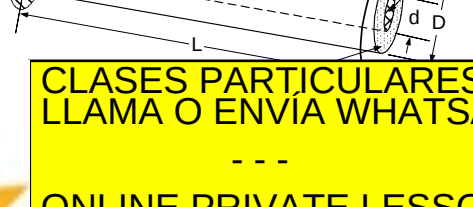
resolviendo con

$q(x) = q_o x/l$

$M_a = q_o\, l / 3$

$M_b = q_o\, l / 6$

4.22. Una pieza está conformada por dos materiales, la exterior de acero y la interior de latón. Si los diámetros externo e interno son 75 y 60 mm respectivamente y asumiendo los esfuerzos permisibles como τ_a = 82 Mpa y τ_l = 50 Mpa en el acero y latón respectivamente, se pide hallar el momento máximo de torsión que puede aplicarse a la pieza. (Ga=80 Gpa Gl= 36 Gpa)



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\frac{M_{laton} l32}{G\pi d^4} = \frac{M_{acero} l32}{G\pi (D^4 - d^4)}$$ (i

$M_{tot} = M_{laton} + M_{acero}$ (ii

$$M_{laton} = \frac{M_t G_{laton} d^4}{G_{acero} D^4 + G_{laton} d^4}$$

$$M_{acero} = \frac{M_t G_{acero} D^4}{G_{acero} D^4 + G_{laton} d^4}$$

Los esfuerzos permisibles par cada barra son:

$$\tau_{laton} = \frac{M_{laton}(d/2)32}{\pi d^4}$$

$$\tau_{acero} = \frac{M_{acero}(D/2)32}{\pi (D^4 - d^4)}$$

$$M_t = \frac{\tau_{acero}(G_{acero} D^4 + G_{laton} d^4)\pi (D^4 - d^4)}{16 G_{acero} D^5}$$

$$M_t = \frac{\tau_{laton}(G_{acero} D^4 + G_{laton} d^4)\pi}{16 G_{laton} d}$$

remplazando M_t = 4.749 x 103 Nm para el acero

M_t = 1.363 x 104 Nm para el latón

Luego M_t = 4.749 x 103 Nm

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

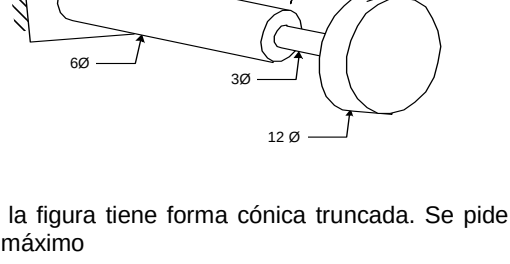
PROBLEMAS PROPUESTOS

4.23. Hallar el diámetro de una pieza cilíndrica de Acero con un largo de 100 cm para que pueda soportar un momento de 1000 Kg cm. Tomar Sy´= 960 Kg/cm^2, y η = 2. Hallar además la deformación.

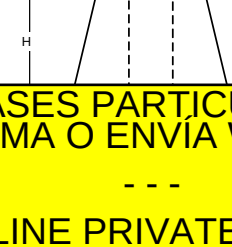
4.24. Un tambor de una maquina de elevación tiene un diámetro de 30 cm y se encuentra montado sobre un eje con un diámetro de 3 cm con Sy`= 900 Kg/cm^2. Se pide hallar el peso máximo que puede levantar.

4.25. Un eje gira a 120 rpm y esta acoplado a un motor de 9 Hp por medio de una transmisión. Si el material tiene una fluencia de S`y = 900 Kg/cm^2. Para η = 2 se pide calcular el diámetro del eje.

4.26. Hallar el ángulo de torsión del extremo libre respecto al extremo fijo del sistema de la figura. El material es acero y las dimensiones están en cm.

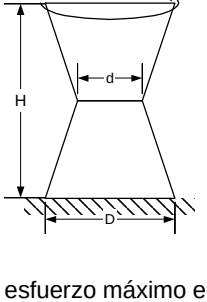


4.27. La pieza de la figura tiene forma cónica truncada. Se pide hallar la deformada total y el esfuerzo máximo

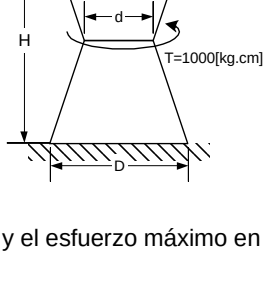


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

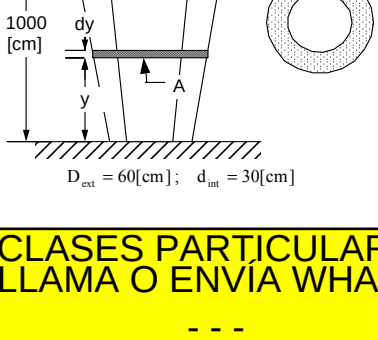
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



4.29. Hallar la deformada total y el esfuerzo máximo en el sistema de la figura

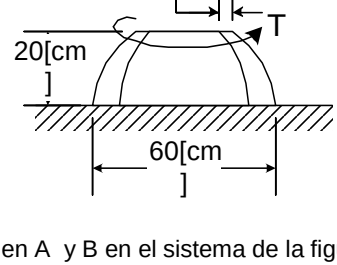


4.30. Hallar la deformada total y el esfuerzo máximo en el sistema de la figura

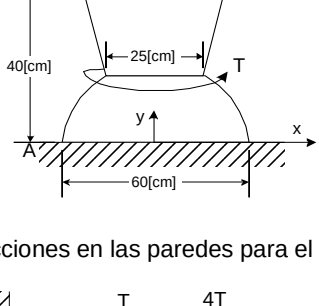


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

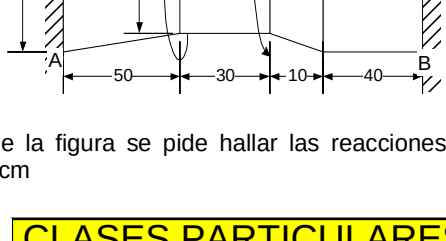
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



4.32. Hallar las reacciones en A y B en el sistema de la figura



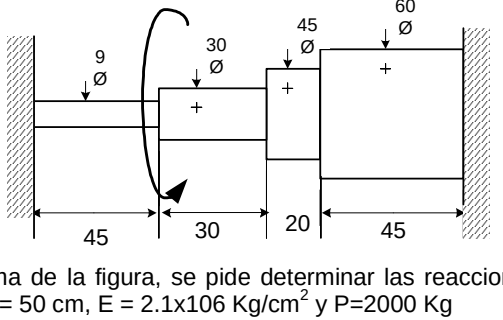
4.33. Se pide hallar las reacciones en las paredes para el sistema de la figura



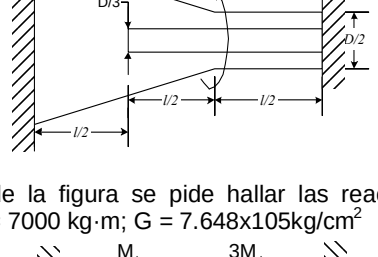
4.34. En el sistema de la figura se pide hallar las reacciones en las paredes. Las dimensiones están en cm

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

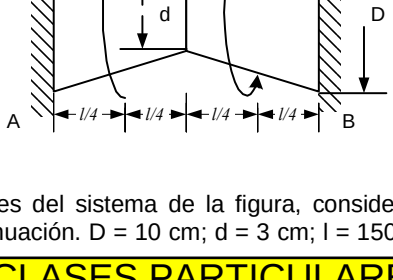
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



4.35. Para el sistema de la figura, se pide determinar las reacciones en los apoyos. Tomar D = 10 cm, l = 50 cm, E = 2.1x106 Kg/cm^2 y P=2000 Kg



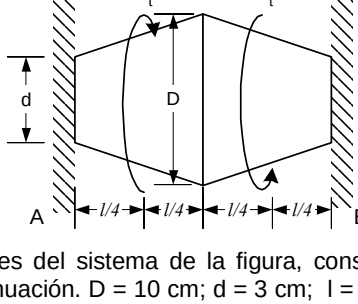
4.36. Para el sistema de la figura se pide hallar las reacciones. Tomar D=10cm; d=3cm; l = 150 cm; M_t = 7000 kg·m; G = 7.648x105kg/cm^2



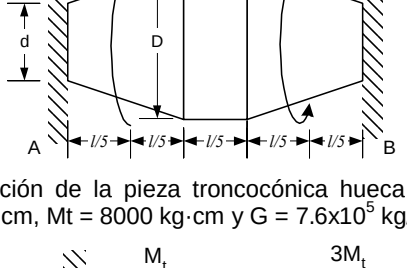
4.37. Hallar las reacciones del sistema de la figura, considerar para cada caso los valores indicados a continuación. D = 10 cm; d = 3 cm; l = 150 cm; M_t = 7000kg·m; G = 7.648x10^{5}kg/cm^2

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

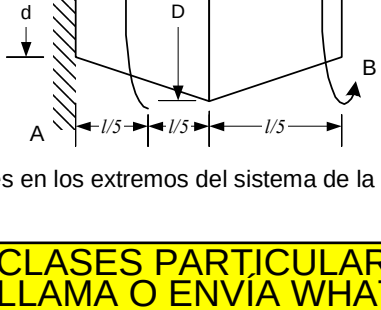
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



4.38. Hallar las reacciones del sistema de la figura, considerar para cada caso los valores indicados a continuación. D = 10 cm; d = 3 cm; l = 150 cm; M_t = 7000kg·m; G = 7.648x10^5 kg/cm^2



4.39. Hallar la deformación de la pieza troncocónica hueca mostrada en la figura. Tomar D = 20 cm, d = 5 cm, Mt = 8000 kg·cm y G = 7.6x10^5 kg/cm^2



4.40. Hallar las reacciones en los extremos del sistema de la figura.

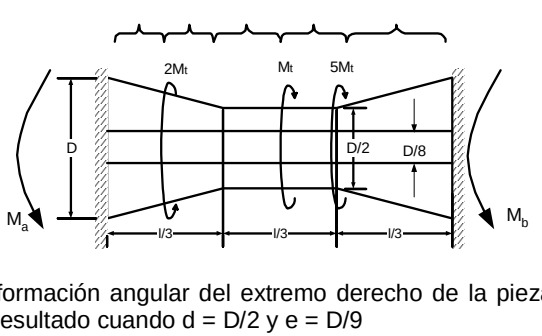
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

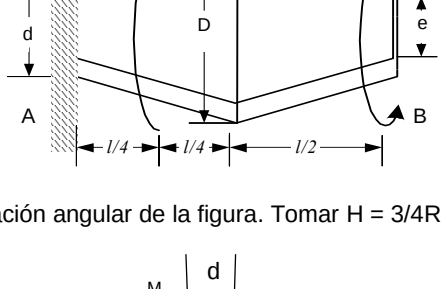
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

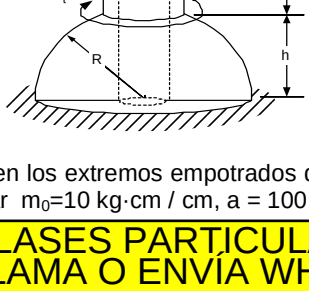
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



4.41. Hallar la deformación angular del extremo derecho de la pieza mostrada en la figura. Evaluar el resultado cuando d = D/2 y e = D/9



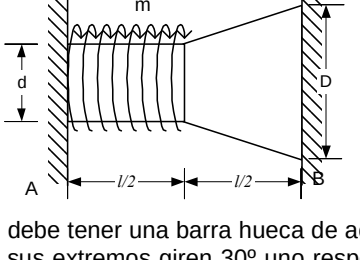
4.42.Hallar la deformación angular de la figura. Tomar H = 3/4R, R = 15 cm y d = 3



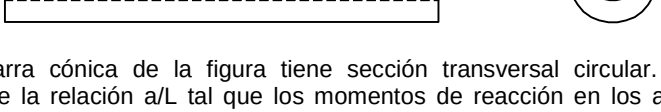
4.43. Hallar las reacciones en los extremos empotrados del bloque de sección circular mostrado en la figura. Tomar m_0=10 kg·cm / cm, a = 100 cm y D = 2 cm.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

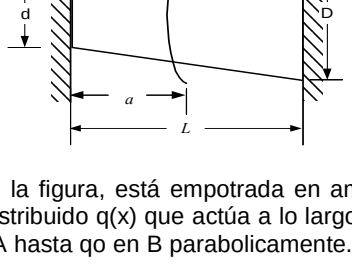
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



4.44. Hallar la longitud que debe tener una barra hueca de acero de D=1.5 cm y d=0.5 cm de diámetros para que sus extremos giren 30º uno respecto del otro. No se debe rebasar un esfuerzo cortante permisible de 713.8 kg/cm^2, y G = 8.1573x10^5 kg/cm^2.



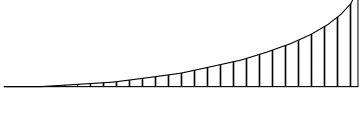
4.45. La barra cónica de la figura tiene sección transversal circular. Obtener la expresión de la relación a/L tal que los momentos de reacción en los apoyos sean iguales.



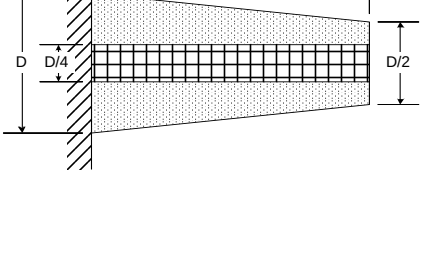
4.46. La barra circular. de la figura, está empotrada en ambos extremos. Sobre ella actúa un par de Torsión distribuido q(x) que actúa a lo largo de su longitud, y varía de intensidad desde cero en A hasta qo en B parabolicamente. Calcular los momentos de reacción M_a y M_b.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



4.47. Un cono macizo está constituida por dos materiales, uno exterior, de acero y otro interior cilíndrico de latón, como se muestra en la figura. Si se supone que los esfuerzos permisibles son τ_a = 82 Mpa y τ_l = 50 Mpa en el acero y latón respectivamente, determinar el momento máximo de torsión permisible que puede aplicarse a la barra. (G_a = 80 Gpa G_l = 36 Gpa) D = 15 cm



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

5.- FLEXIÓN
Fuerza Cortante y Momento Flector

5.1.- INTRODUCCIÓN

Un elemento está sometido a cargas de flexión cuando soporta fuerzas y momentos externos con dirección perpendicular a la de su eje centroidal

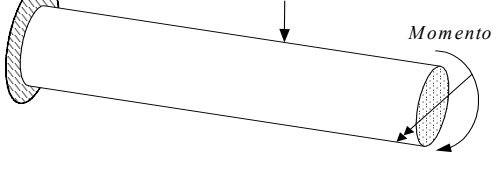


Fig. 5.1 Viga sometida a cargas de flexión

Los elementos sometidos a flexión se denominan vigas y los puentes, pasarelas y losas son ejemplos reales de este tipo de solicitación

Para la validez de las ecuaciones y resultados de este capítulo se asume la veracidad de las siguientes condiciones:

1.- Los elementos son rectos
2.- Los elementos tienen secciones transversales uniformes
3.- Las dimensiones de la sección transversal son pequeños respecto a la longitud
4.- Las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje axial
5.- Las deformaciones son pequeñas comparadas con las dimensiones de la viga
6.- Los esfuerzos no sobrepasan los límites de fluencia.
7.- El modulo de Young es el mismo para tracción y compresión.
8.- Las cargas se aplican en el eje de simetría de la sección transversal de la viga
9.- Las cargas y las reacciones en los apoyos actúan perpendicularmente al eje de la viga.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Fig. 5.2 Cargas Puntuales y Distribuidas

5.2.1.- Cargas Puntuales
Una carga es puntual cuando actúan en un punto. Estas cargas son ideales sin embargo las cargas aplicadas en áreas pequeñas pueden suponerse como puntuales. Así, las reacciones en las llantas de los vehículos automotores; las fuerzas que soportan los miembros de las estructuras metálicas, las fuerzas que soportan los cables se pueden idealizar como puntuales

5.2.2.- Cargas Distribuidas
Una carga es distribuida cuando actúan en áreas no muy pequeñas. La fuerza del viento, el peso, la presión que los líquidos ejercen sobre superficies sumergidas, etc., son ejemplos de cargas distribuidas.

5.2.3.-.- Cargas equivalentes
Las cargas distribuidas que soportan las vigas, frecuentemente deben ser reemplazadas por otras puntuales denominadas equivalentes de modo que produzcan idénticos efectos en los extremos de la viga.

Considérese una viga que soporta el “peso” de un material distribuido

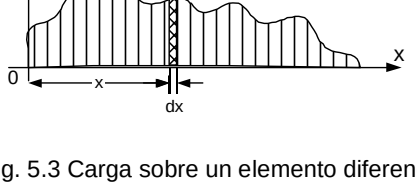


Fig. 5.3 Carga sobre un elemento diferencial

En un elemento infinitesimal se puede suponer la altura constante h(x) y su peso es :

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

dz es la profundidad de la viga

Llamando $p(x) = \gamma\, h(x)\, dz$

Integrando $$P_{eq} = \int_0^l p(x)dx = Area$$ **(5.2**

El momento en el extremo izquierdo originado por la carga distribuida sobre un elemento diferencial es :

$$dM_o = dw\,(x)$$ (5.3

Integrando $$M_o = \int_0^l p(x)xdx = P_{eq}X_{eq}$$ (5.4

Ya que los momentos en los extremos de la viga originados por la carga puntual equivalente y por la carga distribuida deben ser iguales.

$$X_{eq} = \frac{\int_0^l p(x)xdx}{\int_0^l p(x)dx} = \bar{X}$$ **(5.5**

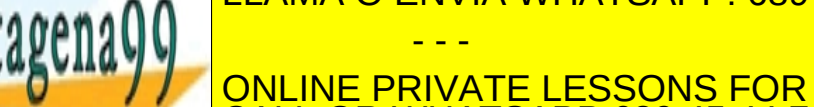
De 5.2 y 5.5 se concluye que :

- La magnitud de la carga puntual equivalente es el área de la carga distribuida
- La ubicación de la carga puntual equivalente es el centro de gravedad de la carga distribuida

5.3.- REACCIONES EN APOYOS

5.3.1.- Tipos de Apoyos

Los apoyos sobre los que se apoyan las vigas se clasifican en : a) Apoyo móvil, b) Apoyo fijo y c) Empotramiento



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

a) Apoyo Móvil.- Es un apoyo que restringe el movimiento vertical pero no el horizontal ni el de rotación. Este tipo de apoyo ejerce solo reacciones verticales. Un rodillo es un ejemplo de este tipo de apoyo.

b) Apoyo Fijo.- Es un apoyo que restringe los movimientos vertical y horizontal pero no el de rotación. Este tipo de apoyo ejerce reacciones verticales y horizontales. Una bisagra es un ejemplo de un apoyo fijo.

c) Empotramiento.- Es un apoyo que restringe los movimientos vertical, horizontal y de rotación. El apoyo ejerce reacciones verticales, horizontales y momentos.

5.3.2.- Tipos de Vigas

Las vigas pueden clasificarse en función a sus apoyos en:

a) Simplemente apoyada.- Cuando la viga descansa sobre un apoyo móvil y otro fijo.
b) Simplemente empotrada.- Es aquella que tiene uno de sus extremos empotrado.
c) Con apoyos múltiples.- Las vigas que tenga mas de un apoyo fijo y otro móvil o un empotramiento, tiene apoyos múltiples y su cálculo es hiperestatico.

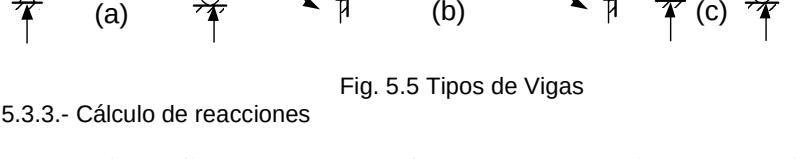


Fig. 5.5 Tipos de Vigas

5.3.3.- Cálculo de reacciones

Las reacciones (fuerzas y momentos) que aparecen en los apoyos sobre los que descansa una viga, se calculan con las ecuaciones de la estática.

$$\sum \vec{M} = 0 \qquad \sum \vec{F} = 0 \tag{5.6}$$

Para el cálculo de las reacciones las cargas distribuidas previamente deben ser reemplazadas por sus cargas puntuales equivalentes. Las vigas con múltiples apoyos son hiperestaticas y serán analizadas posteriormente.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

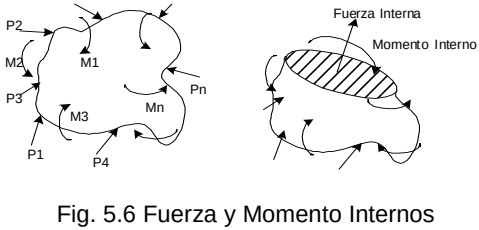


Fig. 5.6 Fuerza y Momento Internos

La fuerza y el momento internos pueden descomponerse en una componente tangencial o paralela a la sección y en otra normal o perpendicular a ella. Las componentes tangenciales de la fuerza y del momento, son respectivamente la fuerza cortante y el momento flector.

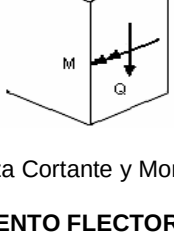


Fig. 5.7 Fuerza Cortante y Momento Flector

5.5.- RELACIÓN ENTRE EL MOMENTO FLECTOR Y LA FUERZA CORTANTE

En un elemento diferencial de viga la carga puede ser considerada constante. Adoptando las direcciones de la figura para el momento flector y la fuerza cortante.

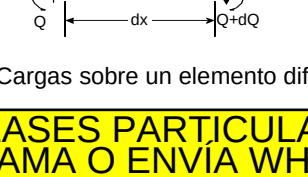


Fig. 5.8 Cargas sobre un elemento diferencial

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Σ Mder = 0 $\quad M - P_{eq}\, dx/2 + Q\, dx - (M+dM) = 0$ (5.9

$M - (p\, dx)dx/2 + Q\, dx - M - dM=0$ (5.10

$dM/dx= Q$ **(5.11**

De 5.8 y 5.11 **$d^2M /dx^2 = -p$** **(5.12**

Resumiendo, la función de la fuerza cortante es igual a la derivada de la función del momento flector y la función de la carga es igual a la derivada de la función de la fuerza cortante.

5.6.- CALCULO DEL MOMENTO FLECTOR Y LA FUERZA CORTANTE

Para el cálculo del Momento Flector y la Fuerza Cortante se emplean generalmente dos métodos: El cálculo estático y el cálculo por integración.

5.6.1.- Calculo estático

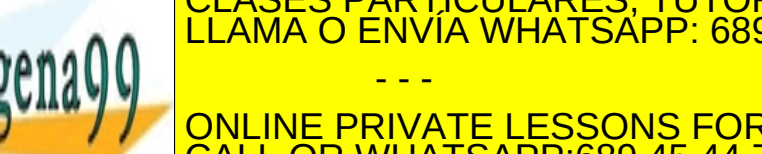
Con este método se realizan cortes imaginarios en la viga. El momento flector y la fuerza de corte se hallan aplicando las ecuaciones de la estática

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \sum \vec{M} = 0 \qquad \text{(5.13}$$

5.6.2.- Cálculo por integración

Con este método el momento flector y la fuerza cortante se calculan aplicando las ecuaciones 5.8, 5.11 y 5.12.,Así integrando una vez la función de la carga se obtiene la función de la Fuerza Cortante e integrando dos veces la función de la carga se obtiene la función del Momento Flector.

Las integraciones originan constantes que deben hallarse con las condiciones de borde, mismas que se describen a continuación



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

En la figura derecha si $x \to l$, $P_{eq} \to 0$ y de la estática $Q = - R_v$ y $M = - M_r$

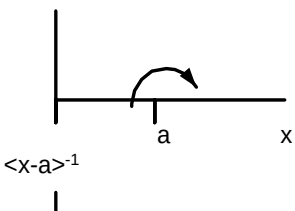
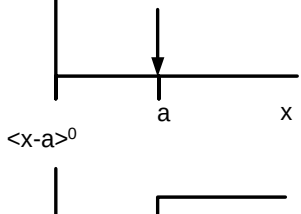
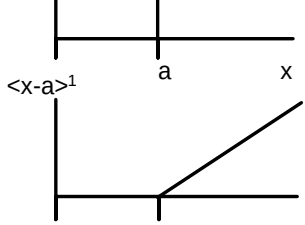
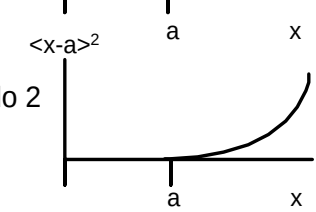
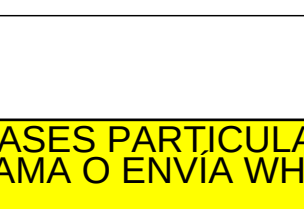
a) Extremo izquierdo empotrado	$Q = R_y$ y $M = - M_r$	(5.15
b) Extremo derecho libre	$Q = 0$ y $M = 0$	(5.16
c) Extremo derecho empotrado	$Q = - R_y$ y $M = - M_r$	(5.17
d) Extremo izquierdo libre	$Q = 0$ y $M = 0$	(5.18
e) Extremo izquierdo con apoyo fijo o móvil	$Q = R_y$ y $M = 0$	(5.19
f) Extremo derecho con apoyo fijo o móvil	$Q = - R_y$ y $M = 0$	(5.20

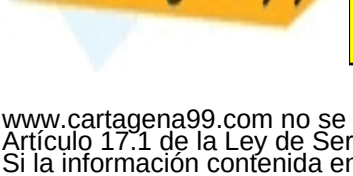
5.6.3.- Funciones de Singularidad

Las funciones de singularidad se emplean para integrar cargas puntuales

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Funcion	Forma	Valor
Momento Puntual		<x-a>$^{-2}$ = 1 si x=a <x-a>$^{-2}$ = 0 si x<>a $\int_{\infty}^{x}$ <x-a>$^{-2}$dx = <x-a>$^{-1}$
Fuerza Puntual		<x-a>$^{-1}$ = 1 si x=a <x-a>$^{-1}$ = 0 si x<>a $\int_{\infty}^{x}$ <x-a>$^{-1}$dx = <x-a>^{0}
Carga Constante		<x-a>^{0} = 0 si x<a <x-a>^{0} = 1 si x>=a $\int_{\infty}^{x}$ <x-a>^{0}dx = <x-a>^{1}
Carga Lineal		<x-a>^{1}= 0 si x<a <x-a>^{1}= (x-a) si x>=a $\int_{\infty}^{x}$ <x-a>^{1}dx = <x-a>^{2}/2
Parabola de Grado 2		<x-a>^{2} = 0 si x<a <x-a>^{2} = (x-a)^{2} si x>=a $\int_{\infty}^{x}$ <x-a>^{2}dx = <x-a>^{3}/3



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1. Hallar la fuerza puntual equivalente y su ubicación de la carga distribuida cuya función es $p(x)= H(x/l)^n$.

Solución:

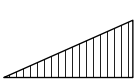
$$P_{eq} = W = \int_0^l H\left(\frac{x}{l}\right)^n dx = H\frac{l^{(n+1)}}{(n+1)l^n} = H\frac{l}{(n+1)}$$

$$X_{eq} = \frac{\int_0^l H\left(\frac{x}{l}\right)^n x dx}{H\frac{l}{(n+1)}} = \frac{H\frac{l^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H\frac{l}{(n+1)}} = \frac{(n+1)l}{(n+2)}$$

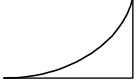
5.2. Analizar los resultados del 5.1, para diferentes valores de n

Solución :

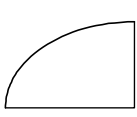
Cuando n = 0 carga constante



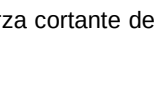
Cuando n = 1 carga triangular



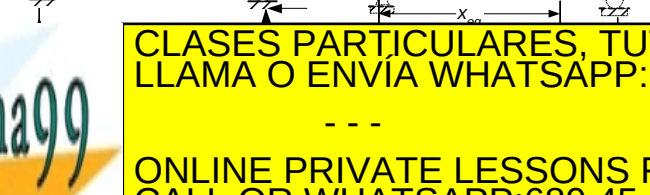
Cuando n = 2 carga parabolica



Cuando 0<n<1 carga parabolica inv



5.3. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una carga triangular en una viga simplemente apoyada.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

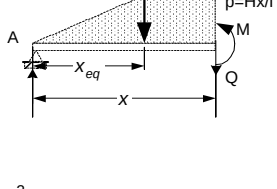
$\Sigma MA = 0$ $\quad P_{eq}\, x_{eq} - R_B\, l = 0$

$R_B = Hl/3$

$\Sigma MB = 0$ $\quad R_A\, l - P_{eq}\,(l - x_{eq}) = 0$

$R_A = Hl/6$

método de cortes



La carga equivalente

P_{eq} = Área = $Hx^2/2l$

x_{eq} = CG = $2x/3$

Σ Mcorte = 0 $\quad R_A\, x - P_{eq}\,(x - x_{eq}) - M = 0$

$M = (Hl/6)x - (Hx^2/2l)(x/3)$

$M = Hlx(1 - x^2/l2)/6$ (i

$\Sigma Fy = 0$ $\quad R_A - P_{eq} - Q = 0$

$Q = Hl/6 - Hx^2/2l$

$Q = H\,(l/6 - x^2/2l)$ (ii

b) método de la doble integración

$p = Hx/l$

Integrando $\quad Q = -Hx^2/2l + c1$

$M = -Hx^3/6l + c1\, x + c2$

Las condiciones de borde

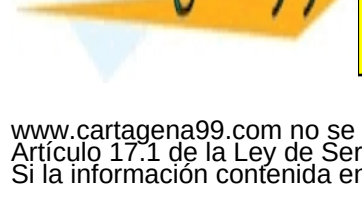
$x = 0$ $M = 0$ $\quad c^2 = 0$

$x = l$ $M = 0$ $\quad 0 = -Hl2/6 + c1l$

$c1 = Hl/6$

de donde $\quad Q = -Hx^2/2l + Hl/6$ (iii

$M = -Hx^3/6l + Hlx/6$ (iv



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Integrando y aplicando las propiedades de las funciones de singularidad

$$Q= Hl/6\langle x\rangle^0 - (H/2l)\langle x\rangle^2+(Hl/3)\langle x-l\rangle^0$$
$$M= (Hl/6)\langle x\rangle^1 - (H/6l)\langle x\rangle^3+(Hl/3)\langle x-l\rangle^1$$

Cuando $0 < x < l$

$\langle x\rangle^1 = x$

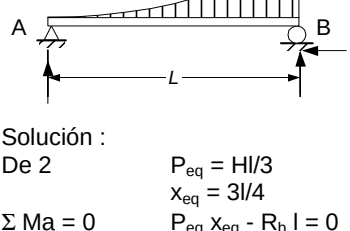
$\langle x\rangle^3 = x$

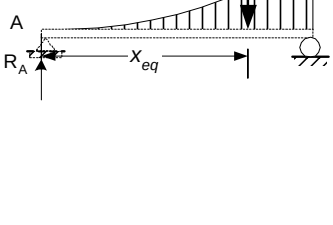
$\langle x-l\rangle^1 = 0$

$$Q= Hl/6 - (Hx^2/2l) \quad \text{(v}$$
$$M=Hlx/6 - Hx^3/6l \quad \text{(vi}$$

Los resultados son idénticos por todos los métodos

5.4. Hallar las funciones de Momento Flector y Fuerza Cortante del sistema de la figura





Solución :

De 2	$P_{eq} = Hl/3$	
	$x_{eq} = 3l/4$	
Σ Ma = 0	$P_{eq}\, x_{eq} - R_b\, l = 0$	
	$R^b = (Hl/3)(3l/4)/l$	
	$R^b = Hl/4$	
Σ Mb = 0	$R_a\, l - P_{eq}\, (l - xeq) =0$	
	$R_a = (Hl/3)(l - 3l/4)/l$	
	$R_a = Hl/12$	
Prueba	$R_a + R_b = Hl/4 + Hl/12 = 4HL/12 = Hl/3 = P_{eq}$	OK

a) método de cortes

Peq

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

La carga equivalente

$$P_{eq} = W = \int_0^x H\left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = H\frac{x^3}{3l^2}$$

$$X_{eq} = \frac{\int_0^x H\left(\frac{x}{l}\right)^2 x dx}{H\frac{x^3}{3l^2}} = \frac{H\frac{x^4}{4l^2}}{H\frac{x^3}{3l^2}} = \frac{3x}{4}$$

Σ Fy = 0 $\quad R_a - P_{eq} - Q = 0$

$Q = R_a - P_{eq} = Hl/12 - Hx^3/3l^2$ (i

Σ Mcorte = 0 $\quad R_a\, x - P_{eq}\,(x - x_{eq}) - M = 0$

$M = (Hl/12)x - (Hx^3/3l^2)(x/4)$

$M = Hlx/12 - (Hx^4/12l^2)$ (ii

Prueba :

x = 0	$Q = Hl/12 = Ra$	Ok
x = l	$Q = Hl/12 - Hl/3 = -3Hl/12 = -Hl/4 = -R_b$	Ok
x = 0	$M = 0$	Ok
x = l	$M = Hl^2/12 - (Hl/3)(l/4) = 0$	Ok

Finalmente $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{Hl}{12} - \frac{Hx^3}{3l^2} = Q$ Ok

b) método de la doble integración

$p = H(x/l)^2$

Integrando $\quad Q = -Hx^3/3l^2 + c1$

Integrando $\quad M = -Hx^4/12l^2 + c1x + c2$

x = 0 M = 0 $\quad 0 = c2$

x = l M = 0 $\quad 0 = -Hl^2/12 + c1l$

$c1 = Hl/12$

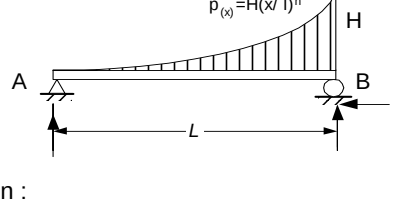
De donde $\quad Q = -Hx^3/3l^2 + Hl/12$ (iii

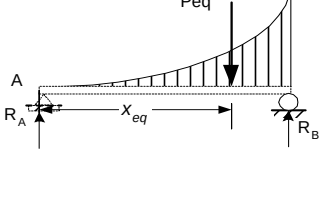
$M = -Hx^4/12l^2 + Hl/12x$ (iv

Idénticas expresiones a las halladas por el otro método.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





Solución :

$$P_{eq} = W = \int_0^l H\left(\frac{x}{l}\right)^n dx = H\frac{l^{(n+1)}}{(n+1)l^n} = H\frac{l}{(n+1)}$$

$$X_{eq} = \frac{\int_0^l H\left(\frac{x}{l}\right)^n xdx}{H\frac{l}{(n+1)}} = \frac{H\frac{l^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H\frac{l}{(n+1)}} = \frac{(n+1)l}{(n+2)}$$

$\Sigma M_a = 0$ $\quad P_{eq}\, x_{eq} - R_b\, l = 0$

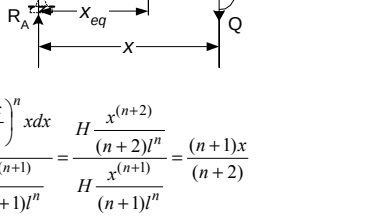
$R_b = Hl/(n+2)$

$\Sigma M_b = 0$ $\quad R_a\, l - P_{eq}\,(l - x_{eq}) = 0$

$R_a' = Hl/(n+2)(n+1)$

Prueba $\quad R_a + R_b = Hl/(n+1) = P_{eq}$ OK

Método de cortes



$$X_{eq} = \frac{\int_0^x H\left(\frac{x}{l}\right)^n xdx}{H\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}} = \frac{H\frac{x^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}} = \frac{(n+1)x}{(n+2)}$$

$$\int_0^x H\left(\frac{x}{l}\right)^n \qquad x^{(n+1)}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$\Sigma M_{corte} = 0$ $\quad R_a x - P_{eq} (x - x_{eq}) - M = 0$

$$M = \frac{Hx}{(n+2)(n+1)}\left(l - \frac{x^{n+1}}{l^n}\right) \qquad \text{(ii}$$

Verificación

x = 0	$Q = Hl/(n+1)(n+2) = R_a$	Ok
x = l	$Q = Hl/(n+1)(n+2) - Hl/(n+1) = -Hl/(n+2) = -R_b$	Ok
x = 0	M = 0	Ok
x = l	M = 0	Ok

Finalmente $\dfrac{\partial M}{\partial x} = Q$ Ok

b) método de la doble integración

$p = H(x/l)^n$

Integrando

$$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)} + c_1 \qquad \text{(i}$$

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + c_1 x + c_2 \qquad \text{(ii}$$

Condiciones de borde

x = 0 M = 0 $\quad 0 = c2$

x = l M = 0 $\quad 0 = -Hl2/(n+2)(n+1) + c1l$

$c1 = Hl/(n+2)(n+1)$

De donde

$$Q = \frac{H}{(n+1)}\left(\frac{l}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{l^n}\right) \qquad \text{(i}$$

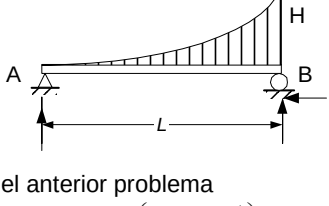
$$M = \frac{Hx}{(n+2)(n+1)}\left(l - \frac{x^{n+1}}{l^n}\right) \qquad \text{(ii}$$

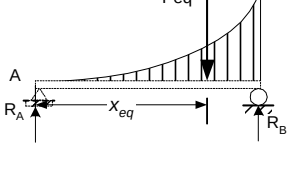
Idénticas expresiones a las halladas por el otro método. No se aplica el método de doble integración de funciones de singularidad por ser muy similar.

5.6. Una viga simplemente apoyada tiene una carga cuya función p(x) = H(x/l)n. Hallar el momento flector y la fuerza cortante máximos.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





Solución : Del anterior problema

$$Q = \frac{H}{(n+1)}\left(\frac{l}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{l^n}\right)$$

Cuando x = l $Q_{max} = - R_b = - Hl/(n+2)$

$$M = \frac{Hx}{(n+2)(n+1)}\left(l - \frac{x^{n+1}}{l^n}\right)$$

Máximo cuando Q = 0

$$Q = \frac{H}{(n+1)}\left(\frac{l}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{l^n}\right) = 0$$

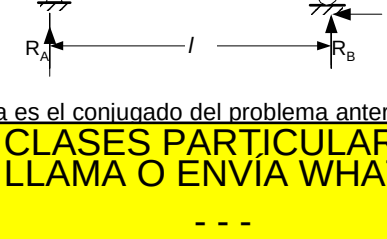
$l\,(n+1)/\,(n+2) = x(n+1)$

$x = l/\,(n+2)1/(n+1)$

$$M_{\max} = \frac{Hl^2}{(n+2)^{(n+2)/(n+1)}(n+2)}$$

$$M_{\max} = \frac{Hl^2}{(n+2)^{(2n+3)/(n+1)}}$$

5.7. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente apoyada con una carga cuya función $p(x) = H(1-x/l)^n$



Solución : Este problema es el conjugado del problema anterior y basta reemplazar en

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

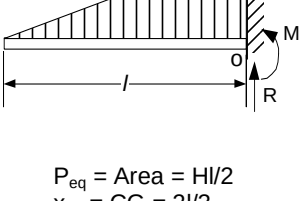
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

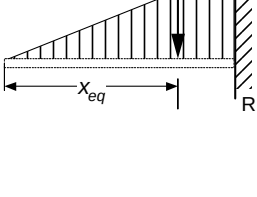
$$Q = \frac{H}{(n+1)}\left(\frac{l}{n+2} - \frac{(l-x)^{n+1}}{l^n}\right) \qquad \text{(ii}$$

Momento Flector

$$M = \frac{H(l-x)}{(n+2)(n+1)}\left(l - \frac{(l-x)^{n+1}}{l^n}\right) \qquad \text{(iii}$$

5.8. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una carga triangular en una viga simplemente empotrada.





Solución :

P_{eq} = Area = Hl/2

x_{eq} = CG = 2l/3

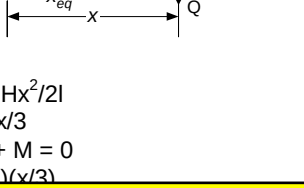
Σ Mo = 0 $\quad P_{eq}\ (l - x_{eq}) - M_r = 0$

$M_r = -\ Hl2\ /6$

Σ Fy = 0 $\quad R - P_{eq} = 0$

$R = Hl/2$

método de cortes



La carga equivalente

P_{eq} = Área = $Hx^2/2l$

x_{eq} = CG = 2x/3

Σ Mcorte = 0 $\quad P_{eq}\ (x - x_{eq}) + M = 0$

$M = -\ (Hx^2/2l)(x/3)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$p = Hx/l$

Integrando $Q = -Hx^2/2l + c1$

$M = -Hx^3/6l + c1\,x + c2$

Condiciones de borde

$x = 0\ M = 0 \qquad c2 = 0$

$x = 0\ Q = 0 \qquad c1 = 0$

De donde $Q = -Hx^2/2l$ (iii

$M = -Hx^3/6l$ (iv

c) método de la doble integración de funciones singulares

$p(x) = (H/l)\langle x\rangle^1 + R\langle x\text{-}l\rangle^{-1}$

$p(x) = (H/l)\langle x\rangle^1 + (Hl/2)\langle x\text{-}l\rangle^{-1}$

Integrando y aplicando las propiedades de funciones de singularidad

$Q = -(H/2l)\langle x\rangle^2 + (Hl/2)\langle x\text{-}l\rangle^0$

$M = -(H/6l)\langle x\rangle^3 + (Hl/2)\langle x\text{-}l\rangle^1$

Cuando $0 < x < l$

$\langle x\rangle^1 = x$

$\langle x\rangle^3 = x$

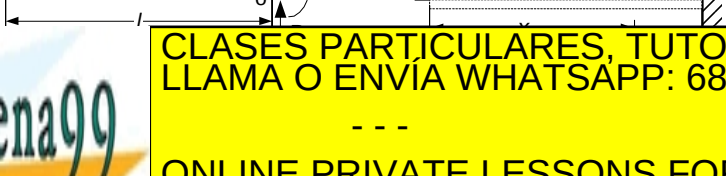
$\langle x\text{-}l\rangle^1 = 0$

$Q = -(Hx^2/2l)$ (v

y $M = -Hx^3/6l$ (vi

Los resultados son los mismos por todos los métodos

5.9. Hallar las funciones de Momento Flector y Fuerza Cortante del sistema de la figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

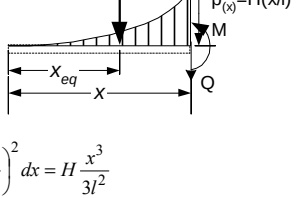
$\Sigma M_o = 0$ $\quad P_{eq}\,(l - x_{eq}) = - M_r$

$M_r = Hl2\,/12$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad R - P_{eq} = 0$

$R = (Hl/3)$

a) método de cortes



$$P_{eq} = W = \int_0^x H\left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = H\frac{x^3}{3l^2}$$

$$X_{eq} = \frac{\int_0^x H\left(\frac{x}{l}\right)^2 x dx}{H\frac{x}{3}} = \frac{H\frac{x^4}{4l^2}}{H\frac{x}{3}} = \frac{3x}{4}$$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad - P_{eq} - Q = 0$

$Q = -Hx^3/3l^2$ (i

$\Sigma M_{corte} = 0$ $\quad - P_{eq}\,(x - x_{eq}) - M = 0$

$M = -(Hx^3/3l^2)(x/4) = - (Hx^4/12l^2)$ (ii

Verificación

x = 0	Q = 0	Ok
x = l	$Q = -Hl/3 = -R_b$	Ok
x = 0	M = 0	Ok
x = l	$M = Hl^2/12 = M_r$	Ok
Finalmente	$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{Hx^3}{3l^2} = Q$	Ok

b) método de la doble integración

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

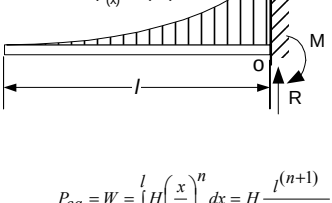
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

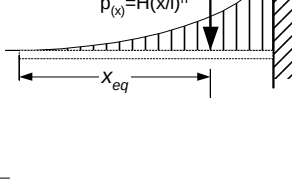
De donde $Q= -Hx^3/3l^2$ (iii

$M=-Hx^4/12l^2$ (iv

Idénticas expresiones a las halladas por el método de cortes

5.10. Una viga simplemente empotrada tiene una carga cuya función es $p(x) = H(x/l)^n$. Hallar a) La carga equivalente b) Las reacciones y c) El momento flector y la fuerza cortante





Solución :

$$P_{eq} = W = \int_0^l H\left(\frac{x}{l}\right)^n dx = H\frac{l^{(n+1)}}{(n+1)l^n} = H\frac{l}{(n+1)}$$

$$X_{eq} = \frac{\int_0^l H\left(\frac{x}{l}\right)^n x dx}{H\frac{l}{(n+1)}} = \frac{H\frac{l^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H\frac{l}{(n+1)}} = \frac{(n+1)l}{(n+2)}$$

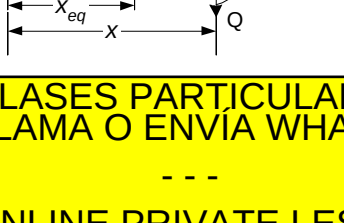
Σ Mo = 0 $P_{eq}\ (l - x_{eq}) = M_r$

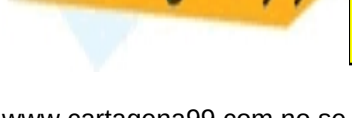
$M_r=Hl^2/(n+1)(n+2)$

Σ Fy = 0 $R - P_{eq} =0$

$R = Hl/(n+1)$

a) método de cortes





CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$X_{eq} = \frac{\int_0^x H\left(\frac{x}{l}\right)^n x dx}{H\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}} = \frac{H\frac{x^{(n+2)}}{(n+2)l^n}}{H\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n}} = \frac{(n+1)x}{(n+2)}$$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad - P_{eq} - Q = 0$

$$Q = -H\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)l^n} \qquad \text{(i}$$

$\Sigma M_{corte} = 0$ $\quad - P_{eq}(x - x_{eq}) - M = 0$

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{(n+2)(n+1)l^n} \qquad \text{(ii}$$

Verificación

x = 0	Q = 0	Ok
x = l	$Q = -Hl/(n+1) = -R_b$	Ok
x = 0	M = 0	Ok
x = l	$M = -Hl^2/(n+2)(n+1) = M^r$	Ok
Finalmente	$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{Hx^3}{3l^2} = Q$	Ok

b) método de la doble integración

$p = H(x/l)^n$

Integrando

$$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)} + c_1 \qquad \text{(i}$$

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + c_1 x + c_2 \qquad \text{(ii}$$

x = 0 M = 0 $\quad 0 = c2$

x = 0 Q = 0 $\quad 0 = c1$

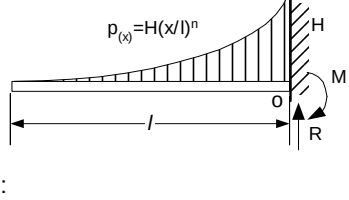
De donde

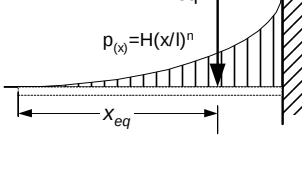
$$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)} \qquad \text{(i}$$

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} \qquad \text{(ii}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





Solución :

De 5.10

$$Q = -\frac{Hx^{(n+1)}}{l^n(n+1)} \qquad \text{(i}$$

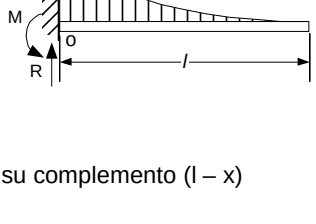
$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} \qquad \text{(ii}$$

máximos en el empotramiento (x = l)

$$Q_{\max} = -\frac{Hl}{(n+1)}$$

$$M_{\max} = -\frac{Hl^2}{(n+2)(n+1)}$$

5.12. Hallar las funciones de Momento Flector y Fuerza Cortante del sistema de la figura



Solución :

Se reemplaza en 5.11 x por su complemento (l – x)

Carga $p = H(x/l)^n$

$p = H[(l-x)/l]n = H\,(1-x/l)^n$ (i

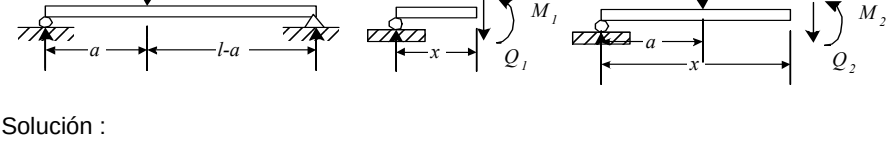
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Momento $M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$ (ii

$M = -\frac{H(l-x)^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$

5.13. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



Solución :

ΣMa = 0 $P(a) - R_b l = 0$
$R_b = Pa/l$
ΣMb = 0 $R_a l - P(l-a) = 0$
$R_a = P(l-a)/l$

Comprobación $R_a + R_b = P$ Ok

a) método de Luiz cortes

1er intervalo $R_a x = M_1$
$M_1 = P(l-a)x/l$

2do intervalo $R_a x - P(x - a) - M_2 = 0$
$M_2 = P(l - a)x/l - P(x - a) = Pa(1-x/l)$

b) método de integración con funciones de singularidad

De derecha a izquierda
$p(x) = R_a \langle x \rangle^{-1} - P\langle x-a \rangle^{-1} + R_b\langle x-l \rangle^{-1}$
$p(x) = P(l-a)/l\langle x \rangle^{-1} - P\langle x-a \rangle^{-1} + Pa/l\langle x-l \rangle^{-1}$
Integrando y aplicando las propiedades de este tipo de funciones

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$\langle x - a \rangle^1 = 0$
$\langle x - l \rangle^1 = 0$

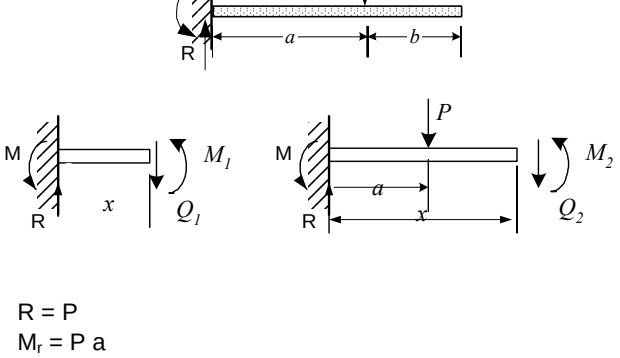
y $M_1 = P(l - a)x/l$

Cuando $a<x<l$
$\langle x \rangle^1 = x$
$\langle x - a \rangle^1 = x-a$
$\langle x - l \rangle^1 = 0$

y $M_2 = P(l-a)x/l - P(x-a) = Pa(1-x/l)$

Idénticas expresiones a las halladas por el método de cortes.

5.14. Hallar la EC. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en el sistema de la figura usando funciones de singularidad



Solución :

$\Sigma F_y = 0$ $R = P$
$\Sigma M = 0$ $M_r = P\,a$

a) método de los cortes

1er intervalo $R\,x - M - M_1 = 0$
$M_1 = Px - Pa$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Usando funciones de singularidad y de derecha a izquierda

$$p(x)= -M_r \langle x\rangle^{-2} + R \langle x\rangle^{-1} - P\langle x-a\rangle^{-1}$$
$$p(x)= -Pa \langle x\rangle^{-2} + P \langle x\rangle^{-1} - P\langle x-a\rangle^{-1}$$

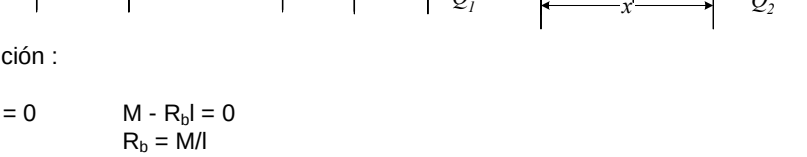
Integrando y aplicando las propiedades de este tipo de funciones

$$Q(x)= -Pa \langle x\rangle^{-1} + P \langle x\rangle^{0} - P\langle x-a\rangle^{0}$$
$$M(x)= -Pa \langle x\rangle^{0} + P \langle x\rangle^{1} - P\langle x-a\rangle^{1}$$

Para $0<x<a$
$\langle x\rangle^{-1} = 0$
$\langle x\rangle^{0} = 0$
$\langle x-a\rangle^{0} = 0$
$\langle x-a\rangle^{1} = 0$
entonces $Q(x)= P$
$M(x)= -Pa\ x + P\ x$

Para $a<x<l$
$\langle x\rangle^{-1} = 0$
$\langle x\rangle^{0} = 0$
$\langle x-a\rangle^{0} = 0$
$\langle x-a\rangle^{1} = 0$
entonces $Q(x)= 0$
$M(x)= 0$

5.15. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



Solución :

$\Sigma M_a = 0$ $\quad M - R_b l = 0$
$\quad R_b = M/l$
$\Sigma M_b = 0$ $\quad R_a l + M = 0$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

1er intervalo $R_a\ x = M_1$
$M_1 = - Mx/l$

2do intervalo $R_a\ x + M - M_2 = 0$
$M_2 = -Mx/l + M$

b) método de integración con funciones de singularidad

De derecha a izquierda
$p(x) = Ra \langle x \rangle^{-1} + M\langle x-a \rangle^{-2} + Rb\langle x-l \rangle^{-1}$
$p(x) = -M/l\langle x \rangle^{-1} + M\langle x-a \rangle^{-2} + M/l\langle x-l \rangle^{-1}$

Integrando y aplicando las propiedades de este tipo de funciones
$Q = -M/l\langle x \rangle^{0} + M\langle x-a \rangle^{-1} + M/l\langle x-l \rangle^{0}$
$M = -M/l\langle x \rangle^{1} + M\langle x-a \rangle^{0} + M/l\langle x-l \rangle^{1}$

Cuando $0<x<a$
$\langle x \rangle^{1} = x$
$\langle x-a \rangle^{0} = 0$
$\langle x-l \rangle^{1} = 0$

y $M_1 = -Mx/l$

Cuando $a<x<l$
$\langle x \rangle^{1} = x$
$\langle x-a \rangle^{0} = 1$
$\langle x-l \rangle^{1} = 0$

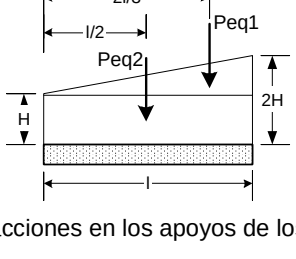
y $M_2 = -Mx/l + M$

Idénticas expresiones a las halladas por el método de cortes.

5.16. Hallar solo el momento flector de los sistemas de la figura. En todos los casos $p(x)= H(1+x/l)$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



$P_{eq1} = Hl/2$

$P_{eq2} = Hl$

Se halla primero las reacciones en los apoyos de los tres casos

(a) $\Sigma Ma=0$ $\quad P_{eq1}\, x_{eq1} + P_{eq2}\, x_{eq2} - R_b\, l = 0$

$R_b\, l = (Hl/2)(2l/3) + (Hl)(l/2)$

$R_b = 5Hl/6$

$\Sigma Mb=0$ $\quad R_a l - P_{eq1}\,(l - x_{eq1}) - P_{eq2}(l - x_{eq2}) = 0$

$R_a\, l = (Hl/2)(l - 2l/3) + (Hl)(l - l/2) = (Hl/2)(l/3) + (Hl)(l/2)$

$R_a = 4H/6 = 2Hl/3$

Comprobación $\quad R_a + R_b = 5H/6 + 2H/3 = 9H/6 = 3H/2 = P_{eq1} + P_{eq2}$ $\quad$ Ok

(b) $\Sigma Fy=0$ $\quad R = Peq1 + Peq2$

$R = \cdot 3Hl/2$

$\Sigma Mo=0$ $\quad M = Peq1\ xeq1 + Peq2\ xeq2$

$M = (Hl/2)(2l/3) + (Hl)(l/2) = 5Hl2/6$

(c) $\Sigma Ma=0$ $\quad P_{eq1}\,(x_{eq1} - l/4) + P_{eq2}(x_{eq2} - l/4) - R_b(3l/4) = 0$

$R_b(3l/4) = (Hl/2)(2l/3 - l/4) + (Hl)(l/2 - l/4) = (Hl/2)(5l/12) + (Hl)(l/4)$

$R_b = 11Hl/18$

$\Sigma Mb=0$ $\quad R_a(3l/4) - P_{eq1}\,(l - x_{eq1}) - P_{eq2}(l - x_{eq2}) = 0$

$R_a l(3l/4) = (Hl/2)(l - 2l/3) + (Hl)(l - l/2) = (Hl/2)(l/3) + (Hl)(l/2) = 2H/3$

$R_a = 8Hl/9$

Comprobación $\quad R_a + R_b = 11H/18 + 8H/9 = 27H/18 = 3H/2 = P_{eq1} + P_{eq2}$ $\quad$ Ok

A continuación se hallan la Fuerza Cortante y el Momento Flector por integración

Integrando $\quad Q = -H(x + x^2/2l) + c1$

$M = -\,H(x^2/2 + x^3/6l) + c1x + c2$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$M = -H(x^2/2 + x^3/6l - 2lx/3)$$

b) Si x = l $Q = 0$ $0=-H(l + l/2)+c1$ $c1=3Hl/2$
Si x = l $M = 0$ $0=-H(l2/2 + l3/6) + (3Hl/2)l + c2$ $c2= -5Hl2/6$

$$M=-H(x^2/2 + x^3/6l) + 3Hlx/2 - 5Hl2/6$$

c) En este caso hay dos intervalos pero como la carga es la misma en los dos intervalos la variación se da solamente en las constantes. Entonces

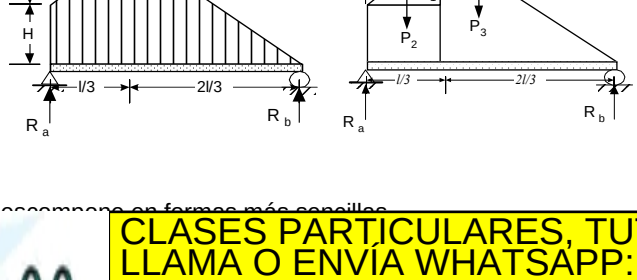
$Q_1 = -H(x + x^2/2l) + c1$ valido $0<x<l/4$
$M_1 = -H(x^2/2 + x^3/6l) + c1x + c2$
$Q_2 = -H(x + x^2/2l) + c3$ valido $l/4<x<l$
$M_2 = -H(x^2/2 + x^3/6l) + c3x + c4$

Y las condiciones de borde son

Si x = 0 $Q_1 = 0$ $c1 = 0$
Si x = 0 $M_1 = 0$ $c2 = 0$
Si x = l $Q_2 = - R_b - H(l + l/2) + c3 = -11Hl/18$ $c3=8Hl/9$
Si x = l $M_2 = 0$ $0 = - H(l^2/2 + l^3/6) + 19Hl/9 + c4$ $c4 =-2Hl^2/9$

$$M_1=-H(x^2/2 + x^3/6l)$$
$$M_2=-H(x^2/2 + x^3/6l + 8lx/9 - 2l^2/9)$$

5.17. Hallar el momento flector del sistema de la figura



Solución :

La carga se descompone en formas más sencillas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$x_2 = l/6$
$P_3 = 2Hl/3$
$x_3 = l/3 + 2l/9 = 5l/9$

$\Sigma Ma=0$ $\quad P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 - R_b l = 0$
$R_b = (Hl/6)(2l/9) + (Hl/3)(l/6) + (2Hl/3)(5l/9)$
$R_b = 25Hl/54$

$\Sigma Mb=0$ $\quad R_a l – P_1(l - x_1) - P_2(l - x_2) - P_3(l - x_3) = 0$
$R_a = Hl/6(l - 2l/9) + (Hl/3)(l - l/6) + (2Hl/3)(l - 5l/9)$
$R_a = 38Hl/54$

Prueba $\quad R_a + R_b = 25Hl/54 + 38Hl/54 = 7Hl/6 = Hl/6 + Hl/3 + 2Hl/3$ Ok

Se analiza el sistema en dos intervalos

$P_1 = Hx/(l/3) + H$
$P_2 = -3Hx/l + 3H$

Integrando $\quad Q_1 = -3Hx^2/2l – Hx + c1$
$M_1 = -Hx^3/2l - Hx^2/2 + c1x + c2$
$Q_2 = 3Hx^2/2l - 3Hx + c3$
$M_2 = Hx^3/2l - 3Hx^2/2 + c3x + c4$

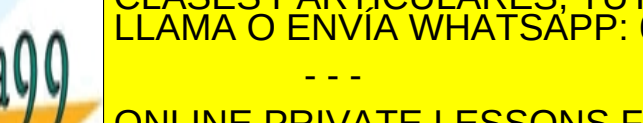
Las condiciones de borde son

x= 0	$Q_1 = R_a$	$c1 = 38Hl/54$
x= 0	$M_1 = 0$	$c2 = 0$
x= l	$Q_2 = - R_b$	$- 25Hl/54 = 3Hl^2/2l - 3Hl + c3$
x= l	$M_2 = 0$	$0 = Hl^3/2l - 3Hl^2/2 + c3l + c4$

De donde $\quad c_3 = 28Hl/27$
$c_4 = Hl2 /27$

$M_1 = - Hx^3/2l – Hx^2/2 + 19Hlx/27$
$M_2 = Hx^3/2l - 3Hx^2/2 + 28Hlx/27 + Hl2/27$

5.18. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$R_a = R_b = Hl/4$
$p_1 = 2Hx/l$
$Q_1(x) = - 2Hx^2/(2l) + c1$
$M_1(x) = - Hx^3/(3l) + c1\ x + c2$

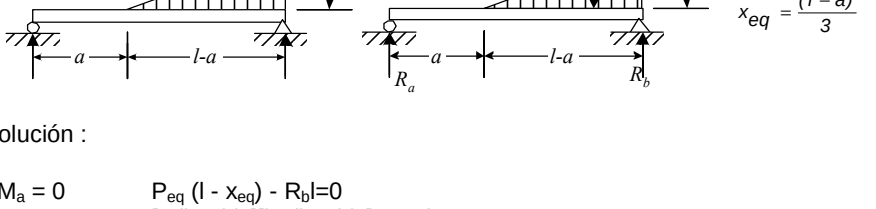
Condiciones de Borde

x = 0	M = 0	c2 = 0
x = 0	$Q = R_a$	$c1 = R_a = Hl/4$

$Q_1(x) = - Hx^2/l + Hl/4$
$M_1(x) = - Hx^3/(3l) + Hlx/4$

Estas ecuaciones solo son validas cuando 0<x<l/2

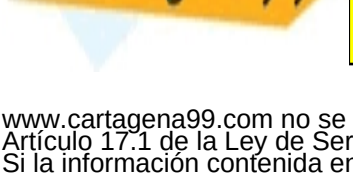
5.19. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



Solución :

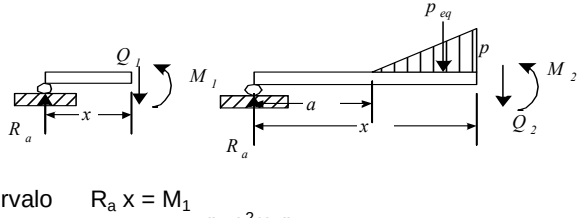
$\Sigma M_a = 0$	$P_{eq}(l - x_{eq}) - R_b l = 0$
	$[H(l - a)/2][l - (l - a)/3] = R_b l$
	$[H(l - a)/2][a/3 + 2l/3] = R_b l$
	$R_b = H(l - a)(a + 2l)/(6l)$
$\Sigma M_b = 0$	$R_a l - P_{eq}(l - a)/3 = 0$
	$R_a l = [H(l - a)/2](l - a)/3$
	$R_a = H(l - a)2/(6l)$

Comprobación $R_a + R_b = [H/(6l)](l - a)[(a + 2l) + (l - a)]$
$R_a + R_b = [H/(6l)](l - a)(3l) = H(l - a)/2 = P_{eq}$ Ok



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



$$p = H\frac{x-a}{l-a}$$

$$p_{eq} = p\frac{x-a}{2}$$

$$p_{eq} = H\frac{(x-a)^2}{2(l-a)}$$

$$x_{eq} = \frac{x-a}{3}$$

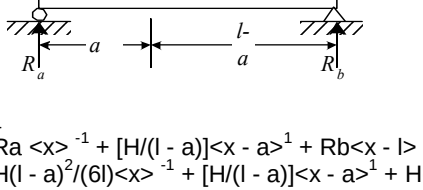
1er intervalo $R_a\, x = M_1$

$M_1 = - H \times (l-a)^2/(6l)$

2do intervalo $R_a\, x - P_{eq}\, x_{eq} - M_2 = 0$

$M_2 = Hx(l-a)^2/(6l) - H(x-a)^3/[6(l-a)]$

Método de integración con funciones de singularidad



De derecha a izquierda

$p(x) = Ra \langle x\rangle^{-1} + [H/(l-a)]\langle x-a\rangle^{1} + Rb\langle x-l\rangle^{-1}$

$p(x) = H(l-a)^2/(6l)\langle x\rangle^{-1} + [H/(l-a)]\langle x-a\rangle^{1} + H(l-a)(a+2l)/(6l)\langle x-l\rangle^{-1}$

Integrando y aplicando las propiedades de este tipo de funciones

$Q(x) = H(l-a)^2/(6l)\langle x\rangle^{0} + H/[2(l-a)]\langle x-a\rangle^{2} + H(l-a)(a+2l)/(6l)\langle x-l\rangle^{0}$

$M(x) = H(l-a)^2/(6l)\langle x\rangle^{1} + H/[6(l-a)]\langle x-a\rangle^{3} + H(l-a)(a+2l)/(6l)\langle x-l\rangle^{1}$

Cuando $0<x<a$

$\langle x\rangle^{1} = x$

$\langle x-a\rangle^{1} = 0$

$\langle x-l\rangle^{1} = 0$

y $M_1(x) = Hx(l-a)^2/(6l)$

Cuando $a<x<l$

$\langle x\rangle^{1} = x$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS PROPUESTOS

5.20. Hallar la fuerza puntual equivalente y su ubicación de la carga distribuida p(x)= H Sin (πx/2l).

5.21. Hallar la fuerza puntual equivalente y su ubicación de una carga distribuida de forma semicircular.

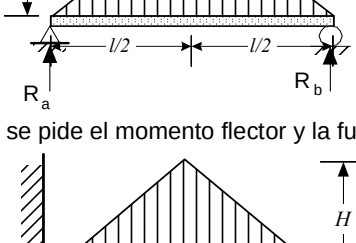
5.22. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente apoyada con carga p(x)= H Sin (πx/2l).

5.23. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente empotrada con carga p(x)= H Sin (πx/2l).

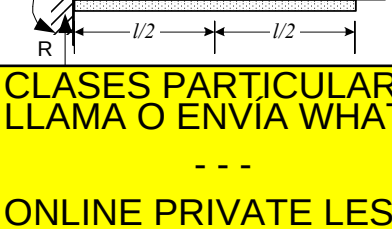
5.24. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente empotrada con carga semicircular.

5.25. Hallar el momento flector y la fuerza cortante de una viga simplemente empotrada con carga semicircular.

5.26. En la viga de la figura se pide el momento flector y la fuerza cortante

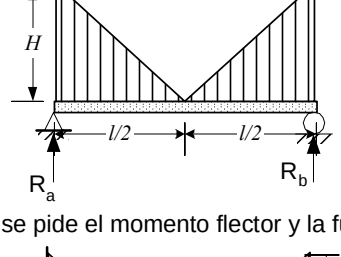


5.27. En la viga de la figura se pide el momento flector y la fuerza cortante

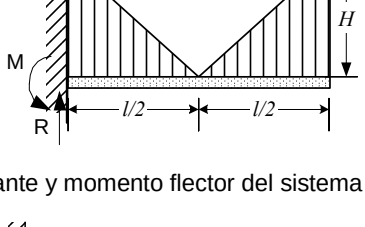


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

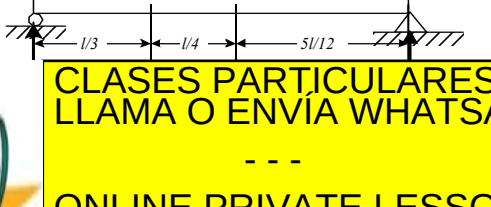


5.29. En la viga de la figura se pide el momento flector y la fuerza cortante



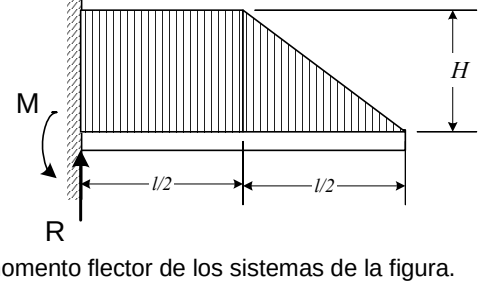
5.30. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

5.31. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

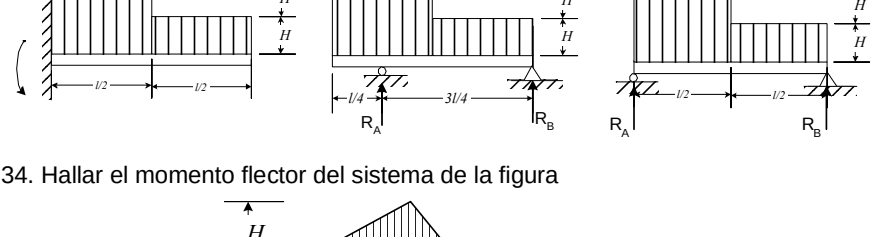


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

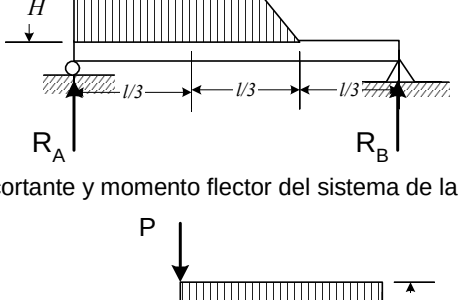
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



5.33. Hallar solo el momento flector de los sistemas de la figura.



5.34. Hallar el momento flector del sistema de la figura

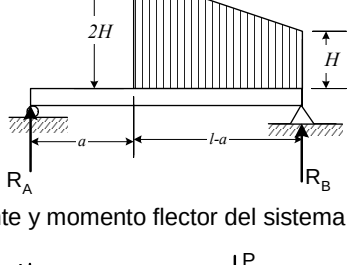


5.35. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

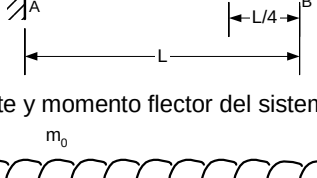
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

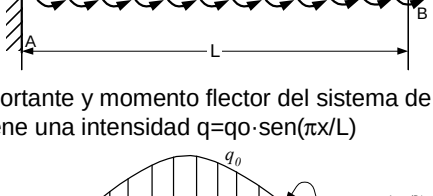
5.36. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



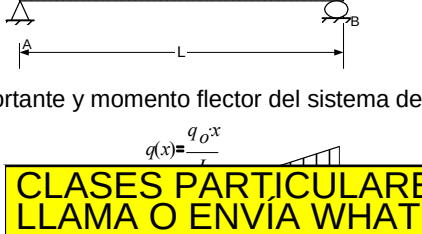
5.37. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.38. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.39. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura
La carga distribuida tiene una intensidad q=qo·sen(πx/L)



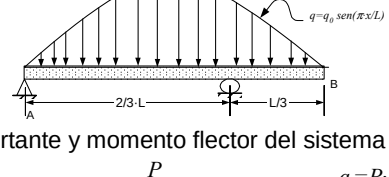
.

5.40. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

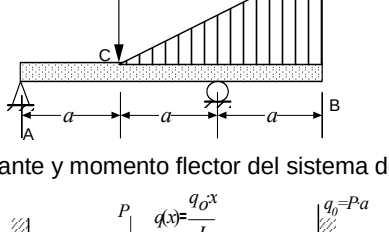
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

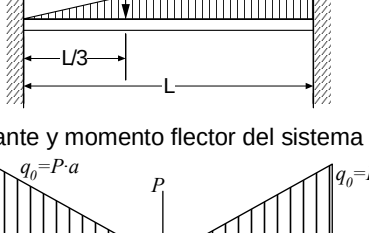
5.41. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura
La intensidad de carga varia según la onda senoidal, con valor q=qo·sen(πx/L).



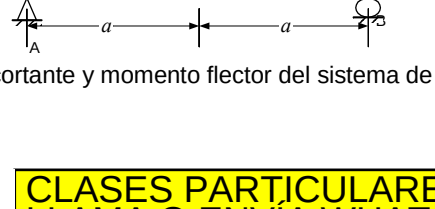
5.42. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.43. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



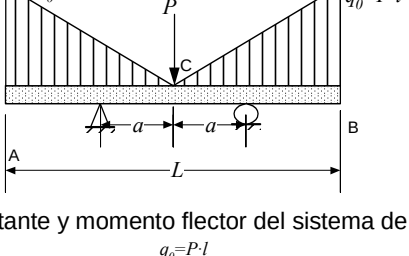
5.44. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.45. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

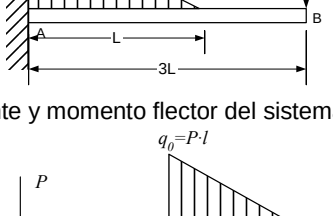
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

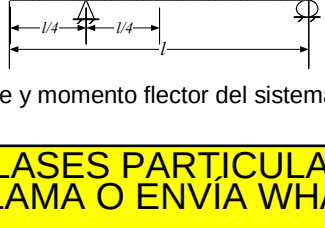


5.46. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

5.47. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.48. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.49. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

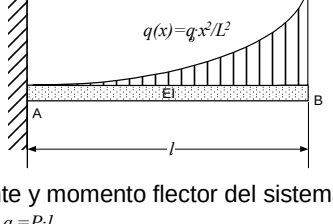
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

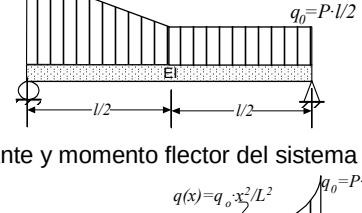
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

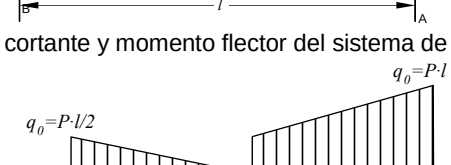


5.50. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

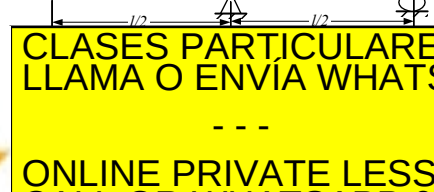


5.51. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura

5.52. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



5.53. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



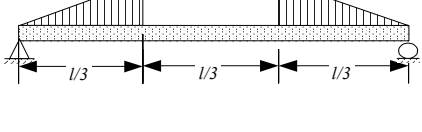
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

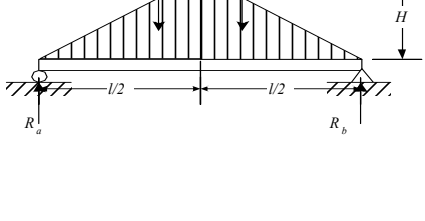
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



5.55. Hallar la fuerza cortante y momento flector del sistema de la figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

6.- FLEXIÓN
Esfuerzos Normales y Cortantes

6.1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrollarán las ecuaciones para calcular los esfuerzos que se presentan en elementos sometidos a flexión. Para Evitar la falla estos esfuerzos no deberan exceder los límites de fluencia de los materiales empleados.

6.2.- ESFUERZOS NORMALES EN FLEXIÓN

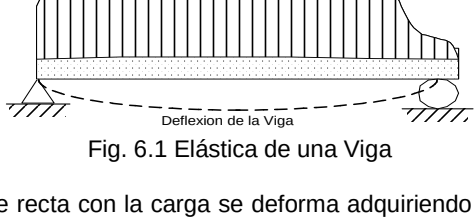


Fig. 6.1 Elástica de una Viga

Una viga inicialmente recta con la carga se deforma adquiriendo una ligera curvatura, conociéndose a esta ultima con el nombre de elástica. Todas las secciones de la viga sufren desplazamientos que generalmente son verticales lo que implica que la viga generalmente no modifica su longitud.

Si se toman dos secciones transversales y próximas entre si, estas son paralelas antes de aplicar las cargas, luego de aplicadas las cargas estas secciones continúan siendo rectas, pero ya no paralelas entre sí. Esto significa que las secciones originalmente planas y normales al eje de la pieza, se mantienen planas y normales a dicho eje. Sin embargo este eje cambio su forma de recta a la forma curva de la elástica

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Como se puede observar en la figura, unas fibras del sólido se acortan y otras se alargan, existiendo entre ambas una capa de fibras que no sufren variación. Dicha capa se conoce como zona o capa de fibras neutras.

Un segmento diferencial curvo de viga puede considerarse como un arco de circulo con centro en O y radio ρ. En él se observa que la parte superior ab tiene menor longitud que la inferior cd, lo que sugiere que la las fibras superiores se comprimieron y que las fibras inferiores se alargaron. Existiendo un plano llamado "neutro" nn donde no hay deformación y por lo tanto tampoco esfuerzos.

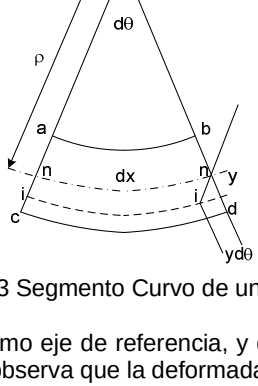


Fig. 6.3 Segmento Curvo de una Viga

Tomando este plano neutro como eje de referencia, y debido a que la longitud nn=dx es igual a la longitud ii=dx, se observa que la deformada a una distancia "y" es:

	$\delta = y\, d\theta$	(6.1
	$\varepsilon = \delta/dx = y\, d\theta/dx$	(6.2
del Grafico	$dx = \rho\, d\theta$	(6.3
De 6.2 y 6.3	$\varepsilon = y / \rho$	(6.4
	$\sigma = E\, \varepsilon = Ey / \rho$	(6.5

La ec 6.5 muestra que los esfuerzos normales son proporcionales a la distancia al eje neutro. Nulos en el eje neutro y máximos en las fibras mas alejadas de este.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

En la ec 6.5 todavía ρ es desconocido. En ausencia de fuerzas axiales de la estática

ΣFx= 0 $$\int_A dF = N = 0$$ (6.6

$$dF = \sigma\, dA = (Ey/\rho)dA$$ (6.7

$$\frac{E}{\rho}\int_A ydA = 0$$ (6.8

En esta ecuación E/ρ no es cero por lo que

$$\int_A ydA = 0$$ (6.9

Esto requiere que el origen del sistema de coordinas empleado debe estar situado en el centro geométrico de la sección transversal (que es equivalente al centro de gravedad en el caso de vigas homogéneas). En otras palabras el eje neutro coincide con el eje centroidal de la viga

La estática, además del equilibrio de fuerzas requiere del equilibrio de momentos

ΣM= 0 $$\int_A dFy = M$$ (6.10

$$dF = \sigma\, dA = (Ey/\rho)dA$$ (6.11

$$M = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{EI}{\rho}$$ (6.12

donde “I” es el Momento de Inercia de la sección

De 6.5 y 6.12

$$\sigma = \frac{My}{I}$$ (6.13

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I}$$ (6.14

“Mmax” depende únicamente del tipo de viga y del tipo de carga. Mientras que los valores de “c” e “I” dependen exclusivamente de la sección transversal de la viga.

6.3 ESFUERZOS CORTANTES EN FLEXIÓN

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

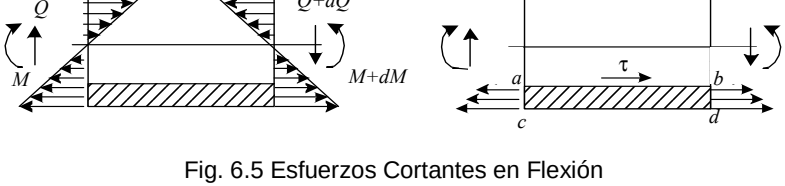


Fig. 6.5 Esfuerzos Cortantes en Flexión

En los extremos laterales de un elemento diferencial se presentan esfuerzos normales como se vio en la anterior sección. Aislando en este elemento diferencial sólo una porción a, b , c, d.

De la estática

ΣFx= 0 $$\int_{A_{lat}} (\sigma + d\sigma) dA + \tau A_{\sup} - \int_{A_{lat}} \sigma dA = 0 \qquad (6.15$$

$$\int_{A_{lat}} d\sigma dA + \tau A_{\sup} = 0 \qquad (6.16$$

de 6.13 σ = M y / EI (6.13

dσ = dM y / EI (6.17

En 6.16

$$\int_{A_{lat}} \frac{dM}{EI} y dA + \tau b dy = 0 \qquad (6.18$$

$$\frac{dM}{EI} \int_{A_{lat}} y dA = \tau b dy \qquad (6.19$$

$$\tau = \frac{1}{Ib} \frac{dM}{dx} \int_{A_{lat}} y dA = \frac{Q(\bar{y}_p A_p)}{Ib} \qquad (6.20$$

Nótese que la integral (y_p y A_p) no son del área total sino del área parcial.

$$\tau = \frac{QS}{Ib} \qquad (6.21$$

$$S = \int y dA \qquad (6.22$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

El valor de “Q” depende únicamente del tipo de viga y de su carga, mientras que los valores de “S”, “I” y “b” dependen exclusivamente de la sección de la viga.

Los esfuerzos cortantes tienen una distribución parabólica con valores mínimos en los extremos superior e inferior de la viga y máximos en el eje neutro contrariamente a los esfuerzos normales con distribución lineal y máximos en los extremos superiores e inferiores pero nulos en el eje neutro

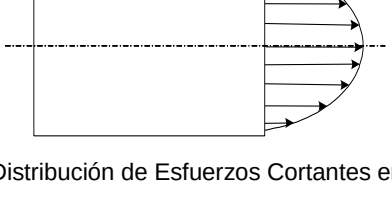
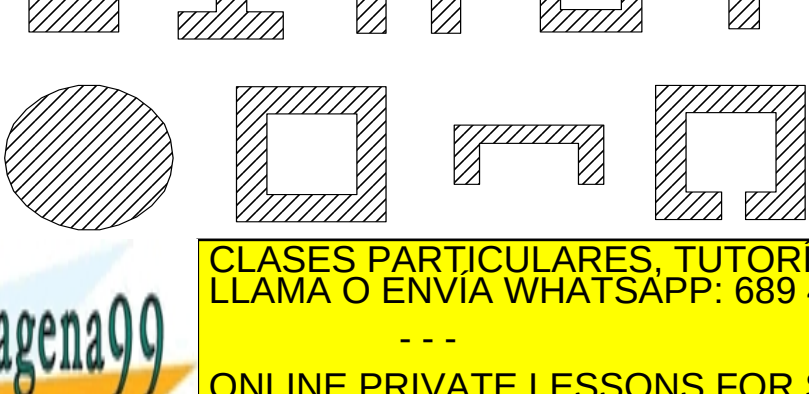


Fig. 6.6 Distribución de Esfuerzos Cortantes en Flexión

6.4.- PERFILES USADOS EN VIGAS

Los perfiles más recomendados en vigas son aquellos que tienen valores altos de Inercia, por lo que se prefieren perfiles con secciones de mayor alto que ancho. En la figura se muestran los perfiles preferidos para secciones transversales de vigas de los cuales se hallarán las ecuaciones reducidas para calcular los esfuerzos de normales y cortantes.

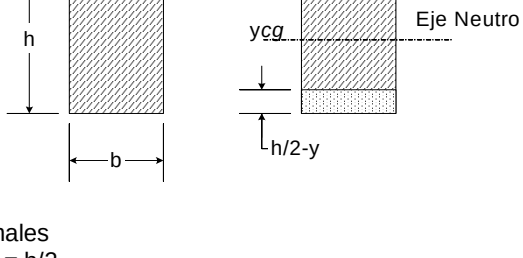


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

6.1. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil rectangular.



Solución :

a) Esfuerzos Normales

y_{cg}= h/2

c = +/- h/2

$I = bh^3/12$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{My}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{12My}{bh^3}$$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{My}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{12My}{bh^3}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M(h/2)}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{6M}{bh^2}$$

b) Esfuerzos Cortantes

Trazando una línea a una altura y la misma divide la sección en una porción superior y otra inferior:

En la sección inferior

$A_{parcial} = b(h/2-y)$

$y_{cgparcial} = y + (½)(h/2-y)$

$S = A_{parcial} ycg_{parcial} = b(h/2-y)[y+(1/2)(h/2-y)] = b(h/2-y)(h/2+y)(1/2)$

$S = b(h^2/4-y^2)/2$

En la sección superior

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

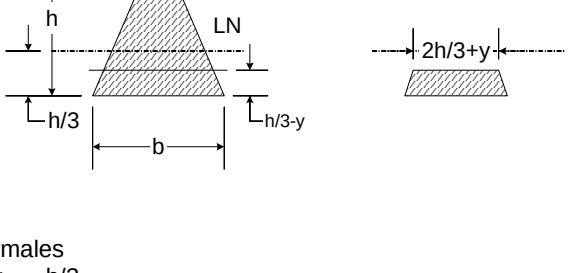
$S = b(h^2/4-y^2)/2$

$S_{max\ y=0} = bh^2/8$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} = \frac{Qb(\frac{h^2}{4} - y^2)\frac{1}{2}}{\frac{bh^3}{12}b} = \frac{6Q(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2})}{bh}$$

$\tau_{max} = 1{,}5\ Q/A$

6.2. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil triangular.



Solución:

a) Esfuerzos Normales

$y_{cg} = h/3$

$c1 = h/3$

$c2 = 2h/3$

$I = bh^3/36$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{My}{\frac{bh^3}{36}} = \frac{36My}{bh^3}$$

$$\sigma_{\max tracc} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M(h/3)}{\frac{bh^3}{36}} = \frac{12M}{bh^2}$$

$$\sigma_{\max comp} = \frac{Mc_2}{I} = \frac{M(2h/3)}{\frac{bh^3}{36}} = \frac{24M}{bh^2}$$

b) Esfuerzos Cortantes

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$A_1 = b(2h/3+y)/2 = (2h/3+y)2(B/2h)$
$A_2 = [B+b](1/2)(h2) = [B+(2h/3+y)B/h](1/2)(h/3-y)$
$y_{cg1} = (1/3)(2h/3+y) - y = (2h/9-2y/3)$
$y_{cg2} = (h/2+y)/2-y = (h/2-y)/2$
$S_1 = A_1 y_{cg1} = (2h/3+y)2(B/2h)(2h/9-2y/3)$
$S_2 = A_2 y_{cg2} = [B+(2h/3+y)B/h](1/2)(h/3-y)\ (h/2-y)/2$
$S_{max} = (4h2/9)(B/2h)(2h/9) = (4h2B/81)$

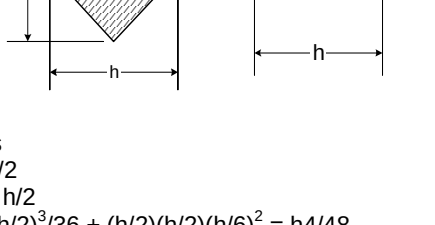
$$\tau_{\sup} = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q(\frac{2h}{3}+y)^3 \frac{b}{6h}}{\frac{bh^3}{36}(\frac{2h}{3}+y)\frac{b}{h}} = \frac{Q(\frac{2h}{3}+y)^2 6}{bh^3}$$

$$\tau_{\sup} = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q(\frac{2h}{3}+y)^3 \frac{b}{6h}}{\frac{bh^3}{36}(\frac{2h}{3}+y)\frac{b}{h}} = \frac{Q(\frac{2h}{3}+y)^2 6}{bh^3}$$

Cuando y = - 2h/3 se tiene $\tau = 0$ y cuando y = 0 se tiene

$$\tau_{\max} = \frac{Q(\frac{2h}{3})^2 6}{bh^3} = \frac{Q\frac{4h^2 6}{9}}{bh^3} = \frac{Q8}{3bh} = \frac{4Q}{3A}$$

6.3. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil romboidal.



Solución :
a) Esfuerzos Normales
$y_{cg} = h/2$
$c = +/- h/2$
$I = 2h(h/2)^3/36 + (h/2)(h/2)(h/6)^2 = h4/48$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M(h/2)}{h^4} = \frac{24M}{h^3}$$

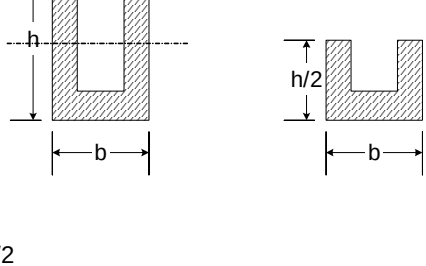
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$S_{max} = A_{parcial}\, y_{cgparcial} = h3/24$

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q(\frac{h^3}{24})}{\frac{h^4 h}{48}} = \frac{2Q}{h^2}$$

6.4. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil rectangular hueco.



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$y_{cg} = h/2$

$c = +/- h/2$

$I = [bh^3 - (b-2e)(h-2e)^3]/12$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{3Mh}{e\left[b\left(4e^2 - 6eh + 3h^2\right) - (2e-h)^3\right]}$$

b) Esfuerzos Cortantes

$A_{parcial} = b(h/2) - (b-2e)(h/2-e)$

$y_{cgparcial} = [b(h/2)(H/2)(1/2) - (B - 2E)(H/2 - e)(h/2 - e)(1/2)]A_{parcial}$

$S_{max} = [b(h/2)(H/2)(1/2) - (B - 2E)(H/2 - e)(h/2 - e)(1/2)]$

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{-3Q\left[2b(e-h) - (2e-h)^2\right]}{\left\{4e\left[b(4e^2 - 6eh + 3h^2) - (2e-h)^3\right]\right\}}$$

6.5. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil I.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Solución :

a) Esfuerzos Normales

y_{cg}= h/2

c = +/- h/2

I = bh_3/12-(b-e)$(h-2e)_3$/12

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M6h}{\left\{e\left[2b\left(4e^2 - 6eh + 3h^2\right) - (2e-h)^3\right]\right\}}$$

b) Esfuerzos Cortantes

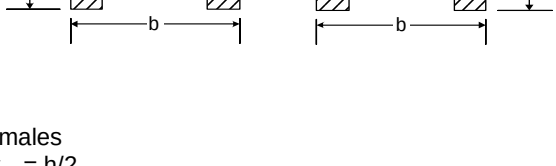
$A_{parcial}$ = [bh – (b - e)(h - 2e)]/2

$y_{cgparcial}$ = e(h/2 - e)(h/2 - e)/2 + be(h/2 - e+e/2) $A_{parcial}$

S_{max} = e(h/2-e)(h/2-e)/2 + be(h/2 – e + e/2)

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{-3Q\left[4b(e-h) - (2e-h)^2\right]}{\left\{2e\left[2b\left(4e^2 - 6eh + 3h^2\right) - (2e-h)^3\right]\right\}}$$

6.6. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil H



Solución :

a) Esfuerzos Normales

y_{cg} = h/2

c = +/- h/2

I = (b-2e)e^3/12 + 2eh^3/12

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{6Mh}{(b-2e)e^3 + 2eh^3}$$

b) Esfuerzos Cortantes

$A_{parcial}$ = bh/2 – (b-2e)(h/2-e/2)

$y_{cgparcial}$ = (bh/2)(h/4) - (b - 2e)(h/2 - e/2){e/2 + (h/2 - e/2)/2} $A_{parcial}$

S_{max} = (bh^2/8) - (b - 2e)(h-e)h/8

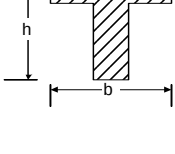
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

a) Esfuerzos Normales

$$y_{cg} = \frac{bh(h/2) - (b-e)(h-e)(h-e)(1/2)}{bh - (b-e)(h-e)}$$

$$y_{cg} = -\frac{b(e-2h) - (e-h)^2}{2(b-e+h)}$$

$c_1 = y_{cg}$

$c_2 = h - y_{cg}$

$$I = \frac{e\left[be^2 + (h-e)(e^2 - 2eh + 4h^2)\right]}{12} - \frac{eh^2(e-h)^2}{4(b-e+h)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{-6M\left[b(e-2h) - (e-h)^2\right]}{\left\{e\left[b^2e^2 - 2b(e-h)(e^2 - eh + 2h^2) + (e-h)^2(e^2 - 2eh + h^2)\right]\right\}}$$

b) Esfuerzos Cortantes

$A_{parcial} = [bh - (b - e)(h - 2e)]/2$

$y_{cgparcial} = e(h/2 - e)(h/2 - e)/2 + be(h/2 - e + e/2)\ A_{parcial}$

$S_{max} = e\ y_{cg2}/2$

$$S_{\max} = \frac{e\left[b(e-2h) - (e-h)^2\right]^2}{8(b-e+h)^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{3Q\left[b(e-2h) - (e-h)^2\right]^2}{\left\{2e\left[b^2e^2 - 2b(e-h)(e^2 - eh + 2h^2) + (e-h)^2 * (e^2 - 2eh + h^2)\right](b-e+h)\right\}}$$

6.8. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil circular.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

a) Esfuerzos Normales

$y_{cg} = d/2$

$c = +/- d/2$

$I = \pi d^4/32$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M(d/2)}{\frac{\pi d^4}{64}} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

b) Esfuerzos Cortantes

Aparcial = $\pi d2/2$

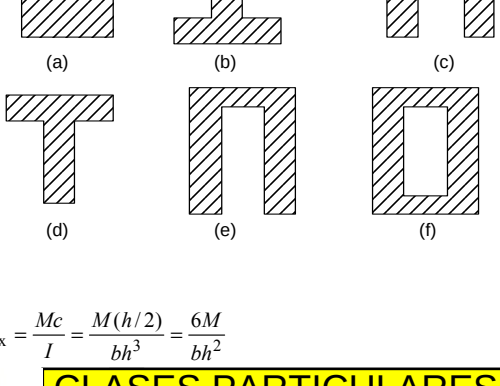
$y_{cgparcial} = 4/(3\pi)$

$S_{max} = A_p y_{cgparcial} = 2d^3/3$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q\frac{2d^3}{3}}{\frac{\pi d^4}{64}d} = \frac{\frac{Q32}{3}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$\tau_{max} = (4Q)/(3\ A)$

6.9. Comparar la relación esfuerzos normales vs. peso y esfuerzos cortantes vs. peso para los perfiles de la figura. Tomar Ancho = 6 cm, Alto = 12 cm y Espesor = 1 cm.



Solución :

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M(h/2)}{bh^3} = \frac{6M}{bh^2}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{-3Q\left[4b(e-h)-(2e-h)^2\right]}{\left\{2e\left[2b\left(4e^2-6eh+3h^2\right)-(2e-h)^3\right]\right\}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{6Mh}{(b-2e)e^3+2eh^3}$$

Para c)

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{3Q\left[bh^2-(b-2e)(h-e)\right]}{2\left[(b-2e)e^3+2eh^3\right]e}$$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{-6M\left[b(e-2h)-(e-h)^2\right]}{\left\{e\left[b^2e^2-2b(e-h)(e^2-eh+2h^2)+(e-h)^2(e^2-2eh+h^2)\right]\right\}}$$

Para d)

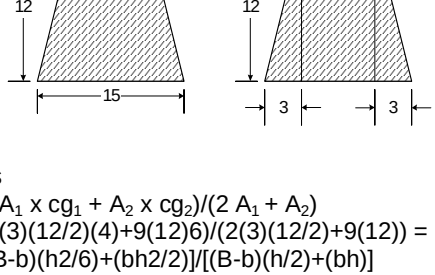
$$\tau_{max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{3Q\left[b(e-2h)-(e-h)^2\right]^2}{\left\{2e\left[b^2e^2-2b(e-h)(e^2-eh+2h^2)+(e-h)^2*(e^2-2eh+h^2)\right](b-e+h)\right\}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{3Mh}{e\left[b\left(4e^2-6eh+3h^2\right)-(2e-h)^3\right]}$$

Para e)

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{-3Q\left[2b(e-h)-(2e-h)^2\right]}{\left\{4e\left[b(4e^2-6eh+3h^2)-(2e-h)^3\right]\right\}}$$

6.10. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para un perfil trapezoidal.



Solución:

a) Esfuerzos Normales

y_{cg}= $(2A_1 \times cg_1 + A_2 \times cg_2)/(2\ A_1 + A_2)$

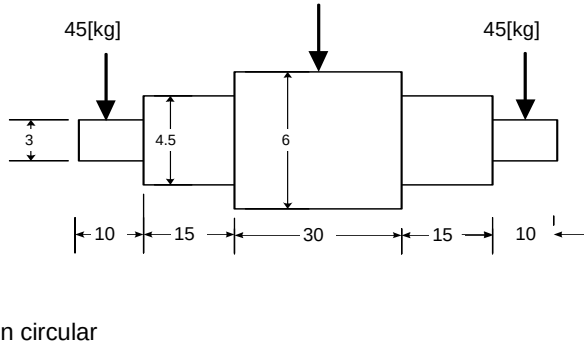
y_{cg}= (2(3)(12/2)(4)+9(12)6)/(2(3)(12/2)+9(12)) =

y_{cg}= [(B-b)(h2/6)+(bh2/2)]/[(B-b)(h/2)+(bh)]

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

6.11. En la figura se muestra un eje de una transmisión. En los puntos A, C y E van montados engranajes y en B y D los cojinetes de apoyo. Las fuerzas sobre los engranajes son todas verticales, el eje es simétrico y las dimensiones están en centímetros. Se pide calcular los esfuerzos normales de flexión y de corte máximos.



Solución:

Para una sección circular

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} c}{I} = \frac{16 M_{max}}{\pi d^3}$$

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Ib} = \frac{4Q}{3A}$$

Por la simetría y de la Estática

$R_a = R_b = (45 + 60 + 45)/2 = 75$ kg

En el eje de 3 $M_{max} = R_a\ 5 = 75(5) = 375$ Kg cm
$Q_{max} = R_a = 75$ Kg
$\sigma_{max} = 70.73$ Kg/cm^2
$\tau_{max} = 14.14$ Kg/cm^2

En el eje 4.5 $M_{max} = R_a\ 20 = 75(20) = 1500$ Kg cm
$Q_{max} = R_a = 75$ Kg
$\sigma_{max} = 83.83$ Kg/cm^2
$\tau_{max} = 6.2814$ Kg/cm^2

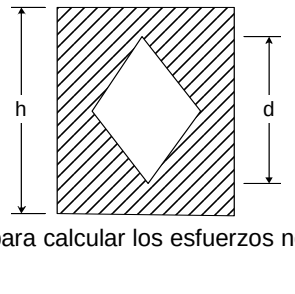
En el eje 6 $M_{max} = Ra\ 50 = 75(50) = 3750$ Kg cm

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

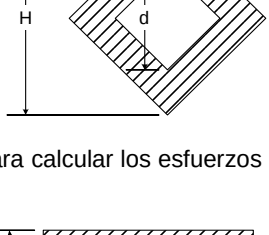
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS PROPUESTOS

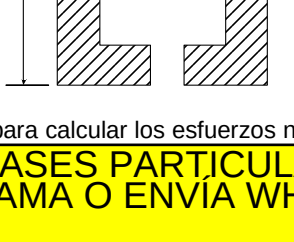
6.12. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



6.13. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



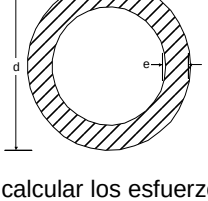
6.14. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



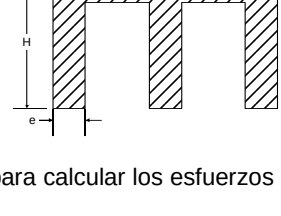
6.15. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

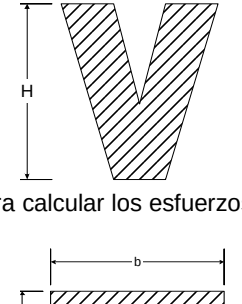
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



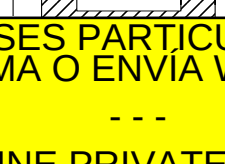
6.16. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



6.17. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



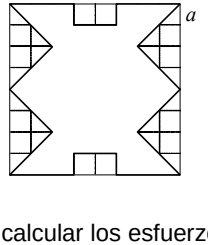
6.18. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



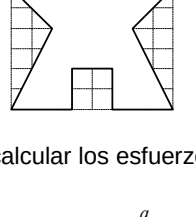
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

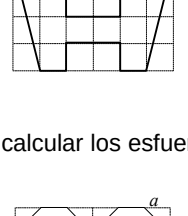
6.19. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



6.20. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



6.21. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.

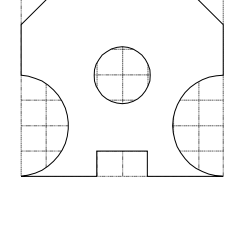


6.22. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

6.23. Hallar las expresiones para calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos para el perfil de la figura.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

7.- FLEXIÓN
Deformaciones

7.1.- INTRODUCCIÓN

Las piezas sometidas a cargas de flexión presentan deformaciones o deflexiones. El cálculo de estas deformaciones es muy importante para garantizar el buen comportamiento estructural, para verificar la resistencia y para resolver problemas hiperestáticos. En este capítulo se estudiarán tres métodos muy comunes usados para hallar las deformaciones que se presentan en vigas sometidas a flexión. Estos métodos son:a) Método de doble integración; b) Método de Superposición y c) Método del área del diagrama de momentos.

7.2.-LÍNEA ELÁSTICA

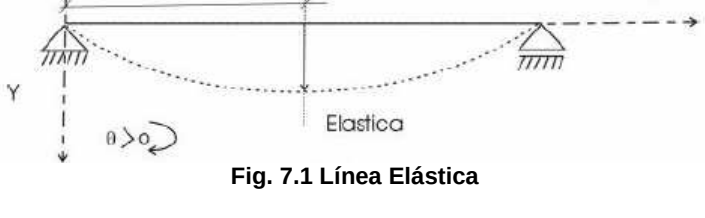


Fig. 7.1 Línea Elástica

Se denomina “Línea elástica” a la forma curvada que adopta el eje de una viga al producirse la deformación por acción de las cargas exteriores.

7.2.-MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

Para deducir la ecuación de la elástica se supone que las deformaciones son pequeñas y que ellas se deben solo a los momentos flectores.

Como se vio en el anterior capitulo, un segmento diferencial curvo de viga puede considerarse como un arco de círculo con centro en O y radio ρ.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

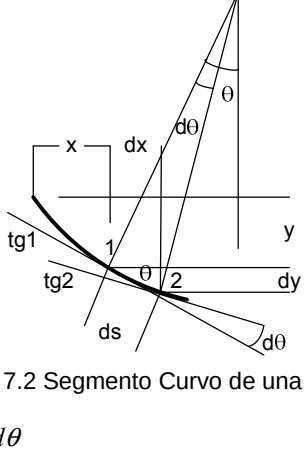


Fig. 7.2 Segmento Curvo de una Viga

Del Grafico $dx \approx ds = \rho d\theta$ (7.1

$$tg(\theta) \approx \theta = \frac{dy}{dx}$$ (7.2

De ambas $$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$ (7.3

Del anterior capitulo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$ (7.4

Finalmente $$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$ (7.5

Aparece un signo negativo porque para los ejes elegidos se ve valores crecientes de x corresponden a valores decrecientes de θ.

Si los desplazamientos no son pequeños debe utilizarse para la curvatura la expresión rigurosa

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 y/\partial x^2}{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Para la deducción de la ecuación de la elástica, en algunas circunstancias resulta más práctico usar las funciones de la fuerza de corte o de la carga

$$\frac{Q}{EI} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \qquad (7.7$$

$$\frac{p(x)}{EI} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \qquad (7.8$$

7.3.-MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Si tenemos un sólido elástico lineal al cual aplicamos un sistema de fuerzas (causa) se producirán distintos efectos, como por ejemplo: reacciones de apoyo, tensiones, deformaciones, solicitaciones, etc. (efectos).

En su expresión más general principio de superposición dice: “La relación entre causa y efecto es lineal.” Como consecuencia de ello:
A una causa C1 le corresponde un efecto E1
A una causa C2 le corresponde un efecto E2
A una causa C = α C1 + β C2 , α y β ctes, le corresponderá un efecto E = α E1 + β E2

El principio implica una absoluta linealidad entre las cargas y las deformaciones, esfuerzos o solicitaciones.
Esta linealidad no se da principalmente en los siguientes casos:
a) Cuando no se cumple la ley de Hooke, o sea, no existe linealidad entre tensiones y deformaciones.
b) Cuando la geometría de la estructura cambia en forma apreciable, y para el equilibrio es necesario tomar en cuenta la modificación sufrida por el sistema.

Según este principio, si el estado de carga en una viga puede descomponerse en “n” cargas más sencillas, la deformada total de la viga es la superposición de las “n” deformadas que producen cada una de las “n” cargas.

En una viga empotrada cuando la carga no llegue al extremo libre, el tramo que no soporta carga permanece recto por lo que fácilmente se pueden hallar las deformadas.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Fig. 7.3 Deformada de una viga empotrada sin carga en el extremo libre

$$\delta_{total} = \delta_1 + \delta_2 = \delta_1 (l \rightarrow a) + \theta (l-a) \qquad (7.9$$

7.4.- MÉTODO DEL ÁREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTOS

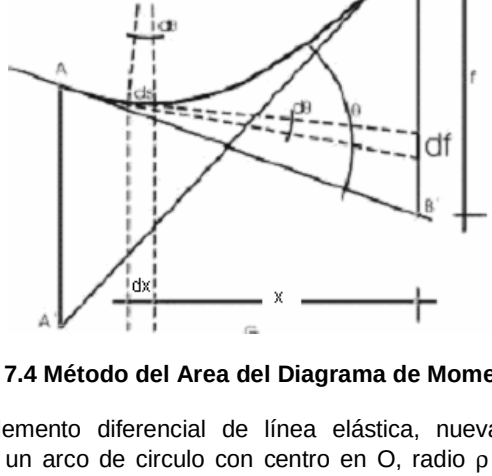


Fig. 7.4 Método del Area del Diagrama de Momentos

Considérese un elemento diferencial de línea elástica, nuevamente este puede considerarse como un arco de circulo con centro en O, radio ρ y subtendido por el ángulo dθ. Este ángulo es el mismo que existe entre las tangentes en los extremos del

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \qquad (7.11$$

Ecuación que da el área del diagrama de momentos y que es la base del:

TEOREMA I: El ángulo comprendido entre dos tangentes en dos puntos cualesquiera A y B de la línea elástica, es igual al área del diagrama de momentos reducido entre estos puntos.

De la figura se puede apreciar que el producto xd es la distancia vertical entre tangentes f en B. Integrando

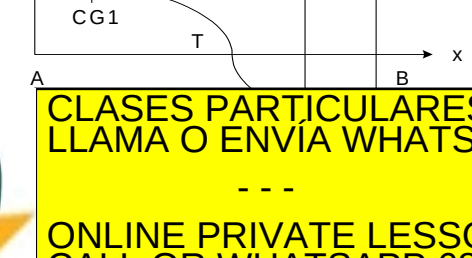
$$\delta_B = BB' = \int_A^B u d\theta = \int_A^B \frac{Mu}{EI} dx \qquad (7.12$$

TEOREMA II: Dado dos puntos A y B pertenecientes a una línea elástica, la ordenada de B respecto a la tangente en A es igual al momento estático con respecto a B del área de momentos reducidos comprendida entre A y B.
Este momento estático puede calcularse multiplicando el área total del diagrama de momentos reducidos comprendida entre A y B por la distancia a su centro de gravedad.

$$\delta_A = AA' = \int_A^B x d\theta = \int_A^B \frac{Mx}{EI} dx \qquad (7.13$$

Los dos teoremas anteriores se conocen como Teoremas de Mohr

En el caso de que el diagrama tenga áreas positivas y negativas, se realizará el procedimiento para cada área



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EI(\delta) = \text{Area (AT)}d_1 - \text{Area (TB)}\ d_2 \qquad (7.15$$

A continuación se muestran las áreas y centros de gravedad de figuras comunes:

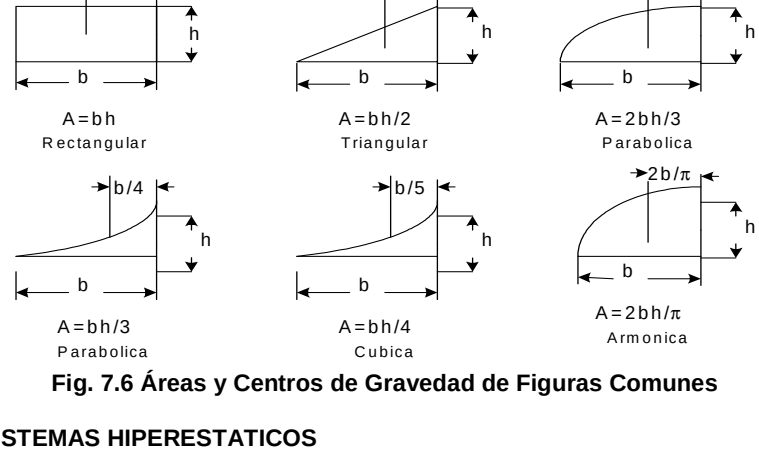


Fig. 7.6 Áreas y Centros de Gravedad de Figuras Comunes

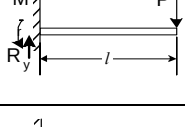
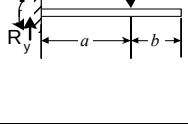
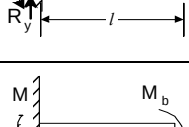
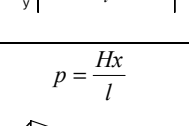
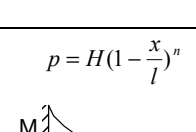
7.5.- SISTEMAS HIPERESTATICOS

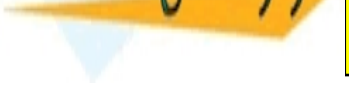
Los sistemas donde las ecuaciones de la Estática ($\Sigma F = 0$ y $\Sigma M = 0$) son en numero menores al numero de Cargas incógnitas que se desean hallar, no se pueden resolver y se conocen como estáticamente Indeterminados y en ellos se deben introducir ecuaciones adicionales de deformaciones.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Deflexiones de vigas simplemente empotradas

	$R_1 = P,\ R_2 = 0$ $M_1 = Pl,\ M_2 = 0$ $M = P(x-l)$ $Q = P$	$EIy = \frac{Px^2}{6}(x-3l)$ $EI\theta = \frac{Px}{2}(x-2l)$	$EIy_{\max} = \frac{Pl^3}{3}$ $EI\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2}$
	$R_1 = P,\ R_2 = 0$ $M_1 = Pa,\ M_2 = 0$ $M_a = P(x-a)$ $M_b = 0$ $Q_a = P$ $Q_b = 0$	$EIy_a = \frac{Px^2}{6}(x-3a)\ \ EI\theta_a = \frac{Px}{2}(x-2a)$ $0<x<a$ $EIy_b = \frac{Pa^2}{6}(a-3x)\ \ EI\theta_b = \frac{Pa^2}{2}$ $a<x<l$	$EIy_{\max} = \frac{Pa^2}{6}(a-3l)$ $EI\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2}$
	$R_1 = Hl,\ R_2 = 0$ $M_1 = Hl^2/2,\ M_2 = 0$ $M = (H/2)(x-l)2$ $Q = H(l-x)$	$EIy = \frac{Hx^2}{24}(4lx - x^2 - 6l^2)$ $EI\theta = \frac{Hx}{6}(3lx - x^2 - 3l^2)$	$EIy_{\max} = \frac{Hl^4}{8}$ $EI\theta_{\max} = \frac{Hl^3}{6}$
	$R_1 = 0,\ R_2 = 0$ $M_1 = Me,\ M_2 = Me$ $M = Me$ $Q = 0$	$EIy = \frac{Mx^2}{2}$ $EI\theta = Mx$	$EIy_{\max} = \frac{Ml^2}{2}$ $EI\theta_{\max} = Ml$
$p = \frac{Hx}{l}$ 	$R_1 = \frac{Hl}{2}\quad R_2 = 0$ $M_1 = \frac{Hl^2}{6}\quad M_2 = 0$ $M = \frac{Hl^2}{6}(1-\frac{x}{l})^3$ $Q = -\frac{Hl}{2}(1-\frac{x}{l})^2$	$EIy = \frac{Hx^2}{120l}(x^3 - 5lx^2 + 10l^2x - 10l^3)$ $EI\theta = \frac{Hx}{24l}(x^3 - 4x^2l + 6xl^2 + 4l^3)$	$EIy_{\max} = \frac{Hl^4}{30}$ $EI\theta_{\max} = \frac{Hl^3}{24}$
$p = H(1-\frac{x}{l})^n$ 	$R_1 = \frac{Hl}{n+1}\quad R_2 = 0$ $M_1 = \frac{Hl^2}{(n+1)(n+2)}$ $M_2 = 0$ $M = \frac{Hl^2}{(n+1)(n+2)}(1-\frac{x}{l})^{n+2}$	$EIy = -\frac{Hl^4[(1-\frac{x}{l})^{n+4} + (n+4)\frac{x}{l} - 1]}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ $EI\theta = -\frac{Hl^3[-(1-\frac{x}{l})^{n+3} + 1]}{(n+1)(n+2)(n+3)}$	$EIy_{\max} = \frac{Hl^4}{(n+1)(n+2)(n+4)}$ $EI\theta_{\max} = \frac{Hl^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$



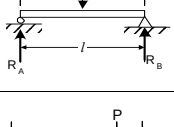
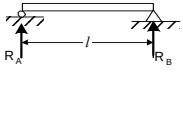
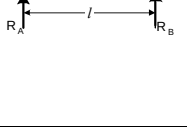
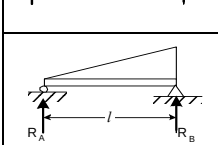
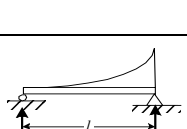
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Deflexiones de vigas simplemente apoyadas

	$R_1 = P/2$ $R_2 = P/2$ $M = Px/2$ $Q = P/2$	$EIy = \frac{Px}{12}(\frac{3}{4}l^2 - x^2)$ $EI\theta = \frac{P}{4}(\frac{l^2}{4} - x^2)$	$EIy_{max} = \frac{Pl^3}{48}$ $EI\theta_1 = EI\theta_2 = \frac{Pl^2}{16}$
	$R_1 = Pb/l$ $R_2 = Pa/l$ $M_a = Pbx/l$ $M_b = Pa(l-x)/l$ $Q_a = Pb/l$ $Q_b = -Pa/l$	$EIy_a = \frac{Pbx}{6l}(l^2 - x^2 - b^2)$ $EIy_b = \frac{Pb}{6l}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3 + (l^2-b^2)x - x^3\right]$ $EI\theta_a = \frac{Pb}{6}(l - \frac{3x^2}{l} - \frac{b^2}{l})$ $EI\theta_b = \frac{Pb}{6l}\left[\frac{3l}{b}(x-a)^2 + (l^2-b^2) - 3x^2\right]$	$EIy_{max} = \frac{Pb(l^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}l}$ en $x = \sqrt{(l^2-b^2)/3}$ $EI\theta_1 = \frac{Pb(l^2-b^2)}{6l}$ $EI\theta_2 = \frac{Pa(l^2-a^2)}{6l}$
	$R_1 = -M/l$ $R_2 = M/l$ $M_a = -Mx/l$ $M_b = -M(l-x)/l$ $Q_a = -M/l$ $Q_b = -M/l$	$EIy_a = \frac{M}{6l}(-x^3 + 6axl - 3a^2x - 2l^2x)$ $EIy_b = \frac{M}{6l}(-x^3 + 3x^2l - 3a^2x - 2l^2x + 3a^2l)$ $EI\theta_a = \frac{M}{6}(-3x^2 + 6al - 3a^2 - 2l^2)$ $EI\theta_b = \frac{M}{6}(-3x^2 + 6xl - 3a^2 - 2l^2)$	$EI\theta_1 = \frac{M}{6l}(6al - 3a^2 - 2l^2)$ $EI\theta_2 = \frac{M}{6l}(l^2 - 3a^2)$
	$R_1 = R_2 = Hl/2$ $M = \frac{Hxl}{2}(1 - \frac{x}{l})$ $Q = H(\frac{l}{2} - x)$	$EIy = \frac{Hx}{24}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$ $EI\theta = \frac{H}{24}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3)$	$EIy_{max} = \frac{5Hl^4}{384}$ $EI\theta_1 = EI\theta_2 = \frac{Hl^3}{24}$
	$R_1 = Hl/6$ $R_2 = Hl/3$ $M = \frac{Hxl}{6}(1 - \frac{x^2}{l^2})$ $Q = \frac{Hl}{6}(1 - \frac{3x^2}{l^2})$	$EIy = \frac{Hx}{360l}(7l^4 - 10l^2x^2 + 3x^4)$ $EI\theta = \frac{H}{360l}(7l^3 - 30lx^2 + 15x^4)$	$EIy_{max} = \frac{5Hl^4}{384}$ $EI\theta_1 = \frac{7Hl^4}{360}$ $EI\theta_2 = \frac{8Hl^4}{360}$
	$R_1 = Hl/(n+2)(n+1)$ $R_2 = Hl/(n+2)$ $M = \frac{Hlx(1 - x^{n+1}/l^{n+1})}{(n+2)(n+1)}$	$EIy = \frac{Hx}{(n+2)(n+1)}\left[\frac{lx^2 - l^3}{6} + \frac{l^{3+n} - x^{3+n}}{(n+4)(n+3)l^n}\right]$ $EI\theta = \frac{H}{2(n+1)}\left[\frac{3lx^2 - l^3}{3} + \frac{l^{3+n} - (n+4)x^{3+n}}{(n+4)(n+3)l^n}\right]$	$EI\theta_1 = \frac{Hl^3\left[\frac{1}{(n+4)(n+3)} - \frac{1}{6}\right]}{(n+2)(n+1)}$ $Hl^3\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right]$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

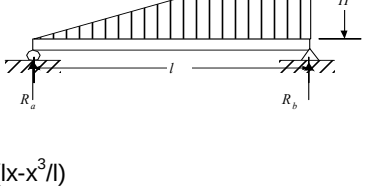
Cartagena99

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

a) Método de la doble integración

7.1. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

De 5.2 $M = (H/6)(lx-x^3/l)$

Integrando $EI\ y' = (H/6)(lx^2/2 - x^4/4l) + c1$

$EI\ y = (H/6)(lx^3/6 - x^5/20l) + c1\ x + c2$

x = 0 y = 0 $c2 = 0$

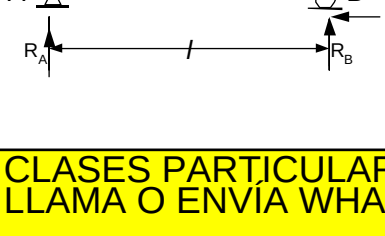
x = l y = 0 $0 = (H/6)(l4/6 - l4/20) + c1\ l$

$c1 = -(7H\ l^3/360)$

$$EIy' = \frac{H}{360l}(7l^3 - 30lx^2 + 15x^4)$$

$$EIy = \frac{Hx}{360l}(7l^4 - 10l^2x^2 + 3x^4)$$

7.2. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

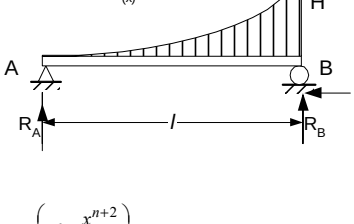
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

c1= -(H l^3/90)

$$EIy' = \frac{H}{12}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^5}{5l^2} - \frac{4l^3}{30}\right)$$

$$EIy = \frac{H}{12}\left(\frac{lx^5}{6} - \frac{x^6}{30l^2} - \frac{4l^3}{30}\right)$$

7.3. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

De 5.5

$$M = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(xl - \frac{x^{n+2}}{l^n}\right)$$

Integrando

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n}\right) + c_1$$

$$EIy = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n}\right) + c_1 x + c_2$$

x = 0 y = 0 c2 = 0

x = l y = 0

$$c_1 = -\frac{Hl^3}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+4)(n+3)}\right)$$

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)}\right)$$

$$EIy = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3 x}{6} + \frac{l^3 x}{(n+4)(n+3)}\right)$$

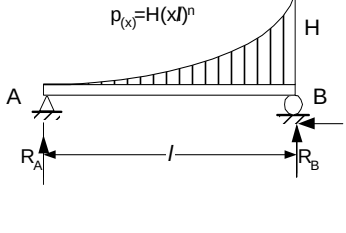
7.4. Hallar los valores de las pendientes en los extremos y la ubicación de la deformada máxima del sistema de la figura

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución:

Del problema anterior

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)}\right)$$

Para x = 0

$$\theta_{izq} = \frac{Hl^3}{(n+2)(n+1)}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{(n+4)(n+3)}\right)$$

Para x = l

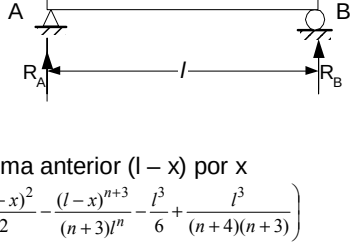
$$\theta_{der} = \frac{Hl^3}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{6} + \frac{1}{(n+4)(n+3)}\right)$$

La deformada máxima ocurre cuando y' = 0

$$\frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)} = 0$$

Ecuación de donde se despeja x

7.5. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



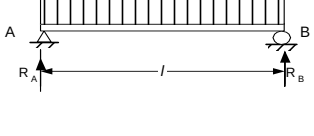
Solución:

Se reemplaza en el problema anterior (l – x) por x

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{l(l-x)^2}{2} - \frac{(l-x)^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)}\right)$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución:

Reemplazando n = 0 en los resultados del problema 7.3

$$EIy' = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^{n+3}}{(n+3)l^n} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{(n+4)(n+3)}\right) = \frac{H}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{4(3)}\right)$$

$$EIy' = \frac{H}{24}\left(6lx^2 - 4x^3 - l^3\right)$$

$$EIy = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{(n+4)(n+3)}\right) = \frac{H}{2}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{4(3)} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{4(3)}\right)$$

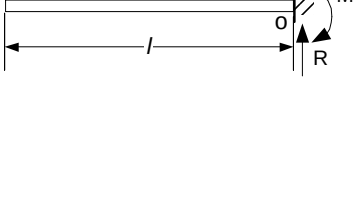
$$EIy = \frac{H}{24}\left(2lx^3 - x^4 - l^3x\right)$$

La deformada máxima ocurre en x=l/2 y la pendiente máxima ocurre en x = 0 y x = l

$$EIy_{\max} = \frac{5Hl^4}{384}$$

$$EIy'_{\max} = \frac{Hl^3}{24}$$

7.7. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

De 5.8

$$M = -H\frac{x^3}{6l}$$

Integrando

$$EIy' = -H\frac{x^4}{24l} + c_1$$

$$EIy = -H\frac{x^5}{120l} + c_1x + c_2$$

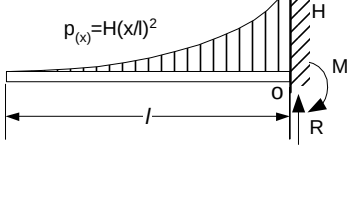
$$c_1 = \frac{Hl^3}{}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EIy = -\frac{H}{120}\left(\frac{x^5}{l} - l^3 x5 + l^4 4\right)$$

7.8. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

De 5.9
$$M = -H\frac{x^4}{12l^2}$$

Integrando
$$EIy' = -H\frac{x^5}{60l^2} + c_1$$

$$EIy = -H\frac{x^6}{360l^2} + c_1 x + c_2$$

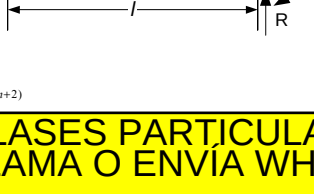
x = l y' = 0
$$c_1 = H\frac{l^3}{60}$$

x = l y = 0
$$c_2 = -H\frac{l^4}{72}$$

$$EIy' = -\frac{H}{60}\left(\frac{x^5}{l^2} - l^3\right)$$

$$EIy = -\frac{H}{360}\left(\frac{x^6}{l^2} - l^3 x6 + l^4 5\right)$$

7.9. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

$$M = -H\frac{x^{(n+2)}}{}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EIy = -H\frac{x^{(n+4)}}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)l^n} + c_1 x + c_2$$

Condiciones de Borde

x = l y' = 0

$$c_1 = H\frac{l^3}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

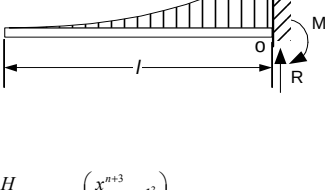
x = l y = 0

$$c_2 = -H\frac{l^4}{(n+4)(n+2)(n+1)}$$

$$EIy' = -\frac{H}{(n+3)(n+2)(n+1)}\left(\frac{x^{n+3}}{l^n} - l^3\right)$$

$$EIy = -\frac{H}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}\left(\frac{x^{n+4}}{l^n} - l^3 x(n+4) + l^4(n+3)\right)$$

7.10. Hallar los valores máximos de pendiente y deformación del sistema de la figura



Solución:

Del problema anterior

$$EIy' = -\frac{H}{(n+3)(n+2)(n+1)}\left(\frac{x^{n+3}}{l^n} - l^3\right)$$

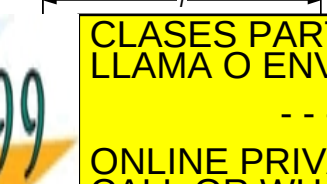
$$EIy = -\frac{H}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}\left(\frac{x^{n+4}}{l^n} - l^3 x(n+4) + l^4(n+3)\right)$$

La pendiente y deformada máximas ocurren cuando x = 0

$$EI\theta_{max} = \frac{Hl^3}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$EIy_{max} = -\frac{Hl^4}{(n+4)(n+2)(n+1)}$$

7.11. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura

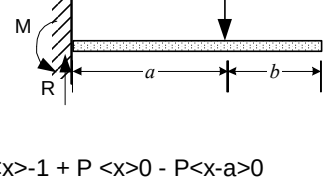


Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EIy = -\frac{H}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}\left(\frac{(l-x)^{n+4}}{l^n} - l^3(l-x)(n+4) + l^4(n+3)\right)$$

7.12. Hallar las ecuaciones de las pendientes, deformaciones y valores máximos de estos en el sistema de la figura usando funciones de singularidad



Solución:

De 5.14 Q(x)= -Pa <x>-1 + P <x>0 - P<x-a>0
M(x)= -Pa <x>0 + P <x>1 - P<x-a>1

Integrando
Ely´(x)= -Pa <x>1 + P <x>2/2 - P<x-a>2/2
Ely(x)= -Pa <x>2/2 + P <x>3/6 - P<x-a>3/6

Para 0<x<a
<x>n =xn
<x-a>n=0
entonces Ely´(x)= -Pa x + P x2/2
Ely(x)= -Pa x2/2 + P x3/6

$$EIy' = \frac{Px}{2}(x-2a)$$

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x-3a)$$

Para a<x<l
<x>n=xn
<x-a>n = (x-a)n
<x-l>n=0
Entonces Ely´(x)= -Pa x + P x2/2 – P (x-a)2/2
Ely´(x)= -Pa x + P x2/2 – Px2/2 + Pxa - Pa2/2 = - Pa2/2
Ely(x)= -Pa x2/2 + P x3/6 – P (x-a)3/6
Ely(x)= -Pa x2/2 + P x3/6 – Px3/6 + Px2a/2 – Pxa2/2 + Pa3/6
Ely(x)= – Pxa2/2 + Pa3/6

$$\frac{Pa^2}{}$$

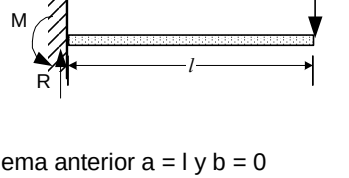
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EIy'_{\max} = -\frac{Pa^2}{2}$$

$$EIy_{\max} = \frac{Pa^2}{6}(a-3l)$$

7.13. Hallar las ecuaciones de las pendientes, deformaciones y valores máximos de estos en los sistemas de la figura



Solución:

Reemplazando en el problema anterior a = l y b = 0

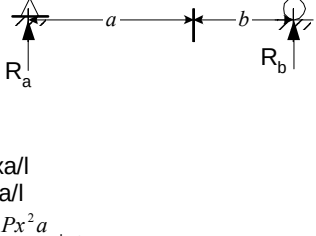
$$EIy' = \frac{Px}{2}(x-2l)$$

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x-3l)$$

$$EIy'_{\max} = \frac{Pl^2}{2}$$

$$EIy_{\max} = \frac{Pl^3}{3}$$

7.14. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución:

De 5.13

M1 = Px - Pxa/l

M2 = Pa- Pxa/l

Integrando

$$EIy'_1 = \frac{Px^2}{2} - \frac{Px^2 a}{2l} + c_1$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EIy_2 = \frac{Pax^2}{2} - \frac{Px^3 a}{6l} + c_3 x + c_4$$

x = 0 $y_1 = 0$ $\quad 0 = c_2$

x = a $y_1' = y_2'$ $\quad \frac{Pa^2}{2} - \frac{Pa^3}{2l} + c_1 = Pa^2 - \frac{Pa^3}{2l} + c_3$

x = a $y_1 = y_2$ $\quad \frac{Pa^3}{6} - \frac{Pa^4}{6l} + c_1 a + c_2 = \frac{Pa^3}{2} - \frac{Pa^4}{6l} + c_3 a + c_4$

x = l $y_2 = 0$ $\quad 0 = -\frac{Ml^3}{6l} + \frac{Ml^2}{2} + c_3 l + c_4$

De donde

$$c_1 = P(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6l} - \frac{al}{3})$$

$$c_3 = -P(\frac{a^3}{6l} + \frac{al}{3})$$

$$c_4 = \frac{Pa^3}{6}$$

y

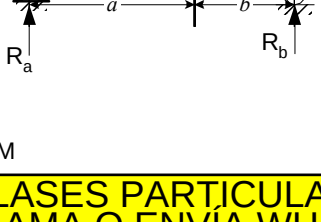
$$EIy_a = \frac{P}{6l}(lx^3 - x^3 a + 3a^2 lx - a^3 x - 2al^2 x)$$

$$EIy_b = \frac{P}{6l}(3ax^2 l - x^3 a - a^3 xl - 2al^2 x + a^3 l)$$

$$EI\theta_a = \frac{P}{6l}(3lx^2 - 3x^2 a + 3a^2 l - a^3 - 2al^2)$$

$$EI\theta_b = \frac{P}{6l}(6axl - 3x^2 a - a^3 l - 2al^2)$$

7.15. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



Solución :

De 5.16 $M_1 = -Mx/l$

$M_2 = -Mx/l + M$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EIy'_2 = -\frac{Mx^2}{2l} + Mx + c_3$$

$$EIy_2 = -\frac{Mx^3}{6l} + \frac{Mx^2}{2} + c_3 x + c_4$$

Condiciones de Borde

x = 0 $y_1 = 0$ $\quad 0 = c_2$

x = a $y_1' = y_2'$ $\quad -\frac{Ma^2}{2l} + c_1 = -\frac{Ma^2}{2l} + Ma + c_3$

x = a $y_1 = y_2$ $\quad -\frac{Ma^3}{6l} + c_1 a + c_2 = -\frac{Ma^3}{6l} + \frac{Ma^2}{2} + c_3 a + c_4$

x = l $y_2 = 0$ $\quad 0 = -\frac{Ml^3}{6l} + \frac{Ml^2}{2} + c_3 l + c_4$

De donde

$$c_1 = M\left(a - \frac{a^2}{2l} - \frac{l}{3}\right)$$

$$c_3 = -M\left(\frac{a^2}{2l} + \frac{l}{3}\right)$$

$$c_4 = \frac{Ma^2}{2}$$

y

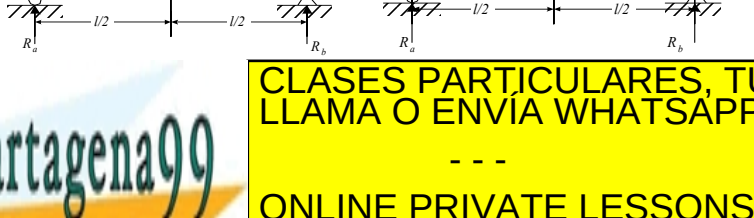
$$EIy_a = \frac{M}{6l}(-x^3 + 6axl - 3a^2 x - 2l^2 x)$$

$$EIy_b = \frac{M}{6l}(-x^3 + 3x^2 l - 3a^2 x - 2l^2 x + 3a^2 l)$$

$$EI\theta_a = \frac{M}{6}(-3x^2 + 6al - 3a^2 - 2l^2)$$

$$EI\theta_b = \frac{M}{6}(-3x^2 + 6xl - 3a^2 - 2l^2)$$

7.15. Hallar las ecuaciones de las pendientes y deformaciones del sistema de la figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

EI y_1= - $Hx^5/(60l)+Hlx^3/24+c1x+c2$

Condiciones de Borde

x = 0 y_1 = 0 c2 = 0

x = l/2 y_1'=0 $0 = - H(l/2)^4/(12l) + (Hl/8)(l/2)^2 + c3$

$c3 = - 5Hl^3/192$

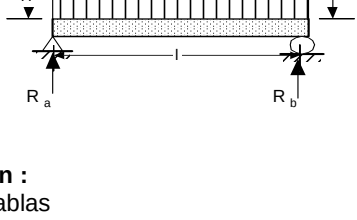
$$EIy' = H\left(-\frac{x^4}{12l}+\frac{lx^2}{8}-\frac{5l^3}{192}\right)$$

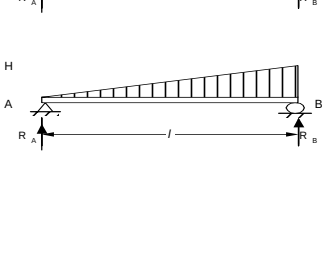
$$EIy = H\left(-\frac{x^5}{60l}+\frac{lx^3}{24}-\frac{5l^3x}{192}\right)=\frac{H}{960l}(-16x^5+40l^2x^3-25xl^4)$$

Estas ecuaciones sólo son validas cuando 0<x<l/2

b) Método de Superposición

7.16. Hallar por superposición la ecuación de la deformación del sistema de la figura





Solución :

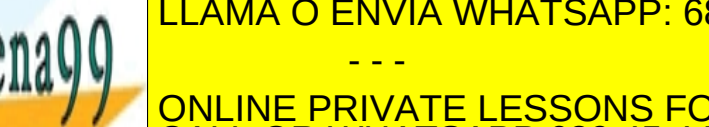
De las tablas

Para 1 $$EIy_1 = \frac{Hx}{24}\left(l^3-2lx^2+x^3\right)$$

Para 2 $$EIy_2 = \frac{Hx}{360l}\left(7l^4-10l^2x^2+3x^4\right)$$

$$EIy_{Total} = \frac{Hx}{360}\left(22l^3-40lx^2+\frac{3x^4}{l}+15x^3\right)$$

7.17. Hallar por superposición la ecuación de la deformación del sistema de la figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Solución :

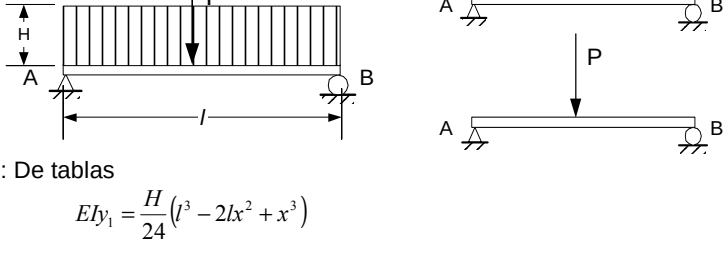
Para 1
$$EIy_1 = \frac{Hx}{24}\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right)$$

Para 2
$$EIy_2 = \frac{Hx}{960l}\left(25l^4 - 40l^2x^2 + 16x^4\right)$$

Entonces
$$EIy_{tot} = \frac{Hx}{24}\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right) + \frac{Hx}{960l}\left(25l^4 - 40l^2x^2 + 16x^4\right)$$

Esta ec es valida solo en la mitad izquierda

7.18. Hallar por superposición la ecuación de la deformación del sistema de la figura



Solución : De tablas

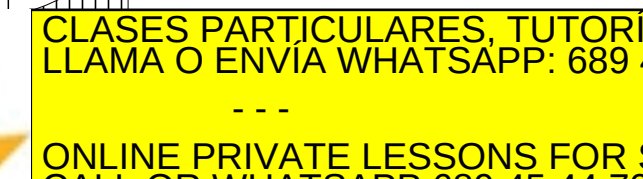
Para 1
$$EIy_1 = \frac{H}{24}\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right)$$

Para 2 de 7.15 con a = b =l/2
$$EIy_2 = \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2)$$

Entonces
$$EIy_{tot} = \frac{Hx}{24}\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right) + \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2)$$

Ecuación valida solo en la mitad izquierda

7.19. Hallar por superposición la ecuación de la deformación del sistema de la figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Para 1

$$EIy_1 = \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2)$$

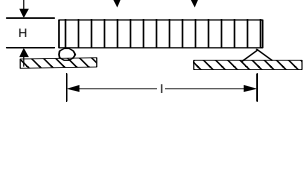
Para 2

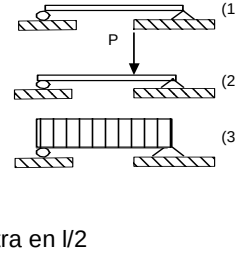
$$EIy_2 = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{(n+4)(n+3)}\right)$$

$$EIy_{Tot} = \frac{H}{(n+2)(n+1)}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)l^n} - \frac{l^3x}{6} + \frac{l^3x}{(n+4)(n+3)}\right) + \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2)$$

Ecuación valida solo en la mitad izquierda

7.20. Hallar por superposición la deformación máxima del sistema de la figura





Solución :

Por la simetría, la deformación máxima se encuentra en l/2

La deformación en l/2 producida por la carga 2 se obtiene de

$$EIy_a = \frac{Pbx}{6l}\left(l^2 - x^2 - b^2\right)$$

con x = l/2; a = 2l/3 y b = l/3

$$EIy_2 = \frac{P(\frac{l}{3})(\frac{l}{2})}{6l}\left(l^2 - \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{9}\right) = \frac{23Pl^3}{1296}$$

Por la simetría la deformación en l/2 producida por la carga 1 es la misma

$$EIy_1 = \frac{23Pl^3}{1296}$$

La deformación en l/2 producida por la carga 3 se obtiene de

$$EIy_3 = \frac{Hx}{24}\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right)$$

con x = l/2

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

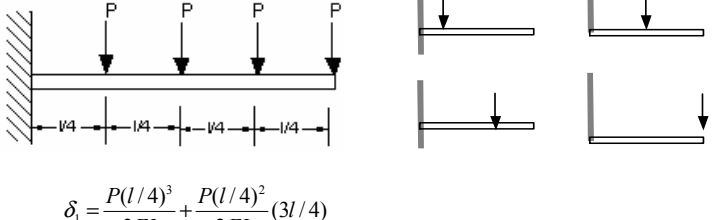
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EI\delta_{\max} = \frac{2(23)Pl^3}{1296} + \frac{5Hl^4}{384}$$

7.21. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

$$\delta_1 = \frac{P(l/4)^3}{3EI} + \frac{P(l/4)^2}{2EI}(3l/4)$$

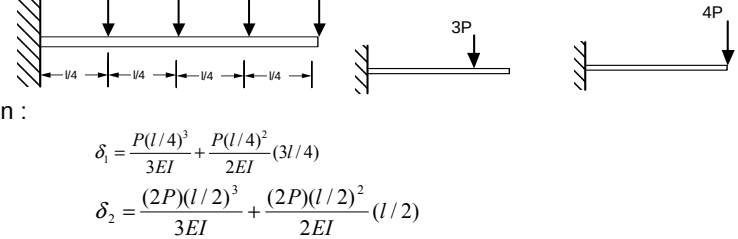
$$\delta_2 = \frac{(P)(l/2)^3}{3EI} + \frac{(P)(l/2)^2}{2EI}(l/2)$$

$$\delta_3 = \frac{(P)(3l/4)^3}{3EI} + \frac{(P)(3l/4)^2}{2EI}(l/4)$$

$$\delta_4 = \frac{(P)(l)^3}{3EI}$$

$$\delta_{Tot} = \frac{Pl^3}{EI}\left[\frac{1}{(64)3} + \frac{3}{(64)2} + \frac{1}{(8)3} + \frac{1}{(8)2} + \frac{3^3}{(64)3} + \frac{3^2}{(64)2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{65Pl^3}{96EI}$$

7.22. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

$$\delta_1 = \frac{P(l/4)^3}{3EI} + \frac{P(l/4)^2}{2EI}(3l/4)$$

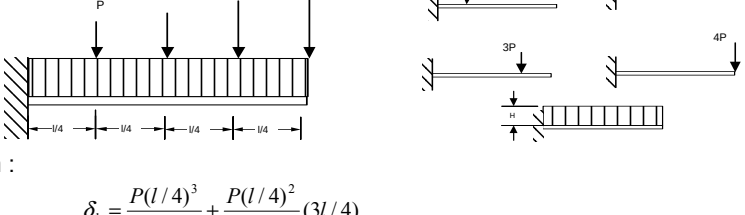
$$\delta_2 = \frac{(2P)(l/2)^3}{3EI} + \frac{(2P)(l/2)^2}{2EI}(l/2)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\delta_{Tot} = \frac{Pl^3}{EI}\left[\frac{1}{(64)3} + \frac{3}{(64)2} + \frac{2}{(8)3} + \frac{2}{(8)2} + \frac{3^4}{(64)3} + \frac{3^3}{(64)2} + \frac{4}{3}\right] = \frac{141Pl^3}{64EI}$$

7.23. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

$$\delta_1 = \frac{P(l/4)^3}{3EI} + \frac{P(l/4)^2}{2EI}(3l/4)$$

$$\delta_2 = \frac{(2P)(l/2)^3}{3EI} + \frac{(2P)(l/2)^2}{2EI}(l/2)$$

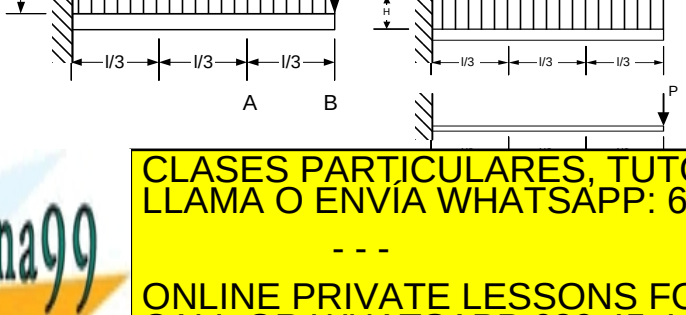
$$\delta_3 = \frac{(3P)(3l/4)^3}{3EI} + \frac{(3P)(3l/4)^2}{2EI}(l/4)$$

$$\delta_4 = \frac{(4P)(l)^3}{3EI}$$

$$\delta_5 = \frac{(H)(l)^4}{8EI}$$

$$\delta_{tot} = \frac{l^3}{64\,EI}\left(108\,P + 8Hl\right)$$

7.24. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Para 2
con x=2l/3

$$EIy = \frac{Hx^2}{24}(4lx - x^2 - 6l^2)$$

$$EI\delta_{2A} = \frac{(H)(2l/3)^2}{24}\left[4l(\frac{2l}{3}) - (\frac{2l}{3})^2 - 6l^2\right] = \frac{17Hl^4}{243}$$

Para 3

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x - 3l)$$

Con x=2l/3

$$EI\delta_{3A} = \frac{P(2l/3)^2}{6}\left[\frac{2l}{3} - 3l\right] = \frac{7Pl^3}{162}$$

$$EI\delta_{totA} = \frac{16Hl^4}{1215} + \frac{17Hl^4}{243} + \frac{14Pl^3}{81}$$

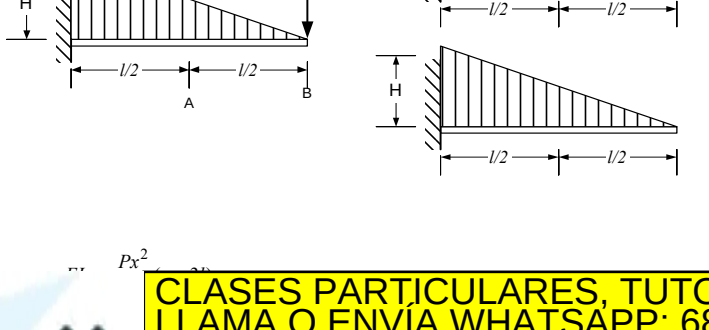
$$EI\delta_{1B} = \frac{(2H)(2l/3)^4}{30} + \frac{(2H)(2l/3)^3}{24}\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{26Hl^4}{1215}$$

$$EI\delta_{2B} = \frac{(H)(l)^4}{8}$$

$$EI\delta_{3B} = \frac{P(l)^3}{3}$$

$$EI\delta_{totB} = \frac{26Hl^4}{1215} + \frac{Hl^4}{8} + \frac{Pl^3}{3}$$

7.25. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



Solución :

$$\frac{Px^2}{}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Para 2

$$EIy = \frac{Hx^2}{120l}(x^3 - 5lx^2 + 10l^2x - 10l^3)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{2A} = \frac{H(l/2)^2}{120l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - 5l\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 10l^2\left(\frac{l}{2}\right) - 10l^3\right] = \frac{49Hl^4}{3840}$$

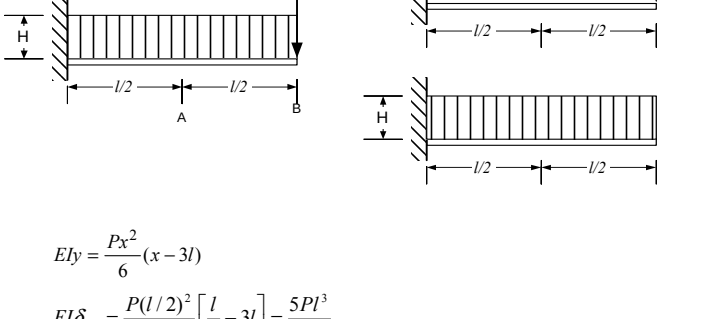
$$EI\delta_{totA} = \frac{5Pl^3}{48} + \frac{49Hl^4}{3840}$$

$$EI\delta_{1B} = \frac{Pl^3}{3}$$

$$EI\delta_{2B} = \frac{Hl^4}{30}$$

$$EI\delta_{totB} = \frac{Pl^3}{3} + \frac{Hl^4}{30}$$

7.26. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



Solución :

Para 1

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x - 3l)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{1A} = \frac{P(l/2)^2}{6}\left[\frac{l}{2} - 3l\right] = \frac{5Pl^3}{48}$$

Para 2

$$EIy = \frac{Hx^2}{24}(4lx - x^2 - 6l^2)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{2A} = \frac{H(l/2)^2}{24}\left[4l\left(\frac{l}{2}\right) - \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 6l^2\right] = \frac{17Hl^4}{384}$$

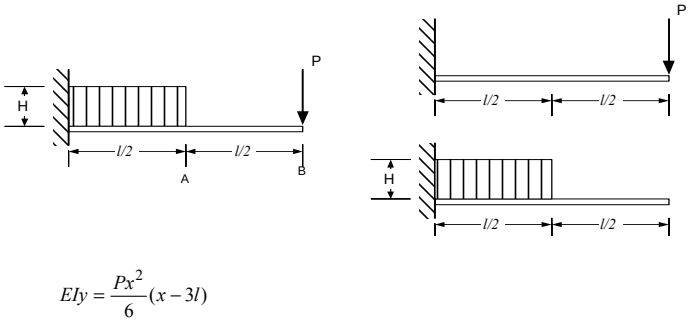
$$EI\delta_{totA} = \frac{5Pl^3}{48} + \frac{17Hl^4}{384}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EI\delta_{totB} = \frac{Pl^3}{3} + \frac{Hl^4}{8}$$

7.27. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



Solución :

Para 1

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x - 3l)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{1A} = \frac{P(l/2)^2}{6}\left[\frac{l}{2} - 3l\right] = \frac{5Pl^3}{48}$$

Para 2

$$EI\delta_{2A} = \frac{H\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8}$$

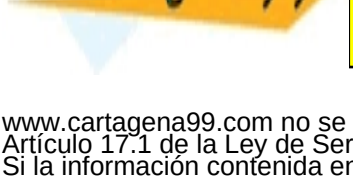
$$EI\delta_{totA} = \frac{5Pl^3}{48} + \frac{Hl^4}{128}$$

$$EI\delta_{1B} = \frac{Pl^3}{3}$$

$$EI\delta_{2B} = \frac{H\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8} + \frac{H\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{7Hl^4}{384}$$

$$EI\delta_{totB} = \frac{Pl^3}{3} + \frac{7Hl^4}{384}$$

7.28. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura

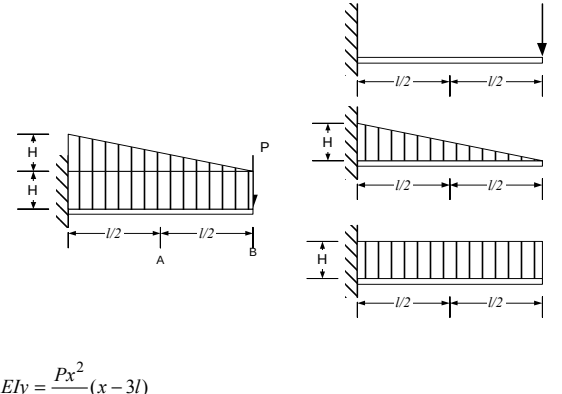


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

Para 1

$$EIy = \frac{Px^2}{6}(x - 3l)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{1A} = \frac{P(l/2)^2}{6}\left[\frac{l}{2} - 3l\right] = \frac{5Pl^3}{48}$$

Para 2

$$EIy = \frac{Hx^2}{120l}(x^3 - 5lx^2 + 10l^2x - 10l^3)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{2A} = \frac{H(l/2)^2}{120l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - 5l\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 10l^2\left(\frac{l}{2}\right) - 10l^3\right] = \frac{49Hl^4}{3840}$$

Para 3

$$EIy = \frac{Hx^2}{24}(4lx - x^2 - 6l^2)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{3A} = \frac{H(l/2)^2}{24}\left[4l\left(\frac{l}{2}\right) - \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 6l^2\right] = \frac{17Hl^4}{384}$$

$$EI\delta_{totA} = \frac{5Pl^3}{48} + \frac{49Hl^4}{3840} + \frac{17Hl^4}{384}$$

$$EI\delta_{1B} = \frac{Pl^3}{3}$$

$$EI\delta_{2B} = \frac{Hl^4}{30}$$

$$EI\delta_{3B} = \frac{Hl^4}{8}$$

$$\frac{Pl^3}{} \quad \frac{Hl^4}{} \quad \frac{Hl^4}{}$$

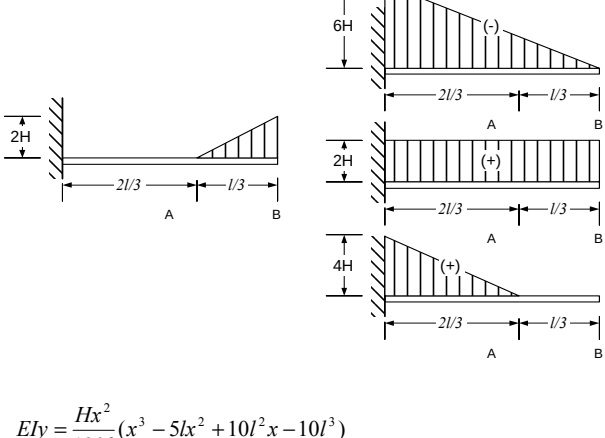
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

Para 1

$$EIy = \frac{Hx^2}{120l}(x^3 - 5lx^2 + 10l^2x - 10l^3)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{1A} = \frac{-6H(2l/3)^2}{120lEI}\left[(\frac{2l}{3})^3 - 5l(\frac{2l}{3})^2 + 10l^2(\frac{2l}{3}) - 10l^3\right] = -\frac{142Hl^4}{1215}$$

Para 2

$$EIy = \frac{Hx^2}{24}(4lx - x^2 - 6l^2)$$

Con x=l/2

$$EI\delta_{2A} = \frac{2H}{24}(\frac{2l}{3})^2\left[-(\frac{2l}{3})^2 + 4l(\frac{2l}{3}) - 6l^2\right] = \frac{34Hl^4}{243}$$

Para 3

$$EI\delta_{3A} = \frac{4H\left(\frac{2l}{3}\right)^4}{30} = \frac{32Hl^4}{1215}$$

$$EI\delta_{totA} = \frac{-142Hl^4}{1215} + \frac{34Hl^4}{243} + \frac{32Hl^4}{1215}$$

$$EI\delta_{1B} = -\frac{(6H)(l)^4}{30}$$

$$EI\delta_{2B} = \frac{(2H)(l)^4}{8}$$

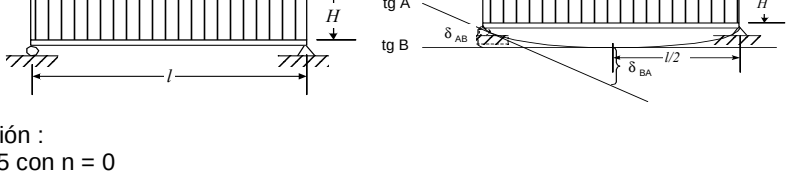
$$EI\delta_{3B} = \frac{(4H)(2l/3)^4}{30} + \frac{(4H)(2l/3)^3}{24}(l/3) = \frac{52Hl^4}{1215}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

c) Método del Área del diagrama de Momentos

7.30. Hallar por el método del área del diagrama de momentos la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :
De 5.5 con n = 0

$$M = \frac{H}{2}(lx - x^2)$$

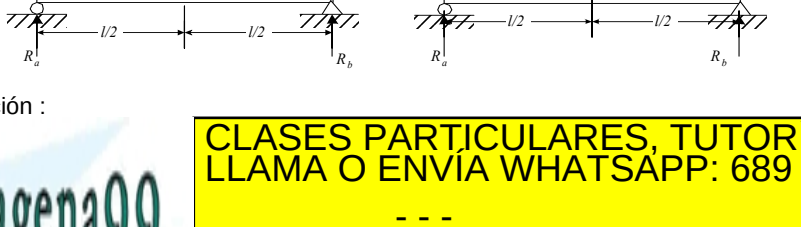
$$\delta_{AB} = \delta_{\max} = \int_0^{l/2} \frac{H}{2EI}(lx - x^2)xdx$$

$$\delta_{AB} = \delta_{\max} = \frac{5Hl^4}{384EI}$$

$$\theta_{AB} = \theta_{\max} = \int_0^{l/2} \frac{H}{2EI}(lx - x^2)dx$$

$$\theta_{AB} = \frac{Hl^3}{24EI}$$

7.31. Hallar por el método del área del diagrama de momentos la deformada máxima del sistema de la figura



Solución :

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

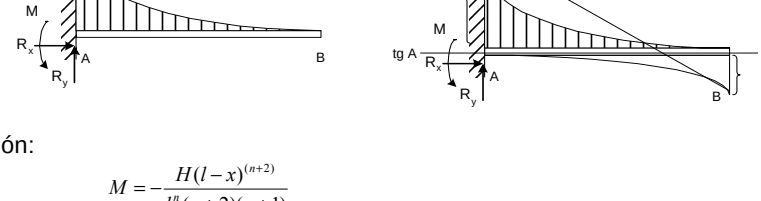
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$EI\delta_{AB} = \delta_{\max} = \frac{Hl^4}{120}$$

$$EI\theta_{AB} = \theta_{\max} = \int_0^{l/2} H(-\frac{x^3}{3l} + \frac{lx}{4})dx = H\left(-\frac{x^4}{12l} + \frac{lx^2}{8}\right)_0^{l/2}$$

$$EI\theta_{AB} = \theta_{\max} = \frac{5Hl^3}{192}$$

7.32. Hallar por el método del área del diagrama de momentos la deformada máxima del sistema de la figura. $p = H\,(1 - x/l)^n$



Solución:

De 5.12

$$M = -\frac{H(l-x)^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$$

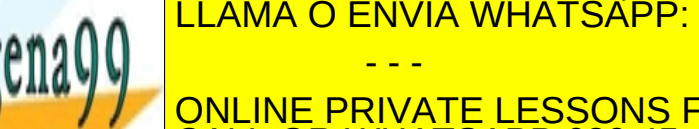
$$EI\delta_{BA} = \delta_{\max} = \int_0^l \frac{H(l-x)^{n+2}}{l^n(n+2)(n+1)}(l-x)dx = \frac{-H(l-x)^{n+4}}{l^n(n+4)(n+2)(n+1)}\Bigg|_0^l$$

$$EI\delta_{BA} = \delta_{\max} = \frac{Hl^4}{(n+4)(n+2)(n+1)}$$

$$EI\theta_{AB} = \theta_{\max} = \int_0^l \frac{H(l-x)^{n+2}}{l^n(n+2)(n+1)}dx = \frac{-H(l-x)^{n+3}}{l^n(n+3)(n+2)(n+1)}\Bigg|_0^l$$

$$EI\theta_{AB} = \theta_{\max} = \frac{Hl^3}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

7.33. Hallar por el método del área del diagrama de momentos la deformada máxima del sistema de la figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

De 5.3

$$M = \frac{Hlx}{6}(1-\frac{x^2}{l^2}) = \frac{H}{6}(lx-\frac{x^3}{l})$$

$$EI\delta_{AC} = \int_0^l \frac{H}{6}(lx-\frac{x^3}{l})(l-x)dx$$

$$EI\delta_{AC} = \frac{H}{6}(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{lx^3}{3}-\frac{lx^4}{4l}+\frac{x^5}{5l}) = \frac{Hl^4}{6(60)}(30-20-15+12) = \frac{7Hl^4}{360}$$

Trigonometría Tg θAB= δAC/l

$$\theta_{AB} = \frac{7Hl^3}{360EI}$$

Además

$$EI\theta_{AB} = \int_0^{x_b} \frac{H}{6}(lx-\frac{x^3}{l})dx = \frac{H}{6}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^4}{4l}\right)_0^{x_b} = \frac{H}{6}(\frac{lx_b{}^2}{2}-\frac{x_b{}^4}{4l})$$

Igualando

$$EI\theta_{AB} = \frac{7Hl^3}{360} = \frac{H}{6}(\frac{lx_b{}^2}{2}-\frac{x_b{}^4}{4l})$$

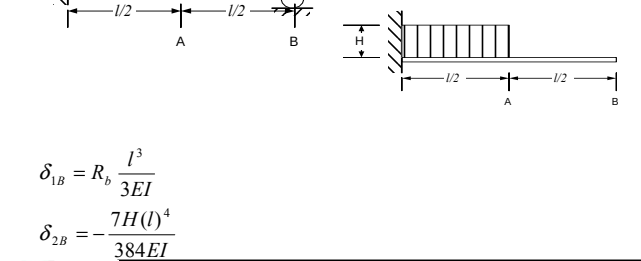
$$15x_b{}^4 - 30lx_b{}^2 + 7l^3 = 0$$

De donde xb = 0,519 l

$$EI\delta_{\max} = \int_0^{0,519l} \frac{H}{6}(lx-\frac{x^3}{l})xdx = \frac{2,5Hl^4}{384}$$

d) Sistemas Hiperestáticos

7.34. Determinar la reacción del punto B de la viga mostrada en la figura.



Solución:

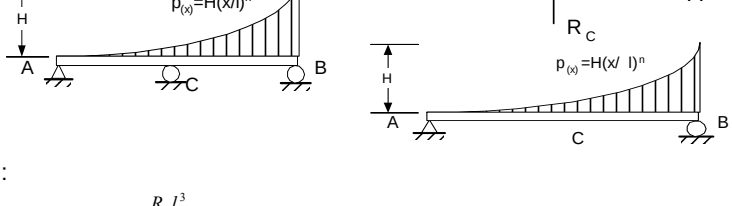
$$\delta_{1B} = R_b\frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{2B} = -\frac{7H(l)^4}{384EI}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

7.35. Determinar la reacción en el punto medio de la viga mostrada de la figura



Solución:

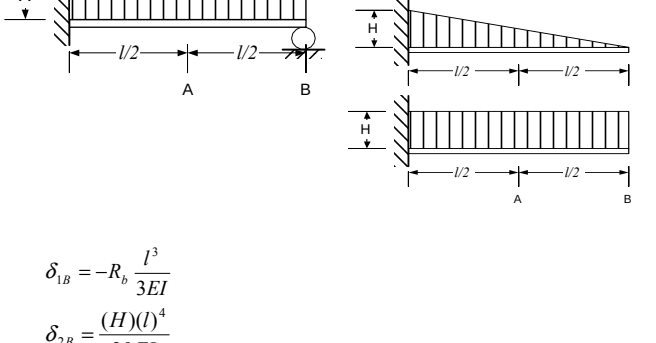
$$\delta_{B1} = -\frac{R_c l^3}{48EI}$$

$$\delta_{B2} = \frac{H}{EI(n+2)(n+1)}\left(\frac{l^4}{48} - \frac{l^4}{(n+4)(n+3)2^{n+4}} - \frac{l^4}{12} + \frac{l^4}{(n+4)(n+3)}\right)$$

$$\delta_B = \delta_{B1} + \delta_{B2} = 0$$

$$R_C = -3 \cdot l \cdot H \cdot \frac{\left[n^2 + 7 \cdot n + 16 \cdot (n+3)^{(-n-4)} \cdot n + 48 \cdot (n+3)^{(-n-4)} - 4\right]}{\left[(n+3) \cdot \left(n^3 + 7 \cdot n^2 + 14 \cdot n + 8\right)\right]}$$

7.36. Determinar la expresión para hallar la reacción en el punto B de la viga mostrada en la figura



Solución:

$$\delta_{1B} = -R_b \frac{l^3}{3EI}$$

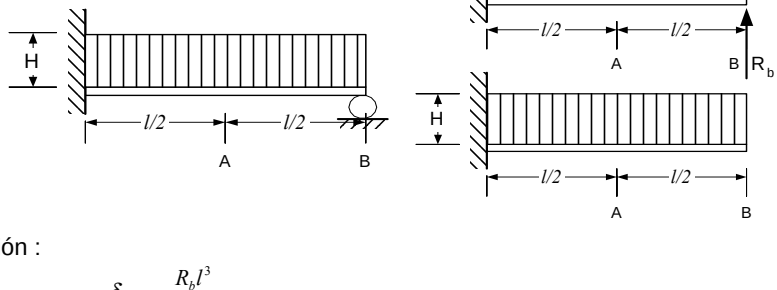
$$\delta_{2B} = \frac{(H)(l)^4}{30EI}$$

$$\frac{(H)(l)^4}{}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

7.37. Determinar la reacción del apoyo B, de la viga mostrada en la figura.



Solución :

$$\delta_{1B} = -\frac{R_b l^3}{3EI}$$

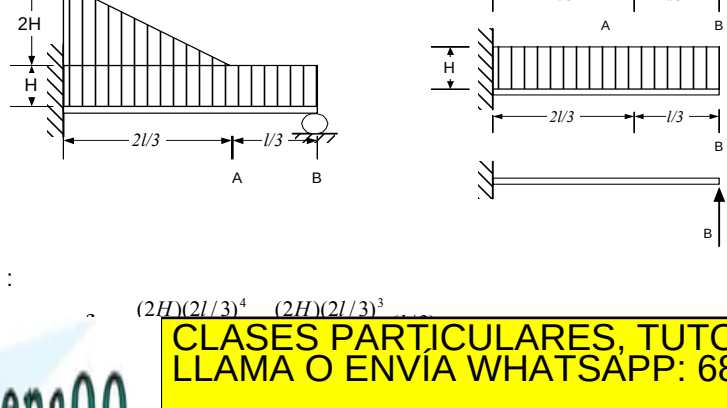
$$\delta_{2B} = \frac{(H)(l)^4}{8EI}$$

$\delta_B = \delta_{1B} + \delta_{2B} = 0$

$$R_B = \frac{3Hl}{8}$$

de donde:

7.38. Determinar la expresión para hallar la fuerza de reacción que ocurre en el punto B



Solución :

$$\frac{(2H)(2l/3)^4}{\quad} \quad \frac{(2H)(2l/3)^3}{\quad}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\delta_{3B} = -\frac{R_b (l)^3}{3EI}$$

por superposición

$$\delta_B = \delta_{1B} + \delta_{2B} + \delta_{3B} = 0$$

de donde:

$$R_B = \frac{1343Hl}{3240} + \frac{8Hl}{27(12)}$$

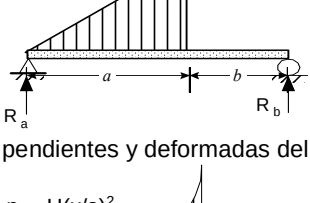
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

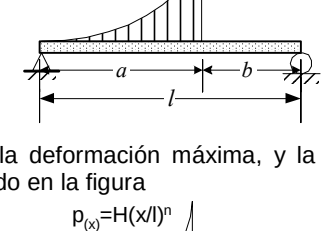
PROBLEMAS PROPUESTOS

a) Método de la doble integración

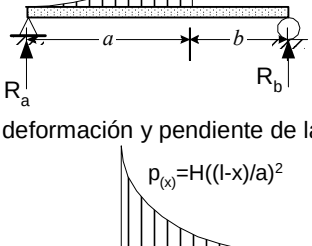
7.39. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura
p(x)= H(x/l)



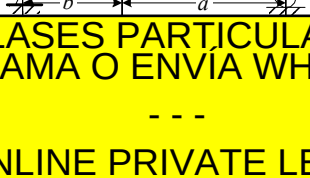
7.40. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura



7.41. Hallar la posición de la deformación máxima, y la expresión para determinar esta, para el sistema mostrado en la figura

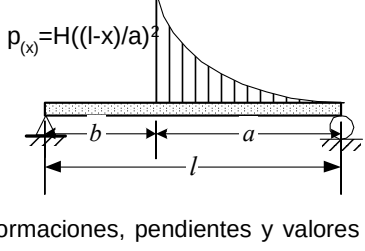


7.42. Hallar las funciones de deformación y pendiente de la figura

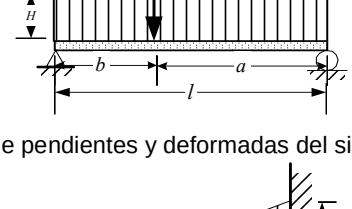


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

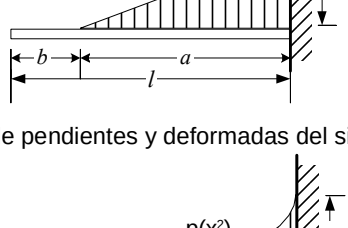
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



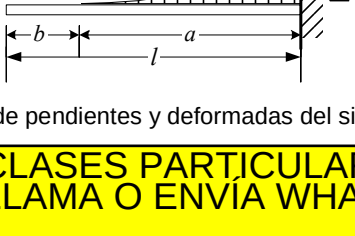
7.44. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en los sistemas de la figura



7.45. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura



7.46. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura



7.47. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura

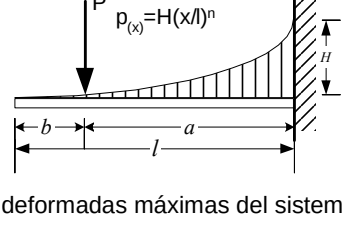
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

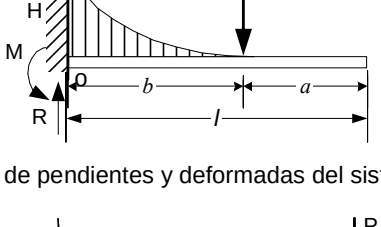
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

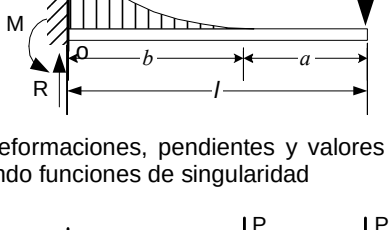
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



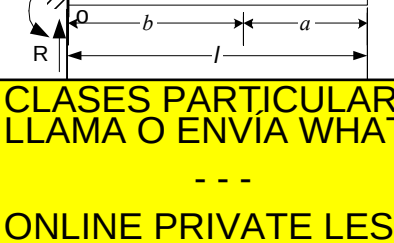
7.48. Hallar la pendiente y deformadas máximas del sistema de la figura



7.49. Hallar las funciones de pendientes y deformadas del sistema de la figura

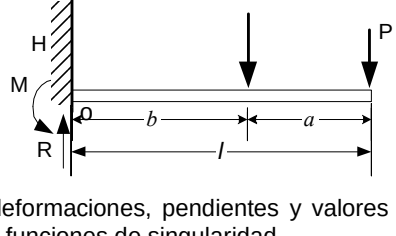


7.50. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en el sistema de la figura usando funciones de singularidad

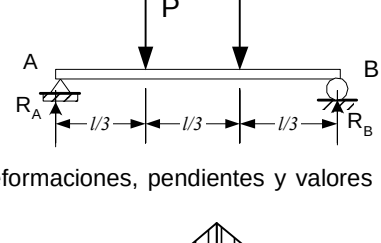


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

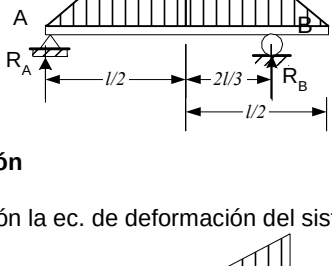
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



7.52. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en el sistema de la figura por funciones de singularidad

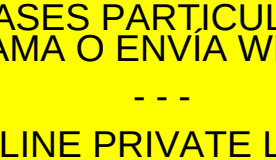


7.53. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en los sistemas de la figura



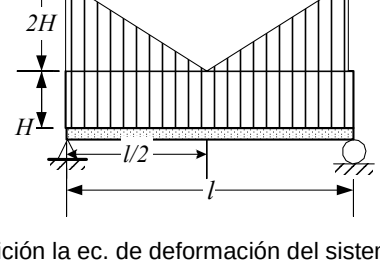
b) Método de superposición

7.54. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura

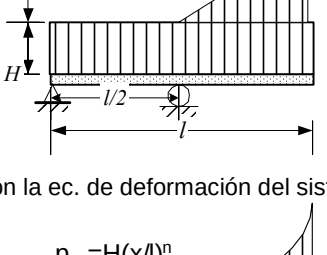


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

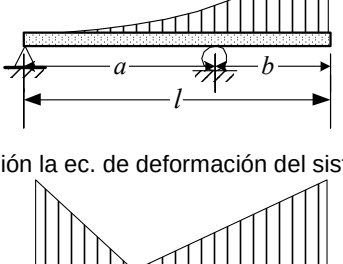
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



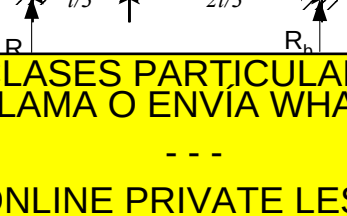
7.56. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura



7.57. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura

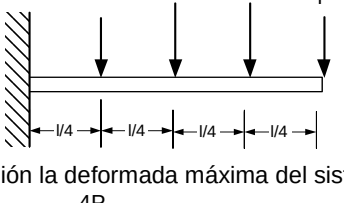


7.58. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura

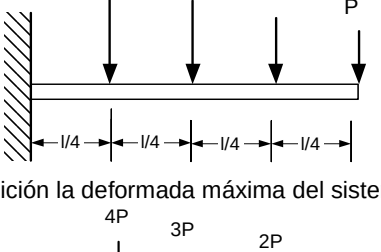


Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

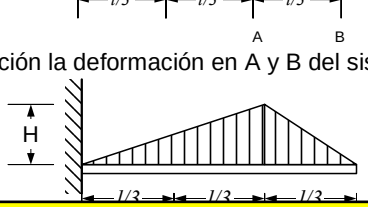


7.60. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura

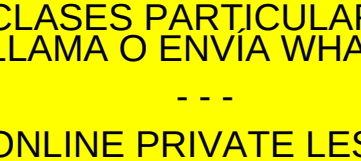


7.61. Hallar por superposición la deformada máxima del sistema de la figura

7.62. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura

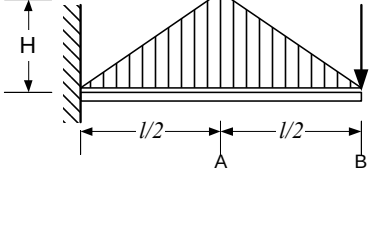


7.63. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura

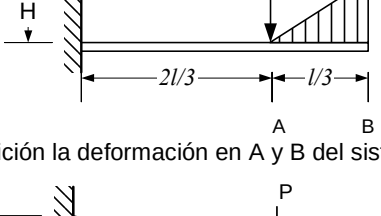


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

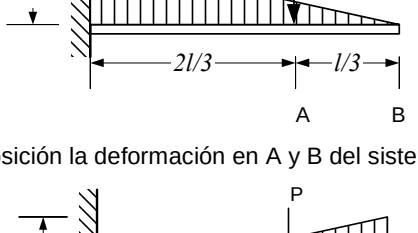
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



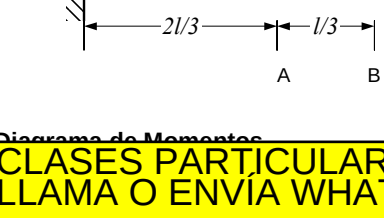
7.65. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



7.66. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



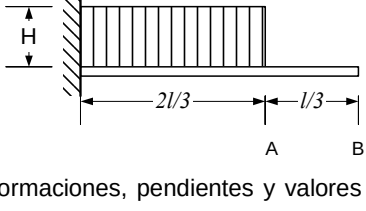
7.67. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura



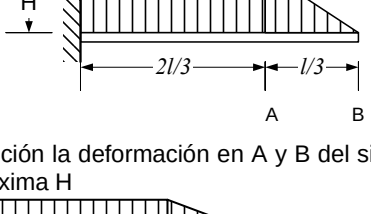
c) Metodo del Area del Diagrama de Momentos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

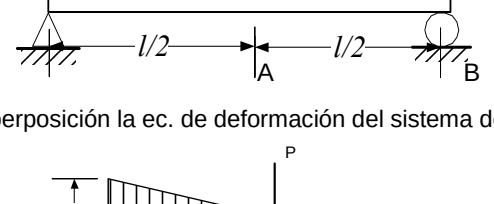
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



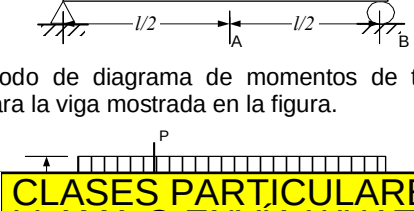
7.69. Hallar la ec. de deformaciones, pendientes y valores máximos de estos en los sistemas de la figura



7.70. Hallar por superposición la deformación en A y B del sistema de la figura siendo la intensidad de carga máxima H



7.71. Hallar por superposición la ec. de deformación del sistema de la figura



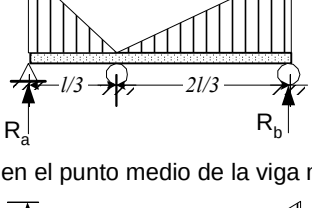
7.72. Mediante el método de diagrama de momentos de terminar el valor de la deformación máxima para la viga mostrada en la figura.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

d) Sistemas Hiperestáticos

7.73. Determinar las reacciones que ocurre en el punto de apoyo de la viga mostrada en la figura.



7.74. Determinar la reacción en el punto medio de la viga mostrada de la figura

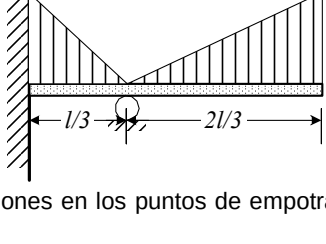
7.75. Determinar la expresión para hallar la reacción en el punto de apoyo de la viga mostrada en la figura

7.76. Determinar la reacción de los puntos de apoyo de la viga mostrada en la figura.

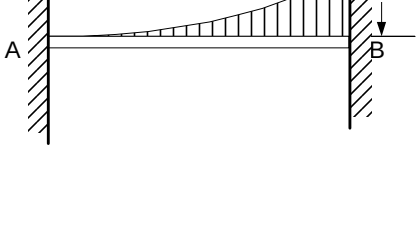
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

7.77. Determinar la expresión para hallar la fuerza de reacción que ocurre en el punto de apoyo



7.78. Determinar las reacciones en los puntos de empotramiento de la viga mostrada en la figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

8.- ESFUERZOS COMBINADOS

8.1.- INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se estudiaron individualmente las Cargas de Tracción Compresión, las Cargas de Corte, las Cargas de Torsión y las Cargas de Flexión. En este capitulo se estudiaran la combinación de las anteriores cargas. Se analizaran los esfuerzos y las se deformadas que presentan las piezas sometidas a cargas combinadas.

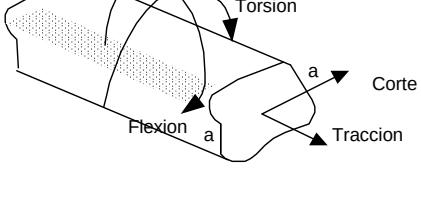


Fig. 8.1 Cuerpo sometido a Cargas Combinadas

Ejemplos de elementos sometidos a cargas y esfuerzos combinados son: Los ejes y árboles de maquinas con movimiento, que soportan cargas de flexión y de torsión; los pernos que en el momento de su ajuste soportan cargas de torsión y de tracción; las cargas de tracción cuando estas no están aplicadas en el centro de gravedad de la sección transversal y los marcos rígidos.

Para la validez de las ecuaciones y resultados de este capitulo se asume la veracidad de las siguientes condiciones :

1.- Los elementos son rectos
2.- Los elementos tienen secciones transversales uniformes
3.- Los materiales son homogéneos
4.- En los miembros sometidos a compresión no se produce pandeo.

8.2.- COMBINACIÓN DE ESFUERZOS

En esta sección se hallaran primero los esfuerzos normales y cortantes en cualquier

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Un elemento diferencial sometido a la acción de esfuerzos combinados, presentara en cada una de sus caras simultáneamente esfuerzos normales (σ) y esfuerzos cortantes (τ). Se vio que la magnitud de todos los esfuerzos cortantes es la misma.

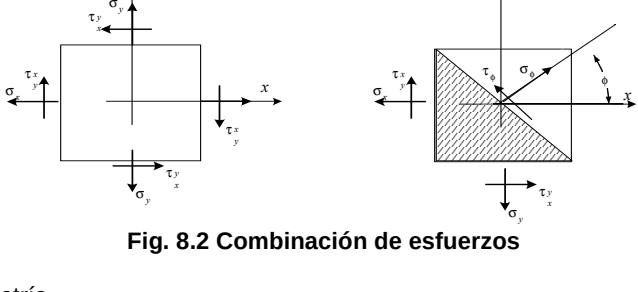


Fig. 8.2 Combinación de esfuerzos

Por trigonometría

$l_\rho \text{ Cos } \rho = dy$ (8.1

$l_\rho \text{ Sin } \rho = dx$

De la estática

$\Sigma F1 = 0$ $\quad \sigma_\rho \, l_\rho \, dz + (\tau_{xy}\text{Sin } \rho - \sigma_x \text{Cos } \rho)dydz + (\tau_{xy}\text{Cos } \rho - \sigma_y \text{Sin } \rho)dxdz = 0$ (8.2

Se 1 y 2 $\quad \sigma_\rho + (\tau_{xy}\text{Sin } \rho - \sigma_x \text{Cos } \rho)\text{Cos } \rho + (\tau_{xy}\text{Cos } \rho - \sigma_y \text{Sin } \rho)\text{ Sin } \rho = 0$

$\sigma_\rho + 2\tau_{xy}\text{Sin } \rho \text{ Cos } \rho - \sigma_x \text{Cos2 } \rho - \sigma_y \text{Sin2 } \rho = 0$

$\sigma_\rho + \tau_{xy}\text{Sin } 2\rho - \sigma_x (1 + \text{Cos } 2\rho)/2 - \sigma_y (1 - \text{Cos } 2\rho)/2 = 0$

$$\sigma_\rho == \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\rho) + \tau_{xy} sen(2\rho)$$ **(8.3**

$\Sigma F2 = 0$ $\quad \tau_\rho l_\rho dz + (\tau_{xy}\text{Cos } \rho + \sigma_x \text{Sin } \rho)dydz + (-\tau_{yx}\text{Sin } \rho - \sigma_y \text{Cos } \rho)dxdz = 0$ (8.4

De 1 y 4 $\quad \tau_\rho + (\tau_{xy}\text{Cos } \rho + \sigma_x \text{Sin } \rho)\text{Cos } \rho + (-\tau_{xy}\text{Sin } \rho - \sigma_y \text{Cos } \rho)\text{ Sin } \rho = 0$

$\tau_\rho + \tau_{xy}\text{Cos2 } \rho + \sigma_x \text{Sin } \rho\text{Cos } \rho - \tau_{xy}\text{Sin2 } \rho - \sigma_y \text{Cos } \rho\text{Sin } \rho = 0$

$\tau_\rho + \tau_{xy} (1+\text{Cos2 } \rho)/2 + \sigma_x \text{Sin } 2\rho/2 - \tau_{yx}(1- \text{Cos } 2\rho)/2 - \sigma_y \text{Sin } 2\rho/2 = 0$

$$\tau_\rho == -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sen(2\rho) + \tau_{xy} \cos(2\rho)$$ **(8.5**

Algunos casos especiales son:

Para $\rho = 0$ $\quad \sigma_0 = \sigma_x$

$\tau_0 = \tau_{xy}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

La relación entre los esfuerzos normales y cortantes es la de un círculo conocido como el Círculo de Mohr

De 8.3 $\sigma_\rho - (\sigma_x + \sigma_y)/2 = (\sigma_x - \sigma_y)\text{Cos}\,(2\,\rho)/2 + \tau_{xy}\text{Sin}\,2\rho$ (8.6

$$(\sigma_\phi - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2})^2 = (\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 Cos^2 2\phi + 2(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})Cos2\phi\tau_{xy}Sin2\phi + (\tau_{xy}Sin2\phi)^2$$ (8.7

De 8.5 $\tau_\rho = (\sigma_y - \sigma_x)\ \text{Sin}\ (2\rho)/2 - \tau_{xy}\ \text{Cos}\ (2\rho)/2$ (8.8

$$(\tau_\phi)^2 = (\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 Sin^2 2\phi - 2(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})Sin2\phi\tau_{xy}Cos2\phi + (\tau_{xy}Cos2\phi)^2$$ (8.9

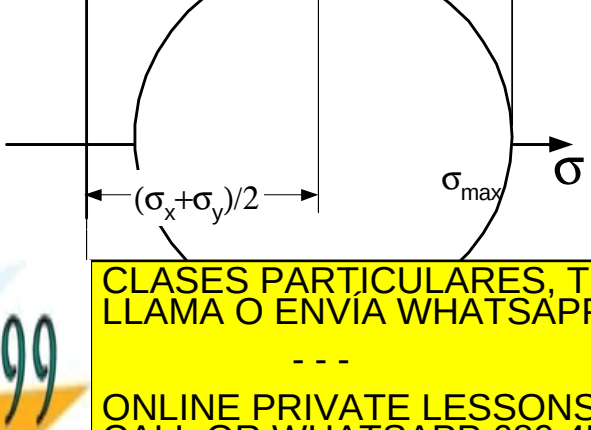
De 8.7 y 8.9
$$(\sigma_\phi - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2})^2 + \tau_\phi{}^2 = (\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2$$ **(8.10**

Comparando 10 con la ecuación de una circunferencia

$$(x - x_o)^2 + (y)^2 = R^2$$ (8.11

se ve que es la misma con los esfuerzos normales como abscisas (σ) y los esfuerzos cortantes como ordenadas (τ). Este es el Círculo de Mohr y tiene las siguientes características:

- El centro del circulo tiene un desplazamiento en el eje horizontal de $(\sigma_y + \sigma_x)/2$
- No hay un desplazamiento en el eje vertical
- El radio de la circunferencia es de $[(\sigma_y + \sigma_x)^2 + \tau_{xy}{}^2]^{1/2}$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

8.4.- ESFUERZOS PRINCIPALES

En esta sección se hallaran los valores máximos de los esfuerzos normales y cortantes y las direcciones en la que estos se presentan. Como ya se vio anteriormente los esfuerzos normales máximos se conocen como esfuerzos principales y las direcciones en las que ocurren son las direcciones principales. En estas direcciones principales y en aquellas en las que los esfuerzos cortantes son máximos la falla es la más probable.

Derivando 8.3 con respecto a ϕ e igualando a cero

$$\frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}) 2Sin2\phi - \tau_{xy} 2Cos2\phi = 0 \qquad \text{(8.12}$$

$$Tan2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \textbf{(8.13}$$

De 8.13 y 8.4

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} \qquad \textbf{(8.14}$$

Ecuación que da los valores de los esfuerzos normales máximos o principales

Derivando 8.5 con respecto a ϕ e igualando a cero

$$\frac{\partial \tau_\phi}{\partial \phi} = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}) 2Cos2\phi + \tau_{xy} 2Sin2\phi = 0 \qquad \text{(8.15}$$

$$Tan2\phi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad \textbf{(8.16}$$

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} \qquad \textbf{(8.17}$$

De 8.11 8.5

Ecuación que da los valores de los esfuerzos cortantes máximos

además $\tau_{1,2} = \sigma_1 - \sigma_2$ **(8.18**

8.5.- COMBINACIÓN DE DEFORMACIONES

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

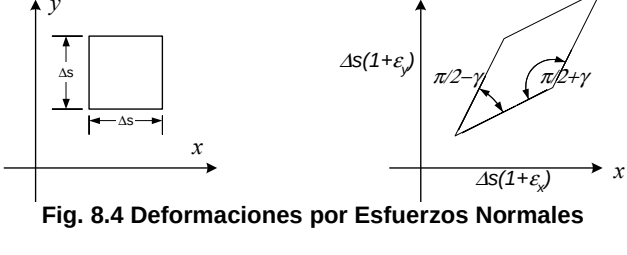


Fig. 8.4 Deformaciones por Esfuerzos Normales

Los esfuerzos normales producen variación de las dimensiones mientras que los esfuerzos cortantes producen una distorsión cuantificada por el ángulo γ.
Para hallar εx', εy' y γ' asociadas al marco x' y y' que forman un ángulo θ con xy

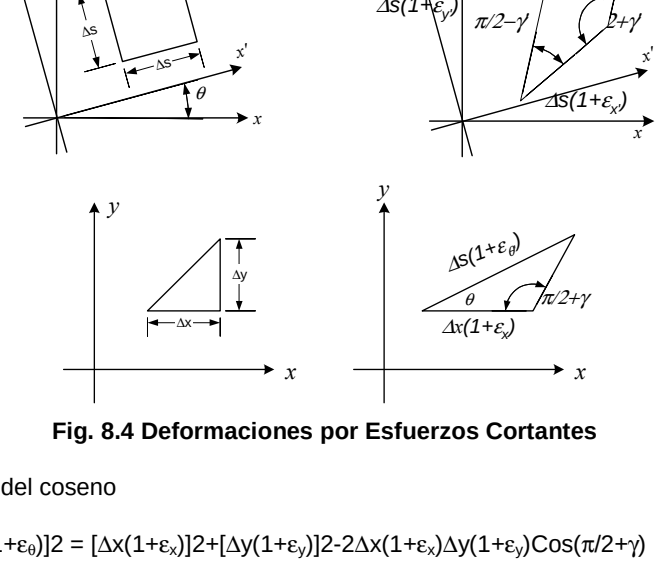


Fig. 8.4 Deformaciones por Esfuerzos Cortantes

Del teorema del coseno

$$[\Delta s(1+\varepsilon_\theta)]2 = [\Delta x(1+\varepsilon_x)]2+[\Delta y(1+\varepsilon_y)]2-2\Delta x(1+\varepsilon_x)\Delta y(1+\varepsilon_y)\text{Cos}(\pi/2+\gamma) \qquad (8.19$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Cos (π/2 + γ) = - Sen (γ) = - γ (8.22

De 19, 20, 21 y 22

$$\Delta s^2(1+2\varepsilon_\theta+\varepsilon_\theta{}^2)=$$
$$=\Delta s^2Cos^2\theta(1+2\varepsilon_x+\varepsilon_x{}^2)+\Delta s^2Sin^2\theta(1+2\varepsilon_y+\varepsilon_y{}^2)-2\Delta s^2Sin\theta Cos\theta(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_x\varepsilon_y)\gamma \quad (8.23$$

Despreciando términos de segundo orden de las deformaciones (ε y γ)

$$(1+2\varepsilon_\theta)=Cos^2\theta(1+2\varepsilon_x)+Sin^2\theta(1+2\varepsilon_y)-2Sin\theta Cos\theta(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y)\gamma \quad (8.24$$

$$2\varepsilon_\theta=Cos^2\theta 2\varepsilon_x+Sin^2\theta 2\varepsilon_y-2Sin\theta Cos\theta\gamma \quad (8.25$$

$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x$ Cos2θ + ε_y Sin2θ + γ Sin θ Cos θ (8.26

De las expresiones de ángulo doble

$$\varepsilon_{x'}=\varepsilon_\theta=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}Cos2\theta+\frac{\gamma}{2}Sin2\theta \quad \textbf{(8.27}$$

Reemplazando θ por θ + 90

$$\varepsilon_{y'}=\varepsilon_{\theta+90}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}Cos2\theta-\frac{\gamma}{2}Sin2\theta \quad \textbf{(8.28}$$

$$\gamma_{x'y'}=-(\varepsilon_x-\varepsilon_y)Sin2\theta+\gamma_{xy}Cos2\theta \quad \textbf{(8.29}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

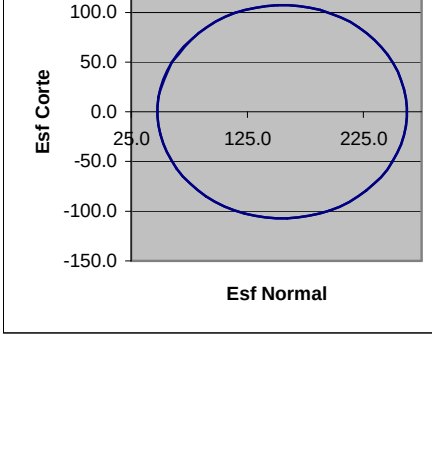
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

8.1. En una pieza se verifican los siguientes esfuerzos : σ_x = 60 kg/cm^2, σ_y = 250 kg/cm^2 y τ_{xy} = 50 kg/cm^2. Hallar los esfuerzos en direcciones con ángulos de 0º hasta 360º con un intervalo de 10º.

Solución :

ϕ (Gr)	ϕ (Rad)	σ_ϕ	τ_ϕ
0	0.0	60.0	50.0
10	0.2	82.8	79.5
20	0.3	114.4	99.4
30	0.5	150.8	107.3
40	0.7	187.7	102.2
50	0.9	220.7	84.9
60	1.0	245.8	57.3
70	1.2	259.9	22.8
80	1.4	261.4	-14.5
90	1.6	250.0	-50.0
100	1.7	227.2	-79.5
110	1.9	195.6	-99.4
120	2.1	159.2	-107.3
130	2.3	122.3	-102.2
140	2.4	89.3	-84.9
150	2.6	64.2	-57.3
160	2.8	50.1	-22.8
170	3.0	48.6	14.5
180	3.1	60.0	50.0
190	3.3	82.8	79.5
200	3.5	114.4	99.4
210	3.7	150.8	107.3
220	3.8	187.7	102.2
230	4.0	220.7	84.9
240	4.2	245.8	57.3
250	4.4	259.9	22.8
260	4.5	261.4	-14.5
270	4.7	250.0	-50.0
280	4.9	227.2	-79.5
290	5.1	195.6	-99.4
300	5.2	159.2	-107.3
310	5.4	122.3	-102.2



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

8.2. En el problema anterior, hallar los esfuerzos máximos y las direcciones en las que estos ocurren.

Solución :

Para σ

$$Tan2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(50)}{60-250}$$

ϕ = -13.87

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2} = \frac{60+250}{2} \pm \sqrt{(\frac{60-250}{2})^2 + 50^2}$$

σ_1 = 262,35 kg/cm^2

σ_2 = 47,64 kg/cm^2

Para τ

$$Tan2\phi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

ϕ = 31.12

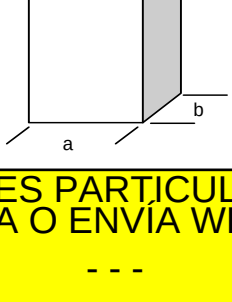
$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2}$$

τ_1 = 107,35 kg/cm^2

τ_2 = -107,35 kg/cm^2

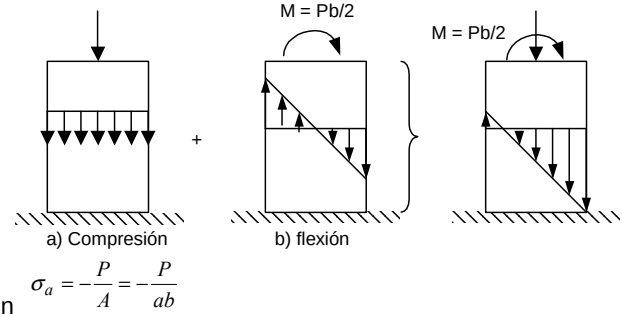
además $\tau_{1,2} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$

8.3. Hallar las ecuaciones y los valores máximos de los esfuerzos normales que aparecen en una pieza con sección transversal rectangular cuando soporta una carga de compresión en el medio de una de sus aristas.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



a) Compresión $\sigma_a = -\frac{P}{A} = -\frac{P}{ab}$

b) Flexión $\sigma_b = \pm\frac{My}{I} = \pm\frac{P(b/2)y}{ab^3/12} = \pm\frac{6Py}{ab^2}$

Total $\sigma_{tot} = \sigma_a + \sigma_b = -\frac{P}{ab} \pm \frac{6Py}{ab^2}$

A la izquierda y = +b/2

$$\sigma_{totizq} = \frac{2P}{ab}$$

A la derecha y = -b/2

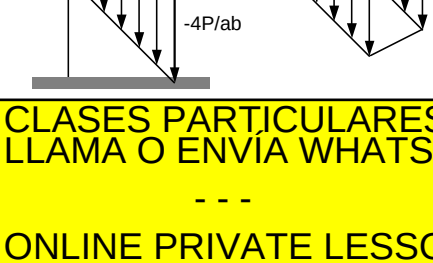
$$\sigma_{totder} = -\frac{4P}{ab}$$

El eje neutro por definición esta donde σ = 0

$$\sigma_{tot} = -\frac{P}{ab} \pm \frac{6Py}{ab^2} = 0$$

y = + b/6

Es decir que el eje neutro se sitúa a b/6 a la izquierda del centro de gravedad



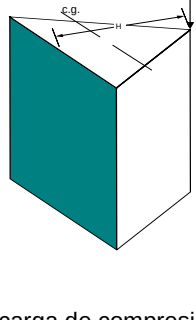
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

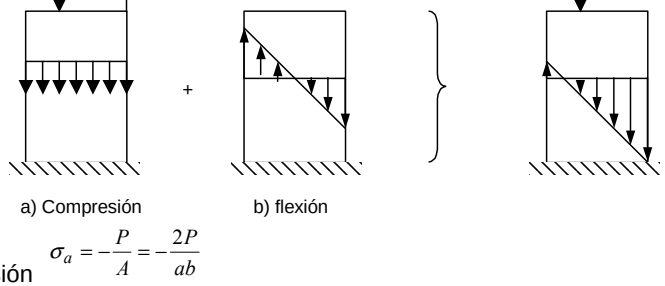
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

Nuevamente se superponen una carga de compresión con otra de flexión



a) Compresión b) flexión

a) Compresión $\sigma_a = -\frac{P}{A} = -\frac{2P}{ab}$

b) flexión $\sigma_b = \pm\frac{My}{I} = \pm\frac{P(2b/3)y}{ab^3/36} = \pm\frac{24Py}{ab^2}$

Total $\sigma_{tot} = \sigma_a + \sigma_b = -\frac{2P}{ab} \pm \frac{24Py}{ab^2}$

A la izquierda y = +b/3

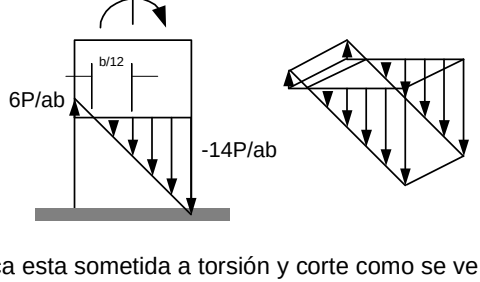
$\sigma_{totizq} = \frac{6P}{ab}$

A la derecha y = -2b/3

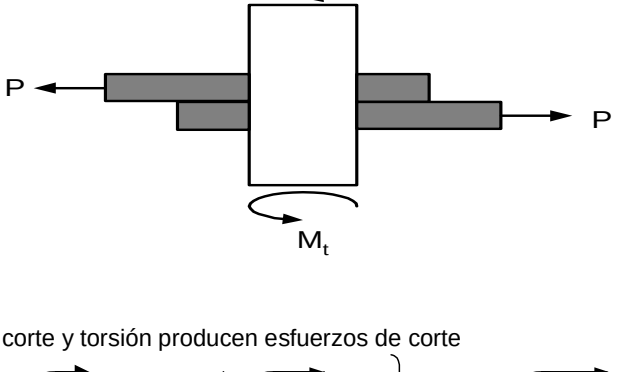
$\sigma_{totder} = -\frac{14P}{ab}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

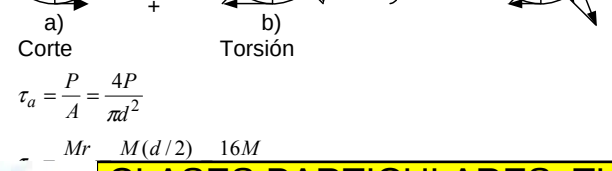


8.5. Una pieza cilíndrica esta sometida a torsión y corte como se ve en la figura. Hallar la combinación de esfuerzos cortantes



Solución :

Las cargas de corte y torsión producen esfuerzos de corte



a) Corte

b) Torsión

a) Corte

$$\tau_a = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

$$\frac{Mr}{} \quad \frac{M(d/2)}{} \quad \frac{16M}{}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

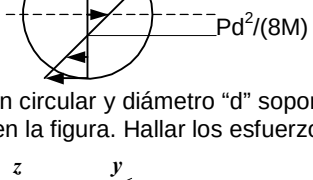
Abajo $\tau_{totarr} = \frac{4P}{\pi d^2} - \frac{16M}{\pi d^3}$ ambos son paralelos

Lados $\tau_{totarr} = \sqrt{(\frac{4P}{\pi d^2})^2 - (\frac{16M}{\pi d^3})^2}$ ambos son perpendiculares

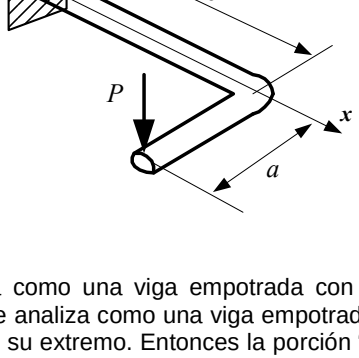
El eje neutro por definición esta donde $\tau = 0$

$$\tau_{tot} = \frac{4P}{\pi d^2} - \frac{M(r)}{\pi d^4/32} = 0$$

y = + Pd2/(8M)

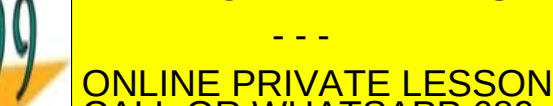


8.6. Una manivela de sección circular y diámetro “d” soporta una carga puntual vertical en su extremo, como se ve en la figura. Hallar los esfuerzos máximos



Solución :

La porción “a” se analiza como una viga empotrada con una carga puntual en su extremo y la porción “b” se analiza como una viga empotrada con una carga puntual y un momento de torsión en su extremo. Entonces la porción “a” esta sometida a flexión mientras que la porción “b” a torsión y flexión



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Flexión

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Px)(r)}{(\pi d^4/64)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{(Pa)(d/2)}{(\pi d^4/64)} = \frac{32Pa}{\pi d^3}$$

En “b” flexión y torsión

Flexión

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Pv)(r)}{(\pi d^4/64)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{(Pb)(d/2)}{(\pi d^4/64)} = \frac{32Pb}{\pi d^3}$$

Torsión

$$\tau = \frac{M_t r}{I_o} = \frac{(Pa)(r)}{\pi d^4/32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16Pa}{\pi d^3}$$

Los esfuerzos son de diferente tipo por lo que no se los puede sumar sino que debe combinarlos

Tomando

$$\sigma_x = \frac{32Pb}{\pi d^3}$$

$\sigma_y = 0$

$$\tau_{xy} = \frac{16Pa}{\pi d^3}$$

De 8.14

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2} = \frac{16Pb}{\pi d^3} \pm \sqrt{(\frac{16Pb}{\pi d^3})^2 + (\frac{16Pa}{\pi d^3})^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{16P}{\pi d^3}(b \pm \sqrt{a^2 + b^2})$$

De 8.15

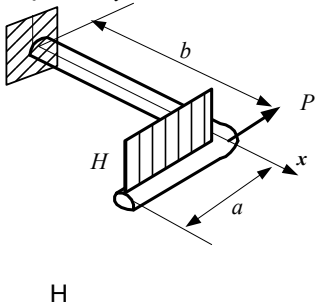
$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2} = \pm\sqrt{(\frac{16Pb}{\pi d^3})^2 + (\frac{16Pa}{\pi d^3})^2}$$

$$\tau_{1,2} = \frac{16P}{\pi d^3}(\sqrt{a^2 + b^2})$$

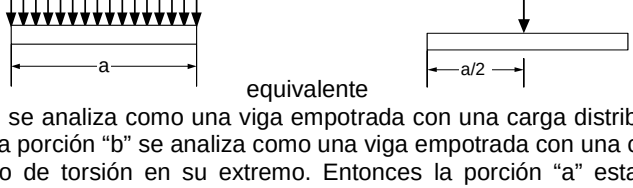
8.7 La manivela de la figura tiene una sección circular de diámetro “d” y soporta una

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

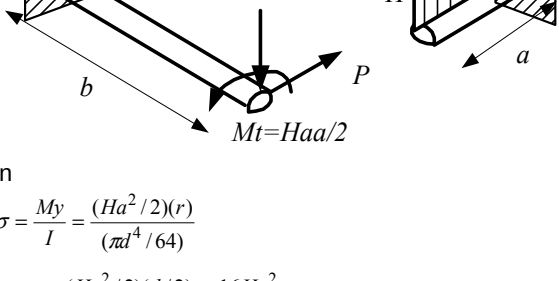


Solución :



equivalente

La porción “a” se analiza como una viga empotrada con una carga distribuida en toda su longitud y la porción “b” se analiza como una viga empotrada con una carga puntual y un momento de torsión en su extremo. Entonces la porción “a” esta sometida a flexión mientras que la porción “b” a torsión y flexión en dos direcciones



En “a” solo flexión

Flexión

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Ha^2/2)(r)}{(\pi d^4/64)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{(Ha^2/2)(d/2)}{(\pi d^4/64)} = \frac{16Ha^2}{\pi d^3}$$

En “b” flexión y torsión

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\sigma_{\max} = \frac{(Hab)(d/2)}{(\pi d^4/64)} = \frac{32Hab}{\pi d^3}$$

Flexión hor

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(Pv)(r)}{(\pi d^4/64)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{(Pb)(d/2)}{(\pi d^4/64)} = \frac{32Pb}{\pi d^3}$$

Torsión

$$\tau = \frac{M_t r}{I_o} = \frac{(Ha^2/2)(r)}{\pi d^4/32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{8Ha^2}{\pi d^3}$$

Entonces

$$\sigma_x = \frac{32Hab}{\pi d^3}$$

$$\sigma_y = \frac{32Pb}{\pi d^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{8Ha^2}{\pi d^3}$$

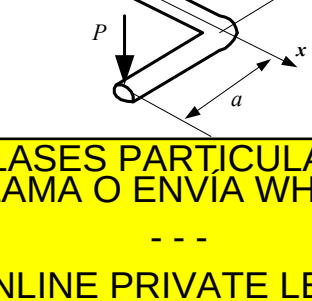
De 8.14

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2} = \frac{16}{\pi d^3}(Hab + Pb) \pm \sqrt{[\frac{16}{\pi d^3}(Hab - Pb)]^2 + (\frac{8Ha^2}{\pi d^3})^2}$$

De 8.15

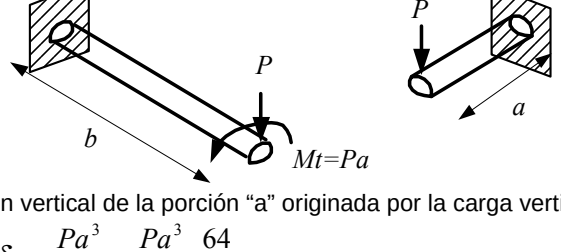
$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2} = \pm\sqrt{[\frac{16}{\pi d^3}(Hab - Pb)]^2 + (\frac{8Ha^2}{\pi d^3})^2}$$

8.8. Hallar la deformación vertical del extremo libre de la manivela del problema 8.6



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



a) La deformación vertical de la porción “a” originada por la carga vertical es

$$\delta_a = \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{Pa^3}{3E}\frac{64}{\pi d^4}$$

b) La deformación vertical de la porción “b” originada por la carga vertical es

$$\delta_{b1} = \frac{Pb^3}{3EI} = \frac{Pb^3}{3E}\frac{64}{\pi d^4}$$

El momento de torsión origina un giro o deformada angular en la porción “b” de

$$\theta = \frac{M_t b}{GI_0} = \frac{Pab}{G}\frac{32}{\pi d^4}$$

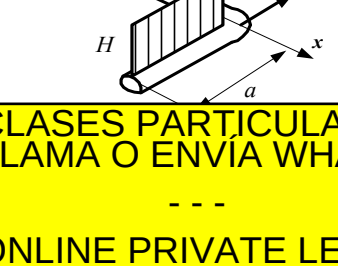
este giro produce una caída vertical del extremo libre de “a”

$$\delta_{b2} = \theta a = \frac{32Pa^2 b}{\pi d^4}$$

La deformada total del extremo libre es

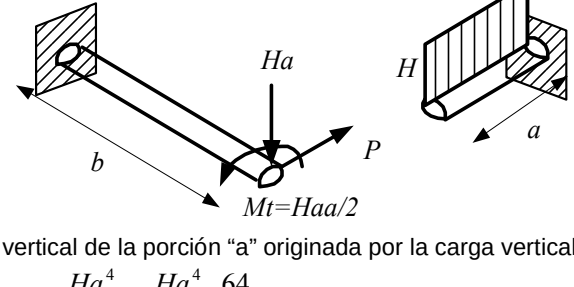
$$\delta_{tot} = \delta_a + \delta_{b1} + \delta_{b2} = \frac{64}{\pi d^4}\left(\frac{Pa^3}{3E} + \frac{Pb^3}{3E} + \frac{Pa^2 b}{2G}\right)$$

8.9. Hallar la deformación vertical del extremo libre de la manivela del problema 8.7



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



a) Deformación vertical de la porción “a” originada por la carga vertical distribuida

$$\delta_a = \frac{Ha^4}{8EI} = \frac{Ha^4}{8E}\frac{64}{\pi d^4}$$

b) Deformación vertical de la porción “b” originada por la carga vertical

$$\delta_{b1} = \frac{Hab^3}{3EI} = \frac{Hab^3}{3E}\frac{64}{\pi d^4}$$

c) Deformación angular de la porción “b” originada por el momento de torsión

$$\theta = \frac{M_t b}{GI_0} = \frac{Ha^2 b}{2G}\frac{32}{\pi d^4}$$

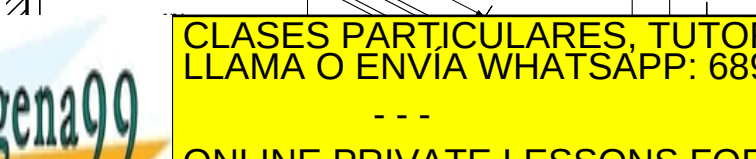
giro que produce una caída vertical del extremo libre de “a”

$$\delta_{b2} = \theta a = \frac{16Ha^3 b}{\pi d^4}$$

La deformada total del extremo libre es

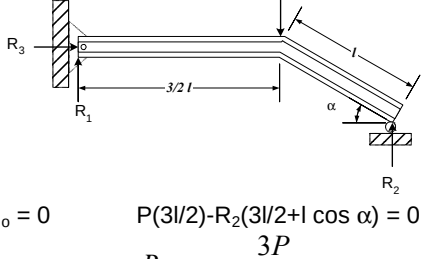
$$\delta_{tot} = \delta_a + \delta_{b1} + \delta_{b2} = \frac{64}{\pi d^4}\left(\frac{Ha^4}{8E} + \frac{Hab^3}{3E} + \frac{Ha^3 b}{4G}\right)$$

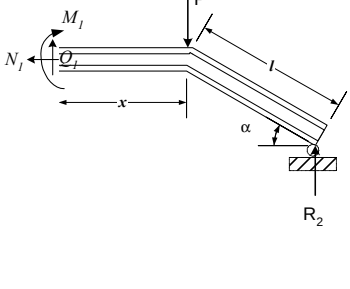
8.10. La viga de la figura tiene una sección transversal como se muestra Hallar los esfuerzos en los puntos A y B, de la sección A-A.



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





$\Sigma M_o = 0$ $\quad P(3l/2)-R_2(3l/2+l\cos\alpha) = 0$

$$R_2 = \frac{3P}{(3+2\cos\alpha)}$$

Las reacciones internas

$\Sigma M_1 = 0$ $\quad M_1 + Px - R_2(l\cos\alpha + x) = 0$
$\Sigma F_y = 0$ $\quad Q_1 + R_2 - P = 0$
$\Sigma F_x = 0$ $\quad N_1 = 0$

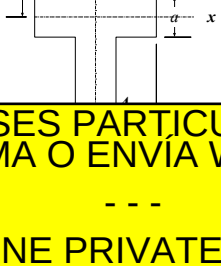
Para x = l

$$M_1 = \frac{Pl\cos\alpha}{(3+2\cos\alpha)}$$

$$Q_1 = \frac{2P\cos\alpha}{(3+2\cos\alpha)}$$

$N_1 = 0$

Componentes del esfuerzo.



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Esfuerzos de corte por Cargas de Flexión.-

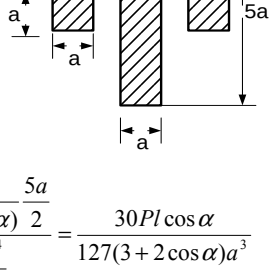
$$\tau_A = \frac{QS_A}{Ib_A} \qquad \tau_B = \frac{QS_B}{Ib_B}$$

Para A
$c_A = 5a/2$
$A_{parcial} = 2\ a\ a$
$y_{cg\ parcial} = a$
$S_{max\ A} = 2\ a\ 3$
$b_A = a$

Para B
$c_B = a/2$
$A_{parcial} = 0$
$y_{cg\ parcial} = 0$
$S_{max\ B} = 0$
$b_B = a$

La inercia

$$I = \frac{a(5a)^3}{12} + 2\frac{aa^3}{12} = \frac{127a^4}{12}$$



Remplazando

$$\sigma_A = \frac{\frac{Pl\cos\alpha}{(3+2\cos\alpha)}\frac{5a}{2}}{\frac{127a^4}{12}} = \frac{30Pl\cos\alpha}{127(3+2\cos\alpha)a^3}$$

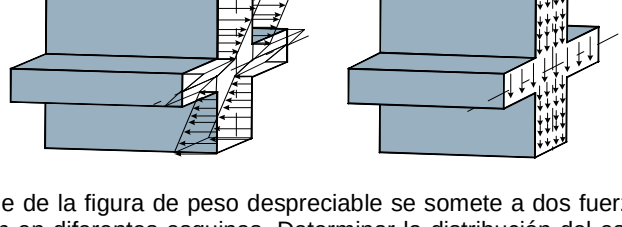
$$\sigma_B = -\frac{\frac{Pl\cos\alpha}{(3+2\cos\alpha)}\frac{a}{2}}{\frac{127a^4}{12}} = -\frac{6Pl\cos\alpha}{127(3+2\cos\alpha)a^3}$$

El esfuerzo en el punto B es de compresión, por eso el signo negativo.

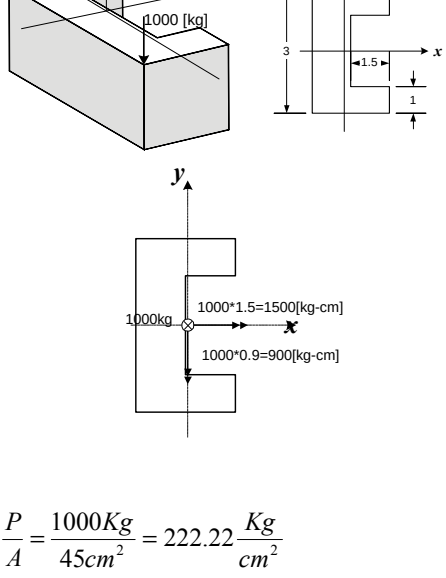
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\tau_B = 0$$



8.11. El bloque de la figura de peso despreciable se somete a dos fuerzas verticales, que se aplican en diferentes esquinas. Determinar la distribución del esfuerzo normal que actúa en la sección mostrada. (Las unidades geométricas están en [cm])



Solución.-
Esfuerzos normales:

$$\sigma_A = \frac{P}{A} = \frac{1000Kg}{45cm^2} = 222.22\frac{Kg}{cm^2}$$

El esfuerzo de flexión

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$x_o = \frac{2\cdot 3\cdot 1 - 1.5\cdot 1\cdot 1.25}{2\cdot 3 - 1.5\cdot 1} \qquad y_o = \frac{2\cdot 3\cdot 1.5 - 1.5\cdot 1\cdot 1.5}{6 - 1.5}$$

$$x_o = 0.9167\,cm \qquad y_o = \frac{3}{2}\,cm$$

$$I_{xx} = \frac{0.5 + 1.5^3}{12} + 0.5\cdot 1.5\cdot\left(\frac{1.5}{2}\right)^2 + \frac{1.5\cdot 1^3}{12} + 1.5\cdot 1\cdot 1^2$$

$$I_{xx} = 2.3697\,cm^4$$

$$I_{yy} = 2\cdot\left[\frac{1\cdot 2^3}{12} + 2\cdot 1\cdot(1 - 0.9167)^2\right] + \frac{1\cdot 0.5^3}{12} + 1\cdot 0.5\cdot\left(0.91 - \frac{0.5}{2}\right)^2$$

$$I_{yy} = 1.589\,cm^4$$

Esfuerzo máximo de compresión de Mx con c=3/2

$$\sigma_{fc} = \frac{M_x\cdot c}{I_{xx}}$$

$$\sigma_{fc} = 949.487\,\frac{kg}{cm^2}$$

Esfuerzo máximo de compresión de My con c=0.916

$$\sigma_{fc} = \frac{M_y\cdot c}{I_{yy}}$$

$$\sigma_{fc} = 528.847\,\frac{kg}{cm^2}$$

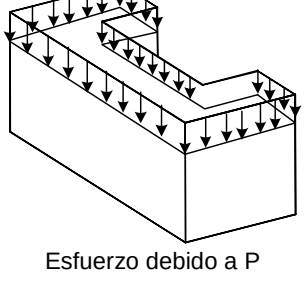
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

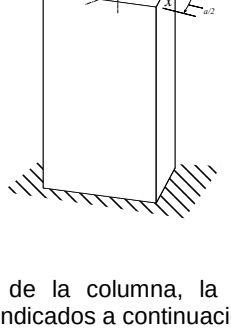
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



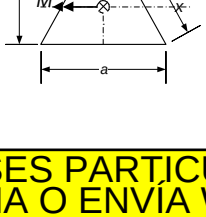
Esfuerzo debido a P

8.12. Determinar el esfuerzo máximo que ocurre en el Punto A de la columna mostrada en la figura



Solución.-

Siendo la sección transversal de la columna, la que se muestra en la figura, tomaremos en cuenta los datos indicados a continuación.



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$A = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Las fuerzas trasladadas al centro de gravedad serán un momento y la respectiva carga:

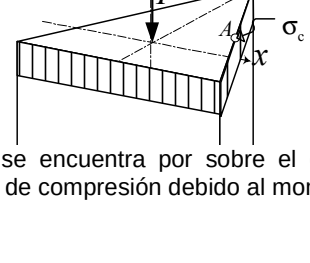
$$M = P \cdot \frac{2}{3} h$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot P \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

Este momento esta en la dirección x como se ve en la anterior figura.
La carga axial que actúa sobre la columna provocará la compresión de la misma y el esfuerzo que se suceda por este efecto será:

$$\sigma_c = \frac{P}{A}$$

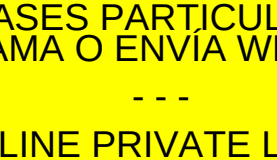
la distribución de los esfuerzos en la sección transversal será el mostrado en la siguiente figura:



Debido a que el punto A se encuentra por sobre el eje del centro de gravedad, determinaremos el esfuerzo de compresión debido al momento de flexión con:

$$\sigma_{fc} = \frac{M \cdot c}{I}$$

donde c: la distancia del la línea del cg (eje neutro) al punto A en análisis.
I: Inercia respecto del eje xx de la sección transversal.



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$c = u - v \qquad u = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{2} \qquad v = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Remplazando las relaciones mostradas en la figura en la anterior ecuación:

$$\sigma_{fc} = \frac{8}{3}\cdot\frac{P}{a^2}\cdot\sqrt{3}$$

el diagrama de esfuerzos debido a la flexión es el mostrado en la siguiente figura:

El esfuerzo total que ocurre en el punto A es:

$$\sigma_A = \sigma_c + \sigma_{fc}$$

remplazando las anteriores expresiones, y simplificando, tenemos:

$$\sigma_A = 4\cdot\frac{P}{a^2}\cdot\sqrt{3}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

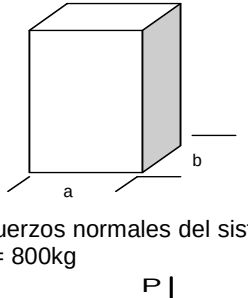
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS PROPUESTOS

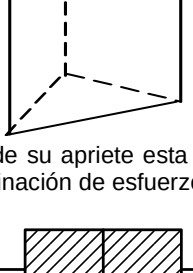
8.13. En una pieza se verifican los siguientes esfuerzos : σx = 90 kg/cm2, σy = 350 kg/cm2 y τxy = 30 kg/cm2. Hallar los esfuerzos en direcciones con ángulos de 0 hasta 360 con un intervalo de 10.

8.14. En el problema 8.13, hallar los esfuerzos máximos y las direcciones en las que estos ocurren.

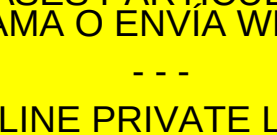
8.15. Hallar la combinación de esfuerzos normales del sistema de la figura



8.16. Hallar la combinación de esfuerzos normales del sistema de la figura, Cada lado del triángulo l = 3 cm y la carga P = 800kg

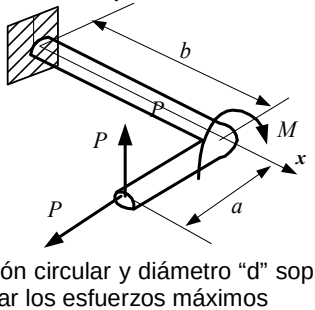


8.17. Una perno en el momento de su apriete esta sometida a cargas de torsión y a cargas de tracción. Hallar la combinación de esfuerzos

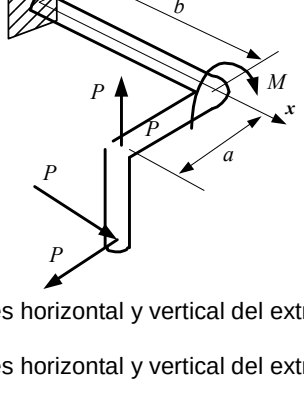


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



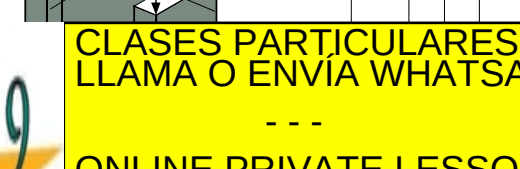
8.19. Una manivela de sección circular y diámetro “d” soporta varias cargas puntuales como se ve en la figura. Hallar los esfuerzos máximos



8.20. Hallar las deformaciones horizontal y vertical del extremo libre del problema 8.18

8.21. Hallar las deformaciones horizontal y vertical del extremo libre del problema 8.19

8.22. Determinar los diagramas de esfuerzo para cada una de las cargas, mostradas en la figura:

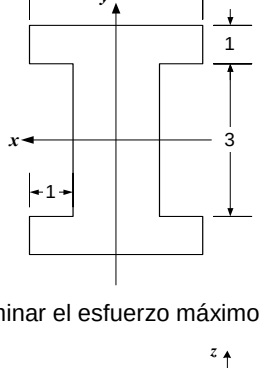


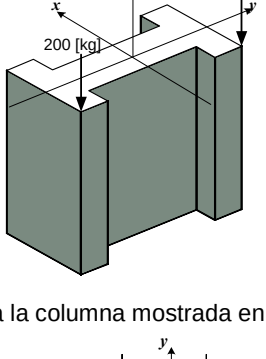
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

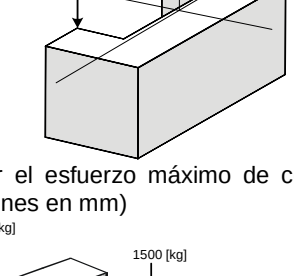
8.23. Para el problema anterior determinar el esfuerzo total en el punto donde se aplica la carga de 500kg

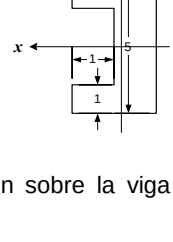
8.24. Determinar el esfuerzo máximo de compresión de la columna mostrada en la figura.



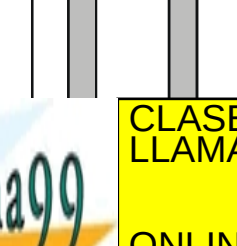


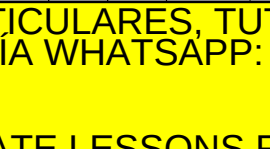
8.25. Determinar el esfuerzo máximo que soporta la columna mostrada en la figura





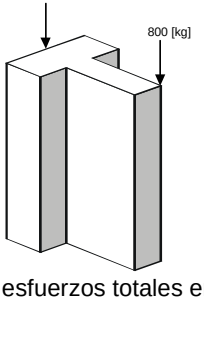
8.26. Determinar el esfuerzo máximo de compresión sobre la viga mostrada en la figura. (Dimensiones en mm)

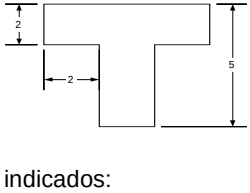




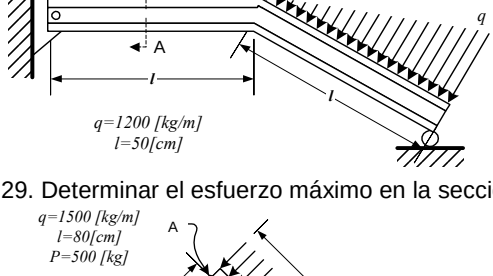
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

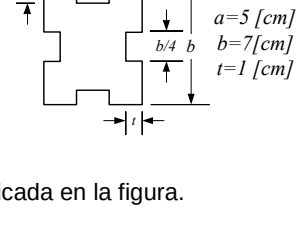
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



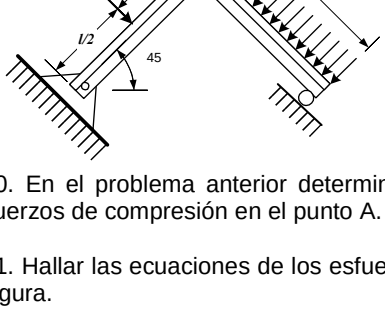


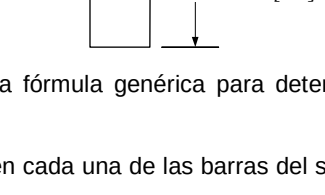
8.28. Hallar los esfuerzos totales en los puntos indicados:





8.29. Determinar el esfuerzo máximo en la sección indicada en la figura.



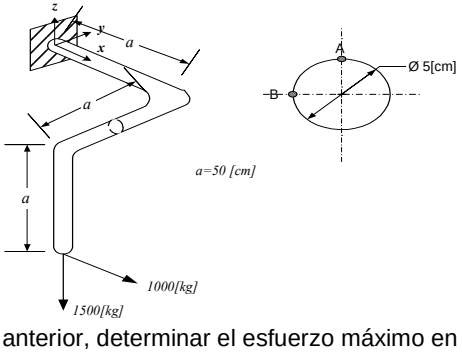


8.30. En el problema anterior determinar una fórmula genérica para determinar los esfuerzos de compresión en el punto A.

8.31. Hallar las ecuaciones de los esfuerzos en cada una de las barras del sistema de la figura.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



8.32. En el problema anterior, determinar el esfuerzo máximo en el punto A.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

9.- MÉTODOS ENERGÉTICOS

9.1 INTRODUCCIÓN

En este capitulo se estudiaran Métodos Energéticos que nos posibilitaran hallar las deformaciones para los diferentes tipos de carga estudiados anteriormente.

En la zona elástica (cuando los esfuerzos son inferiores a los límites de fluencia) los materiales se comportan elásticamente y las deformaciones se almacenan como energía potencial de deformación.

9.2.- TRABAJO DE DESPLAZAMIENTO

El trabajo, en mecánica clásica, es el producto de una fuerza por la distancia que recorre y por el coseno del ángulo que forman ambas magnitudes vectoriales entre sí. Si la fuerza es variable el trabajo se calcula mediante la integral del producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento.

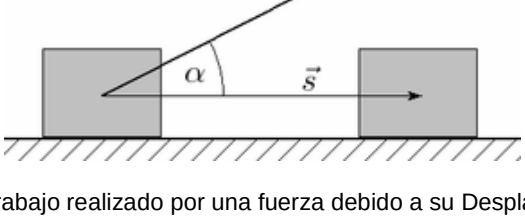


Fig. 9.1 Trabajo realizado por una fuerza debido a su Desplazamiento

$$W = \int_0^s \vec{F} \bullet d\vec{r} \qquad (9.$$

$$W = F\, s \cos \alpha \qquad (9.2$$

El trabajo es el área bajo la curva Fuerza – Deformación

9.3.- TRABAJO Y ENERGÍA POTENCIAL DE DEFORMACIÓN

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

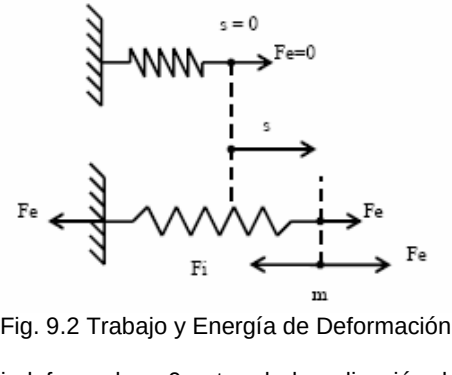


Fig. 9.2 Trabajo y Energía de Deformación

Considere un resorte indeformado s=0 antes de la aplicación de la fuerza Fe cuando Se aplica la fuerza Fe se produce un alargamiento del resorte s y aparece una fuerza interior Fi= Ks producida por la resistencia al alargamiento del resorte. El trabajo que efectúa la fuerza Fi durante su desplazamiento es
dW = Fi ds = −k s ds

$$W = \int_0^s F_i ds = \int_0^s -ksds = -\frac{1}{2}ks^2 \qquad (9.3$$

Este trabajo es negativo pues se realiza en contra de la fuerza Fi del resorte,
El trabajo que efectúa la carga Fe, es

$$W = \int_0^s T_e ds = \int_0^s ksds = \frac{1}{2}ks^2 \qquad (9.4$$

Se puede decir que el trabajo de la fuerza externa (Te)se gasta en deformar el resorte (elemento interno) que acumula el trabajo en forma de una Energía Elástica Potencial de Deformación (U). Si retiramos la fuerza Fe la partícula regresara a su posición original s = 0 y la Fi producirá un Trabajo positivo producto de la Energía acumulada.

9.4.- ENERGÍA POTENCIAL DE DEFORMACIÓN PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE CARGA

a) ENERGÍA PARA ESFUERZOS NORMALES

$$dW = dU = \frac{1}{2}(\sigma A)(\varepsilon dl) \qquad (9.5$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
Cartagena99
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (9.7$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2}\frac{P^2 dl}{EA} \qquad (9.8$$

$$-W_i = U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2 dl}{EA} \qquad (9.9$$

b) ENERGÍA PARA CARGAS DE CORTE

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2}(\tau b dy)(\gamma dl) \qquad (9.10$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad (9.11$$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} \qquad (9.12$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2G}(\frac{QS}{Ib})^2 b dy dl \qquad (9.13$$

Llamando coeficiente de forma a (que depende del tipo de sección)

$$\frac{\chi}{A} = \int_{-yi}^{ys} \frac{S}{I^2 b} dy \qquad (9.14$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2}\chi\frac{Q^2}{GA} dl \qquad (9.15$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2}\int_0^l \chi\frac{Q^2}{GA} dl \qquad (9.16$$

e) ENERGÍA DEL MOMENTO DE TORSIÓN

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2}(M_t)(d\theta) \qquad (9.17$$

$$d\theta = \frac{M_t dl}{GI_o} \qquad (9.18$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$-W_i = U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_t^{\,2} dl}{GI_o} \qquad (9.20$$

d) ENERGÍA DEL MOMENTO FLECTOR

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2}(M_f)(d\theta) \qquad (9.21$$

$$d\theta = \frac{M_f dl}{EI} \qquad (9.22$$

$$-dW_i = dU = \frac{1}{2}\frac{M_f dl}{EI} \qquad (9.23$$

$$-W_i = U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_f^{\,2} dl}{EI} \qquad (9.24$$

Resumiendo

Estado	Fuerza/Momento	Deformada	Energia
Traccion/Compresión	P	$\delta = \int \frac{Pdx}{EA}$	$U = \frac{1}{2}\int \frac{P^2 dx}{EA}$ **(8.8**
Corte	Q	Despreciable	Despreciable
Torsión	M	$\theta = \int \frac{Mdx}{GI_o}$	$U = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dx}{GI_o}$ **(8.9**
Flexion	M	$\theta = \int \frac{Mdx}{EI}$	$U = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dx}{EI}$ **(8.10**

9.5.- TEOREMAS DE CASTIGLIANO

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

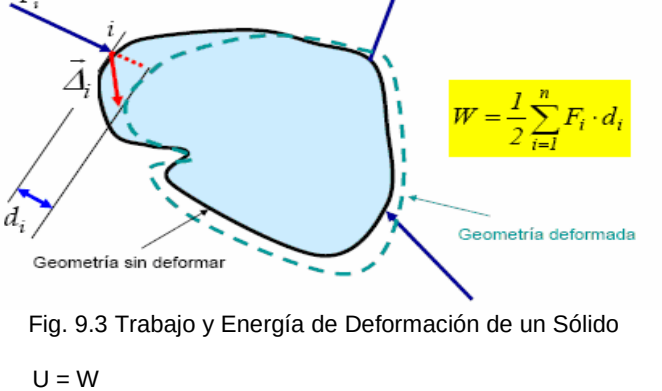


Fig. 9.3 Trabajo y Energía de Deformación de un Sólido

U = W (9.25

$$W_i = U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i d_i \quad (9.26$$

El trabajo realizado por las cargas exteriores aplicadas a un sólido es la mitad de la suma del producto de dichas cargas por los desplazamientos de sus puntos de aplicación (en las direcciones de las mismas, por supuesto).
Derivando respecto a la Fuerza Fk

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2}\left[d_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_i}{\partial F_k} F_i \right] \quad (9.27$$

Pero $$d_i = d_{i1}F_1 + d_{i2}F_2 + ... + d_{ik}F_k + ... + d_{in}F_n \quad (9.28$$

$$\frac{\partial d_i}{\partial F_k} = \delta_{ik} = \delta_{ki} \quad (9.29$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \frac{1}{2}\left[d_k + \sum_{i=1}^{n} d_{ki} F_i \right] = \frac{1}{2}\left[d_k + d_k \right] = d_k \quad (9.30$$

Esta ecuación se conoce como el Primer Teorema de Castigliano, que dice :

La derivada parcial del Trabajo de Deformación respecto de una de las fuerzas, es

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

De manera similar se halla la ecuación anterior que se conoce como el Segundo Teorema de Castigliano que dice

La derivada parcial del Trabajo de Deformación respecto del desplazamientos de un punto, es igual a la componente de la fuerza que sobre dicho punto actúa en dirección de este desplazamiento".

Si entre las cargas aplicadas existiera algún momento, bastaría con tener en cuenta que:
- donde se dijera fuerza se debería decir momento
- donde se dijera desplazamiento se debería decir giro
- donde se expresara trabajo (W=Fd, en el caso de fuerzas) se debería escribir W=Mθ.

9.6.- ECUACIONES DE CASTIGLIANO

Aplicando las ecuaciones de Castigliano a las ecuaciones de la energía se obtiene

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \frac{P}{E}\int_0^l \frac{dx}{A} \qquad \text{(9.32}$$

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M(\frac{\partial M}{\partial P_n})dx}{I} \qquad \text{(9.33}$$

$$\theta_n = \frac{\partial U}{\partial M_n} = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M(\frac{\partial M}{\partial M_n})dx}{I} \qquad \text{(9.34}$$

$$\theta_n = \frac{\partial U}{\partial M_n} = \frac{1}{G}\int_0^l \frac{M_t(\frac{\partial M_t}{\partial M_n})dx}{I_o} \qquad \text{(9.35}$$

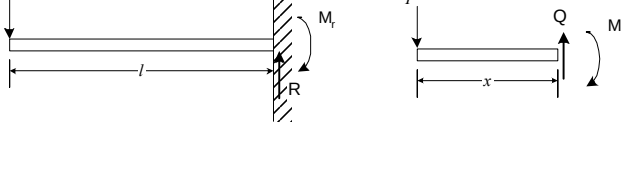
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

9.1.- Hallar la deformada en el extremo libre de una viga simplemente empotrada tiene una carga puntual.



Solución :

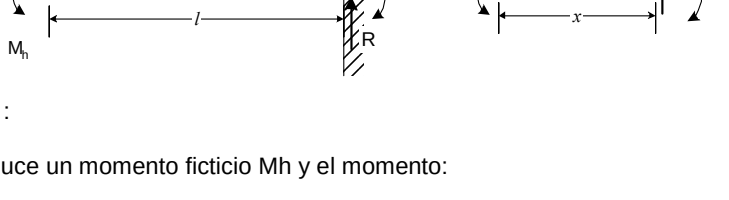
Σ M = 0 M = P x

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^l M\,(\frac{\partial M}{\partial P})dx\right]$$

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\int_0^l (Px)xdx = \frac{Px^3}{3EI}$$

$$\delta_{max} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

9.2.- Hallar la deformada angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada tiene una carga puntual



Solución :

Se introduce un momento ficticio Mh y el momento:

M = P x + Mh

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

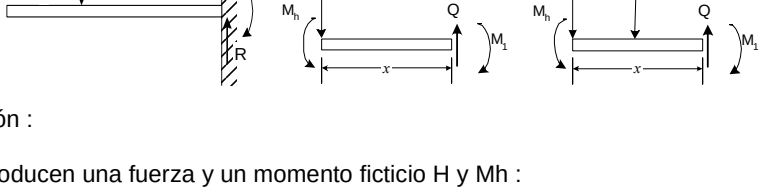
$$\theta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^l (Px + M_h)(1)\,dx\right]$$

$\theta_{max} = (Mh\ x + Px^2/2)\ 1/EI$

Pero Mh = 0

$$\theta_{max} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

9.3.- Hallar las deformadas lineal y angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una carga puntual interna



Solución :

Se introducen una fuerza y un momento ficticio H y Mh :

Los momentos son :

a ≥x ≥ 0 M1 = H x + Mh

l ≥ x ≥ a M2 = H x + P (x – a) + Mh

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial H}\right)dx + \left[\int_a^l M_2\left(\frac{\partial M_2}{\partial H}\right)dx\right]\right]$$

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a [Hx + M_h]x\,dx + \int_a^l [Hx + P(x-a) + M_h]x\,dx\right]$$

Pero H = Mb = 0

$$\delta_{max} = \frac{P}{EI}\left[\frac{l^3 - a^3}{3} - \frac{a(l^2 - a^2)}{2}\right]$$

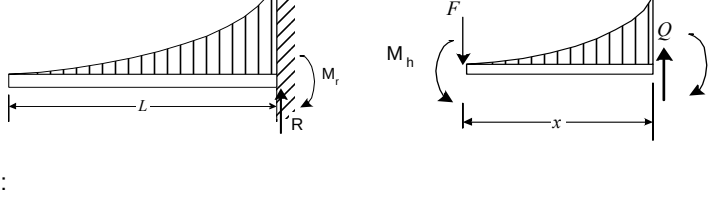
$$\theta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial M}\right)dx + \left[\int_a^l M_2\left(\frac{\partial M_2}{\partial M}\right)dx\right]\right]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$\theta_{max} = \frac{P}{EI}[\frac{l^2 - a^2}{2} - a(l-a)]$$

9.4.- Hallar las deformadas lineal y angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una distribuida p = H (x/l)n



Solución :

Se introducen una fuerza y un momento ficticio F y Mh :

De 5.10 sin F ni Mb :

$$M = -\frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)}$$

con F y Mb :

$$M = Fx - \frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + M_b$$

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^l M\,(\frac{\partial M}{\partial F})dx\right]$$

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\int_0^l [Fx + \frac{Hx^{(n+2)}}{l^n(n+2)(n+1)} + M_b]xdx$$

Pero H = Mb = 0

$$\delta_{max} = \frac{Hl^4}{EI(n+4)(n+2)(n+1)}$$

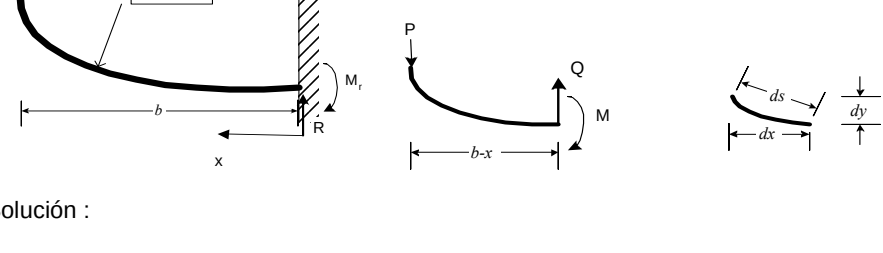
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Con H = Mh = 0

$$\theta_{max} = \frac{Hl^3}{EI\,(n+3)(n+2)(n+1)}$$

9.5.- Hallar las deformadas lineal en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una carga puntual



Solución :

M = P (b - x)

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{longitud} M\,(\frac{\partial M}{\partial P})ds\right]$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

dy = 2(x/b)dx

$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\int_0^b [P(b-x)](b-x)\sqrt{1+4(x/b)^2}\,dx$$

$$\delta_{max} = K\,\frac{Pb^3}{EI}$$

9.6.- Hallar las deformadas lineal en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una carga puntual en el extremo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Solución :

Los momentos son :

L/2 ≥ x ≥ 0 M1 = - P Sin 45 x

l ≥ x ≥ a M2 = - P (l/2 Sin 45 + v)

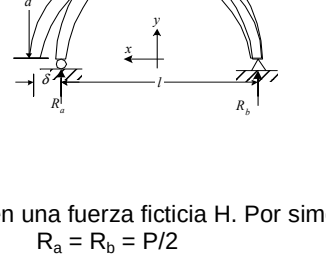
$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{l/2} M_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial P}\right)dx + \int_0^{l/2} M_2\left(\frac{\partial M_2}{\partial P}\right)dv\right]$$

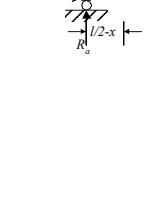
$$\delta_{max} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{l/2} P\,(x Sin\ 45)^2\,dx + \int_0^{l/2} P\,(l/2\,Sin\ 45 + v)^2\,dv\right]$$

$$\delta_{max} = \frac{P}{EI}\left[\frac{Sin^2 45\ x^3}{3}\Big|_0^{l/2} + ((l/2)\,Sin\ 45)^2 + (l\,Sin\ 45\,v) + v^2\right]\Big|_0^{l/2}$$

$$\delta_{max} = \frac{Pl^3}{EI}\ \frac{[\,4\,Sin^2 45 + 3\,Sin\ 45 + 1\,]}{24}$$

9.7.- Hallar el desplazamiento que tiene el apoyo móvil de una viga con forma parabólica y carga puntual en su centro





Solución :

Se introducen una fuerza ficticia H. Por simetría

$R_a = R_b = P/2$

l/2 ≥ x ≥ 0 $M_1 = R_a\,x - H\,y$

$M_1 = (P/2)\,(\,l/2 - x) - H\,(x^2 + d)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

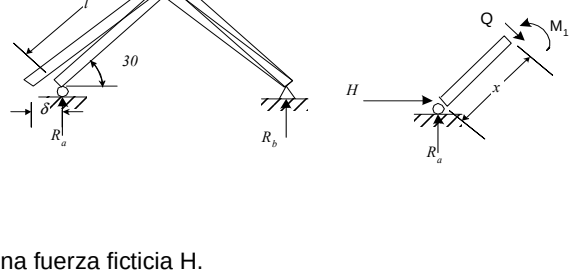
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

dy = 2 x dx

$$\delta_{max} = \frac{2}{EI}\left[\int_0^{l/2}\left[\frac{Px}{2} - H\,(x^2 + \cancel{d^2}\,)\right] x^2\sqrt{1 + 4x^2}\right] dx \qquad 0$$

$$\delta_{max} = K\,\frac{Pl^3}{EI}$$

9.8.- Hallar el desplazamiento que tiene el apoyo móvil de una viga con forma parabólica y carga puntual en su centro



Solución :

Se introducen una fuerza ficticia H.
Por simetría $R_a = R_b = P/2$

$l/2 \le x \le 0$ $M_1 = Ra \times Cos\ 30 - H \times Sin\ 30$

$$M_1 = \frac{Px\sqrt{3}}{4} - \frac{Hx}{2}$$

Hay dos intervalos. Por simetría se duplica solo uno

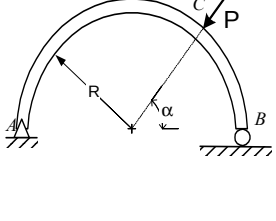
$$\delta_{max} = \frac{2}{EI}\left[\int_0^{l} M_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial H}\right) dx\right]$$

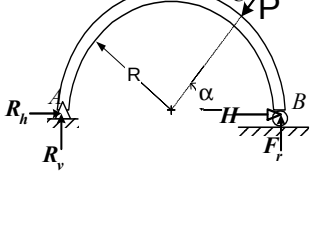
$$\delta_{max} = \frac{2}{EI}\left[\int_0^{l}\left[\frac{Px\sqrt{3}}{4} - \frac{Hx}{2}\right]\left(-\frac{x}{2}\right)\right] dx$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

9.9.- En el sistema de la figura: a) Hallar el desplazamiento horizontal producido por la fuerza P. b) El valor de α, para que el desplazamiento sea nulo.





Solución :

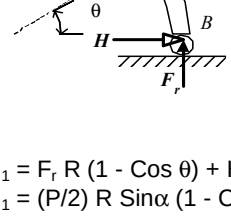
a) $\Sigma M_a = 0$ $\quad F_r\, 2R - PR \operatorname{Sin}\alpha\,(1 + \operatorname{Cos}\alpha) + P \operatorname{Cos}\alpha\, R \operatorname{Sin}\alpha = 0$

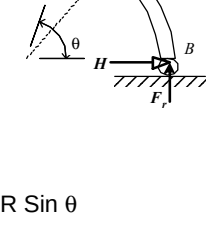
$F_r = (P/2) \operatorname{Sin}\alpha$

Se incluye una ficticia H en B para calcular la deformada horizontal de este punto

$$\delta_{BH} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\alpha} M_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial H}\right)dx + \int_{\alpha}^{\pi} M_2\left(\frac{\partial M_2}{\partial H}\right)dx\right]$$

(I





$0 \le \theta \le \alpha$ $\quad M_1 = F_r\, R\,(1 - \operatorname{Cos}\theta) + HR \operatorname{Sin}\theta$

$M_1 = (P/2)\, R \operatorname{Sin}\alpha\,(1 - \operatorname{Cos}\theta) + HR \operatorname{Sin}\theta$

(ii

$\alpha \le \theta \le \pi$ $\quad M_2 = (\tfrac{1}{2} \operatorname{Sin}\alpha + 3/2 \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta - \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\alpha)\, RP + HR\operatorname{Sin}\theta$

(iii

De i, ii y iii y simplificando

$$\delta_{BH} = \frac{PR^3 \operatorname{Sin}(\alpha)}{(3\operatorname{Cos}\alpha - 1 + \operatorname{Cos}^2\alpha)}$$

Cartagena99

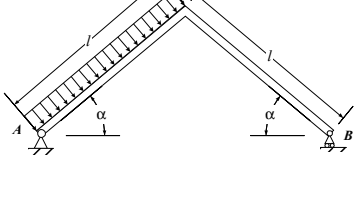
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

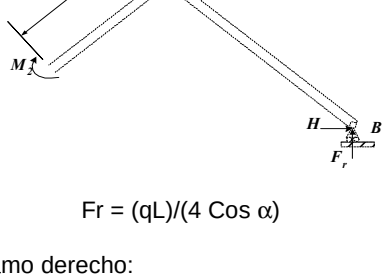
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

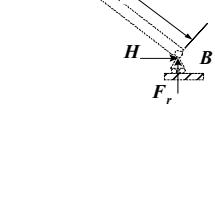
9.10.- El bastidor A,B,C, articulado en uno de sus extremos y apoyado en el otro esta cargado, en uno de sus tramos con una carga uniformemente distribuida, como se muestra en la figura. Hallar el desplazamiento horizontal de B (Considerar solamente efectos de flexión)



Solución :
De la estática:

$\Sigma M_a = 0$ $\quad 2 F_r L \cos\alpha - (qL_2/2) \cos 2\alpha - (qL_2/2) \sin 2\alpha = 0$





$Fr = (qL)/(4 \cos\alpha)$

En el tramo derecho:

$0 \le x \le L$ $\quad M_1 = F_r x \cos\alpha + H x \sin\alpha$

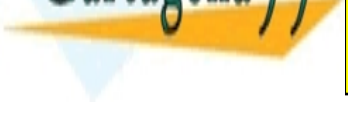
$M_1 = (qLx)/4 + H x \sin\alpha$

En el tramo izquierdo:

$0 \le x \le L$ $\quad M_2 = F_r (L \cos\alpha + x \cos\alpha) + H (L - x) \sin\alpha - qx2/2$

$M_2 = qL_2/4 + qLx/4 + H \sin\alpha - H x \sin\alpha - qx2/2$

remplazando en la ecuación de desplazamiento y simplificando:



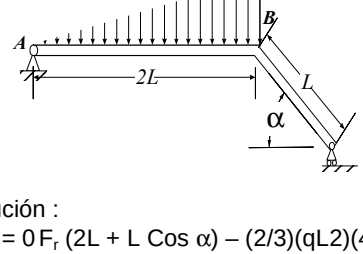
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

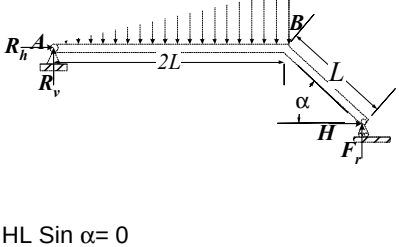
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

9.11.- El bastidor ABC mostrado en la figura soporta una carga lineal en uno de sus tramos. Hallar una expresión para calcular el desplazamiento horizontal del extremo derecho. Solamente considerar esfuerzos de flexión.

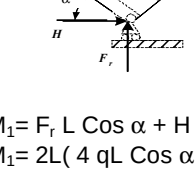


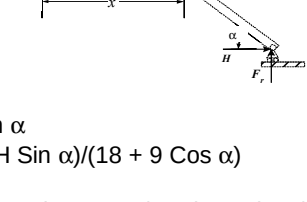


Solución :

$\Sigma M = 0$ $F_r (2L + L \cos\alpha) - (2/3)(qL2)(4/3) + HL \sin\alpha = 0$

$F_r = (8qL - 9 H \sin\alpha)/(18 + 9 \cos\alpha)$





$0 \le x \le L$ $\quad M_1 = F_r L \cos\alpha + H L \sin\alpha$

$M_1 = 2L(4 qL \cos\alpha + 9 H \sin\alpha)/(18 + 9 \cos\alpha)$

$0 \le x \le 2L$ $\quad M_2 = Fr (L \cos\alpha + x) + H L \sin\alpha - qx3/2 - (q - q_x) x2/9$

con $\quad q_x = q (1 - x/(2L))$

$$M_2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{(8\cdot q\cdot L - 9\cdot H\cdot\sin(\alpha))}{(2+\cos(\alpha))}\cdot(L\cdot\cos(\alpha) + x) + H\cdot\sin(\alpha)\cdot L - \frac{1}{2}\cdot q\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{L}\right)\cdot x^2 - \left[\frac{1}{9}\cdot q - \frac{1}{9}\cdot q\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{L}\right)\right]\cdot x^2$$

remplazando en la ecuación de desplazamiento y simplificando:

$$\delta_{BH} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^L M_1(\frac{\partial M_1}{\partial H})dx + \int_0^{2L} M_2(\frac{\partial M_2}{\partial H})dx\right]$$

Cartagena99

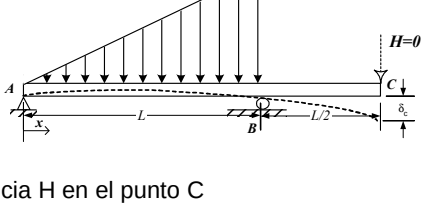
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

9.12.- Una viga simple AB, con un voladizo BC Esta sometida a una carga linealmente variable en el tramo AB, como se ve en la figura. Determinar la expresión para calcular la deflexión δc del punto C

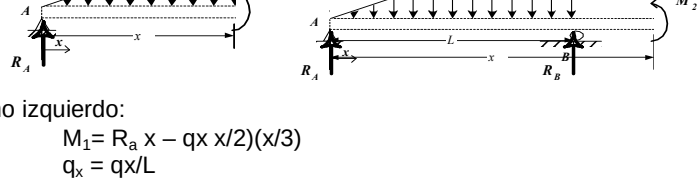


Solución :

Se aplica una carga ficticia H en el punto C

Σ Ma = 0 $R_b = 3H/2 + qL/3$

$R_a = H/2 + qL/6$



En el tramo izquierdo:

$0 \le x \le L$ $M_1 = R_a\, x - qx\, x/2)(x/3)$

$q_x = qx/L$

$$M_1 = (\frac{qL}{6} - \frac{H}{2})x - \frac{q_x x^2}{6}$$

$$M_2 = (\frac{qL}{6} + \frac{H}{2})x + (\frac{3H}{2} + \frac{qL}{3})(x - L) - \frac{qL}{2}(x - \frac{2L}{3})$$

$L \le x \le 3L/2$

La deformación total en el extremo libre será dada por la expresión:

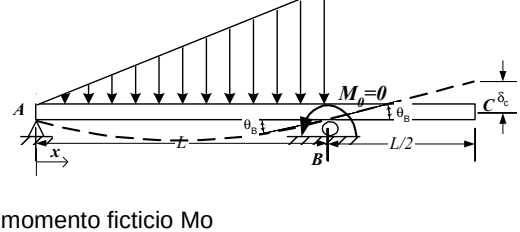
$$\delta_C = \frac{1}{EI}\left[\int_0^L M_1(\frac{\partial M_1}{\partial H})dx + \int_L^{3L/2} M_2(\frac{\partial M_2}{\partial H})dx\right]$$

resolviendo $$\delta_C = \frac{-7qL^4}{360EI}$$

9.13.- En el problema anterior, hallar el ángulo de deformación del punto B. (Use el

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Solución :

Se aplica en B un momento ficticio Mo

$\Sigma M_a = 0$ $\quad R_a = qL/6 + Mo/L$

$R_b = qL/3 - Mo/L$

$0 \le x \le L$ $\quad M_1 = (Ra\ x - qx\ x/2)(x/3)$

$qx = qx/L$

$$M_1 = \frac{qx^3}{3L} - \frac{qx^2}{3} + (\frac{qL}{6} + \frac{M_o}{L})x$$

$$M_2 = (\frac{qL}{6} - \frac{M_o}{L})x + (\frac{qL}{3} + \frac{M_o}{L})(x - L) + M_o$$

$L \le x \le 3L/2$

La deformación angular es

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\int_0^L M_1(\frac{\partial M_1}{\partial M_o})dx + \int_L^{3L/2} M_2(\frac{\partial M_2}{\partial M_o})dx\right]$$

resolviendo:

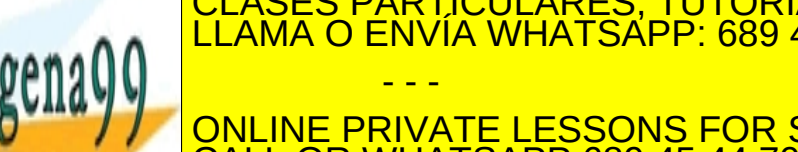
$$\theta_B = \frac{7qL^3}{180EI}$$

ahora bien la deformación en C es

$\delta_c = \theta_B\ L/2$

$$\delta_C = \frac{7qL^4}{360EI}$$

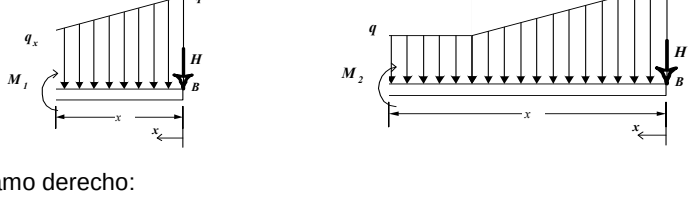
9.14. -Determinar el desplazamiento que se produce en el extremo libre de la viga mostrada y cargada como se ve en la figura.



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



Para el tramo derecho:

$$M_1 = Hx - \frac{q_x x^2}{2} - \frac{(2q - q_x)}{2}\frac{2x}{3}$$

$0 \le x \le L/2$

con $q_x = 2q(l-x)/l$

$$M_1 = \frac{(-3Hl - 3qlx + qx^2)x}{3l}$$

En el tramo izquierdo

$$M_2 = -Hx - \frac{qLx}{4} + \frac{qL^2}{24} - \frac{qx^2}{2}$$

$L/2 \le x \le L$

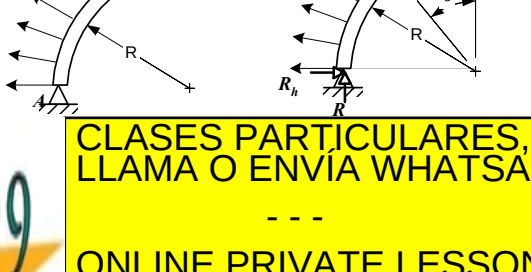
La deformación total en el extremo libre será dada por la expresión:

$$\delta_B = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2} M_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial H}\right)dx + \int_{L/2}^{L} M_2\left(\frac{\partial M_2}{\partial H}\right)dx\right]$$

resolviendo

$$\delta_B = \frac{361qL^4}{1920EI}$$

9.15.- Hallar las deformaciones horizontal y vertical del punto B de la viga curva mostrada en la figura, la carga aplicada en toda su longitud tiene dirección radial.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$$M_1 = QR(1-Cos\theta) + HRSin\theta + \int_0^{\theta} qR^2 Cos\beta(Sin\theta - Sin\beta)d\beta + \int_0^{\theta} qR^2 Sin\beta(Cos\beta - Cos\theta)d\beta$$

simplificando $M_1 = QR - QR\ Cos\ \theta + HR\ Sin\ \theta + qR2\ (1 - Cos\ \theta)$

Las deformaciones

$$\delta_V = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\alpha/4} M(\frac{\partial M}{\partial H})Rd\theta\right]$$

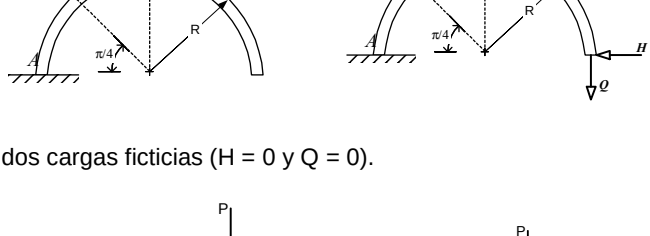
$$\delta_H = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\alpha/4} M(\frac{\partial M}{\partial Q})Rd\theta\right]$$

resolviendo:

$$\delta_V = -\frac{(2\sqrt{2-3})qR^3}{4EI}$$

$$\delta_H = -\frac{(\frac{3\pi}{8} - \sqrt{2} + \frac{1}{4})qR^3}{EI}$$

9.16.- La viga curva semicircular, empotrada en el extremo A, esta cargada en dos puntos como se muestra en la figura, determinar la deformación horizontal y vertical que se produce en el extremo libre de dicha barra.



Solución:
Se incluyen dos cargas ficticias (H = 0 y Q = 0).

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$0 \le \theta \le \pi/2$ $M_1 = -QR(1-\cos\theta)-HR\sin\theta$

$\pi/2 \le \theta \le 3\pi/4$ $M_2 = PR\cos\theta - HR\sin\theta - QR(1-\cos\theta)$

$3\pi/4 \le \theta \le \pi$ $M_3 = PR\,2^{1/2}/2\,[(\cos\theta + 2^{1/2}/2)+(\sin\theta - 2^{1/2}/2)] + PR\cos\theta - HR\sin\theta - QR(1-\cos\theta)$

Las deformaciones en el extremo libre son:

$$\delta_h = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\pi/2} M_1(\frac{\partial M_1}{\partial H})Rd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} M_2(\frac{\partial M_2}{\partial H})Rd\theta + \int_{3\pi/4}^{\pi} M_3(\frac{\partial M_3}{\partial H})Rd\theta\right]$$

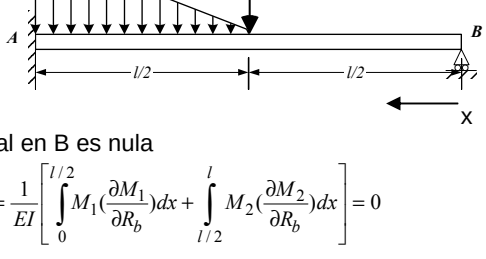
$$\delta_v = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\pi/2} M_1(\frac{\partial M_1}{\partial Q})Rd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} M_2(\frac{\partial M_2}{\partial Q})Rd\theta + \int_{3\pi/4}^{\pi} M_3(\frac{\partial M_3}{\partial Q})Rd\theta\right]$$

resolviendo y simplificando:

$$\delta_h = -\frac{PR}{16EI}(-8-4\sqrt{2}+\sqrt{2}\pi)$$

$$\delta_h = \frac{PR}{16EI}(-8\sqrt{2}+32+4\pi+\sqrt{2}\pi)$$

9.17.- Determinar la fuerza de reacción que soporta el extremo apoyado B en la viga mostrada en la figura.



Solución :

La deformada vertical en B es nula

$$\delta_{bv} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{l/2} M_1(\frac{\partial M_1}{\partial R_b})dx + \int_{l/2}^{l} M_2(\frac{\partial M_2}{\partial R_b})dx\right] = 0$$

Los momentos son

$0 \le x \le l/2$ $M_1 = R_b\,x$

$l/2 \le x \le l$ $M_2 = R_b\,x - P(x-l/2) - q_x(x-l/2)2/6$

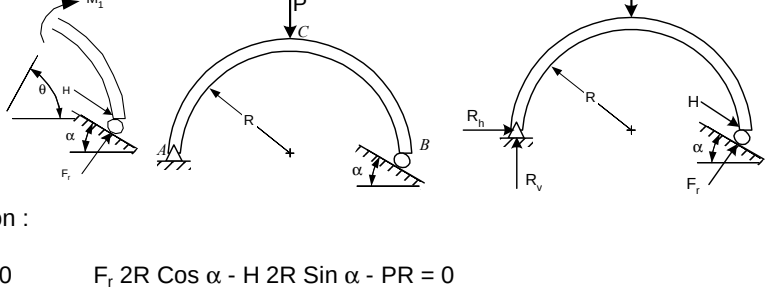
con $q_x = (P/l)(2x/l-1)$

$M_2 = (24R_b\,x - 30P\,x + 13P\,l - 8P\,x3/l2 + 12Px2/l)/24$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

9.18.- Una Barra curva delgada de forma semicircular esta articulada en A y simplemente apoyada en B, Como s muestra en la figura. En C actúa una carga vertical P. Determinar el desplazamiento vertical δv y el desplazamiento horizontal δh en el extremo B, que se encuentra apoyado en una superficie inclinada.



Solución :

$\Sigma Ma = 0$ $\quad F_r\ 2R\ Cos\ \alpha - H\ 2R\ Sin\ \alpha - PR = 0$

$F_r = (H\ Sin\ \alpha + P/2)/\ Cos\ \alpha$

Los momentos son

$0 \le \theta \le \pi/2$ $\quad M_1 = R\ Sin\theta(HCos\alpha + FrSin\alpha) + R(1 - Cos\alpha)(-HSin\alpha + Fr\ Cos\alpha)$

$\pi/2 \le \theta \le \pi$ $\quad M_2 = R\ Sin\gamma(HCos\alpha + FrSin\alpha) + R(1 + Cos\gamma)(-HSin\alpha + Fr\ Cos\alpha)$
$\quad - PR\ Cos\ \gamma$

con $\quad \gamma = \pi - \theta$

Simplificando $\quad M_2 = (R/2)(\ P + P\ Cos\ \theta + 2\ H\ Sin\ \theta\ /\ Cos\ \alpha + P\ Tan\ \alpha\ Sin\ \theta)$

La deformada

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\pi/2} M_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial H}\right)Rd\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} M_2\left(\frac{\partial M_2}{\partial H}\right)Rd\theta\right]$$

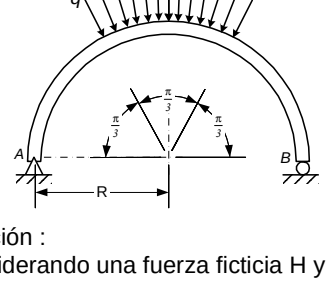
Reemplazando y simplificando

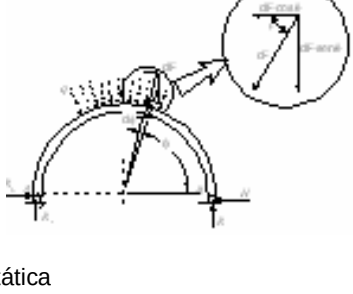
$$\delta = \frac{PR^3}{EI}\frac{(2Cos\alpha + \pi Sin\alpha)}{4Cos^2\alpha}$$

9.19.- Una barra curva delgada AB de forma semicircular esta articulada en A y simplemente apoyada en el extremo B una carga distribuida que actúa en dirección radial, como se muestra en la figura, provoca que el extremo B se desplace horizontalmente, determinar una expresión para calcular éste desplazamiento.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





Solución :

Considerando una fuerza ficticia H y de la estática

$$R_v = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} qRSin\phi d\phi = \frac{qR}{2}$$

Los momentos son

$0 \le \phi \le \pi/3$ $\quad M_1 = (q\ R2/2)\ (1- Cos\ \phi) - H\ R\ Sin\ \phi$

$$M_2 = \frac{-3}{8}\cdot q\cdot R^2 - \frac{1}{2}\cdot q\cdot R^2\cdot\cos(\theta) - H\cdot R\cdot\sin(\theta) + \frac{1}{2}\cdot q\cdot R^2\cdot\cos(\theta)^2 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot q\cdot R^2\cdot\sin(\theta)$$

$\pi/3 \le \phi \le \pi/2$

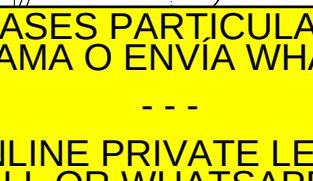
$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\pi/3} M_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial H}\right)Rd\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} M_2\left(\frac{\partial M_2}{\partial H}\right)Rd\theta\right]$$

La deformada

Reemplazando y simplificando

$$\delta = -\frac{qR^4}{EI}\frac{(1+2\sqrt{3}\pi)}{24}$$

9.20.- La barra mostrada en la figura, se encuentra sometida a la acción de la carga uniforme q en dirección vertical, determinar una expresión para calcular el desplazamiento del extremo apoyado, considerando que el apoyo tiene una inclinación de $\pi/3$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

$R_v - q\,R\,\pi + q\,R\,\alpha + Fr\,Cos\,\alpha + H\,Sin\,\alpha = 0$

de donde

$$R_h = -\frac{HCos\alpha - qR\pi Sin\alpha + qR\alpha Sin\alpha + qR - qRCos^2\alpha + H}{1+Cos\alpha}$$

$$R_v = \frac{qR\pi - qR\alpha + qRSin\alpha Cos\alpha - HSin\alpha}{1+Cos\alpha}$$

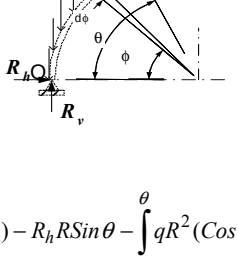
$$F_r = \frac{qR\pi - qR\alpha - qRSin\alpha - HSin\alpha}{1+Cos\alpha}$$

con $\alpha=\pi/3$

$$R_h = -H + \frac{2}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot q\cdot R\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot q\cdot R$$

$$R_v = \frac{4}{9}\cdot q\cdot R\cdot\pi + \frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot q\cdot R - \frac{1}{3}\cdot H\cdot\sqrt{3}$$

$$F_r = \frac{4}{9}\cdot q\cdot R\cdot\pi - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot q\cdot R - \frac{1}{3}\cdot H\cdot\sqrt{3}$$



El momento

$$M = R_v R(1-Cos\theta) - R_h RSin\theta - \int_0^{\theta} qR^2(Cos\phi - Cos\theta)d\phi$$

Simplificando y con H = 0

$$M = qR^2[\frac{4\pi}{9}(1-Cos\theta) + \frac{1}{6}(\sqrt{3} - Cos\theta) - Sin\theta(\frac{2\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2}) + \theta Cos\theta]$$

La deformada

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2\pi/3} M(\frac{\partial M}{\partial H})Rd\theta\right]$$

qR^4

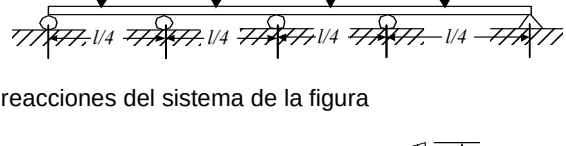
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

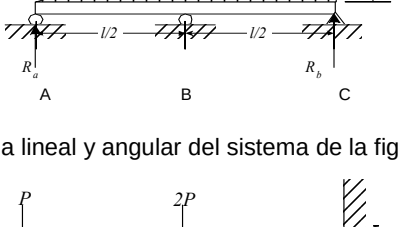
PROBLEMAS PROPUESTOS

9.21.- Hallar las reacciones del sistema de la figura

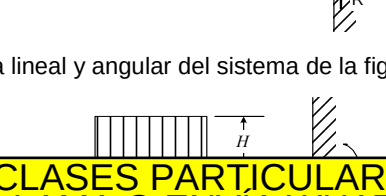
9.22.- Hallar las reacciones del sistema de la figura



9.23.- Hallar las reacciones del sistema de la figura



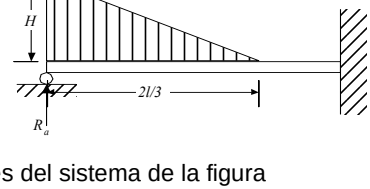
9.24.- Hallar la deformada lineal y angular del sistema de la figura



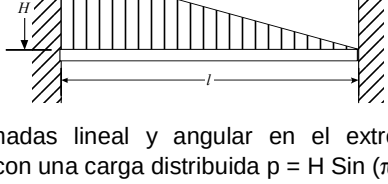
9.25.- Hallar la deformada lineal y angular del sistema de la figura

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

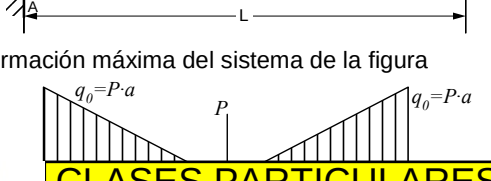


9.27.- Hallar las reacciones del sistema de la figura



9.28.- Hallar las deformadas lineal y angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada con una carga distribuida p = H Sin (πx/2l)

9.29.- Hallar las deformadas lineal y angular en el extremo libre de una viga simplemente empotrada cargada con un momento uniformemente y constante m0



9.30.- Hallar la deformación máxima del sistema de la figura

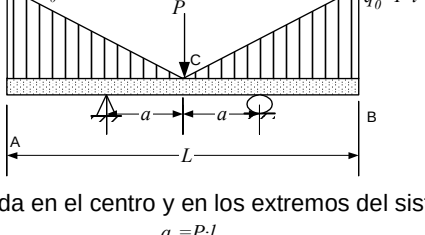
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

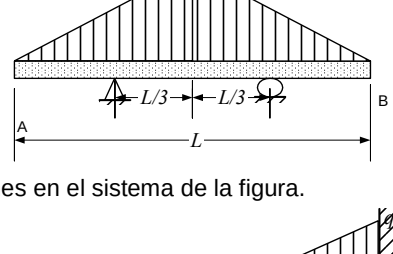
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

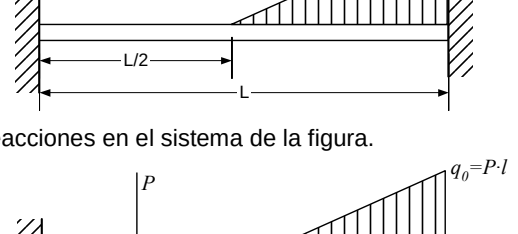
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



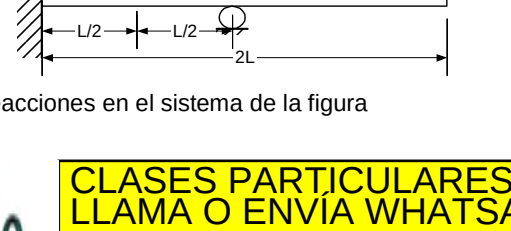
9.32.- Hallar la deformada en el centro y en los extremos del sistema de la figura.



9.33.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura.



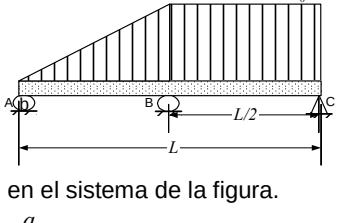
9.34.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura.



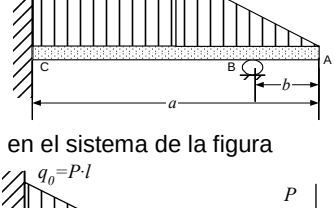
9.35.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

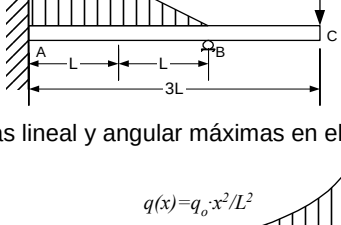
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



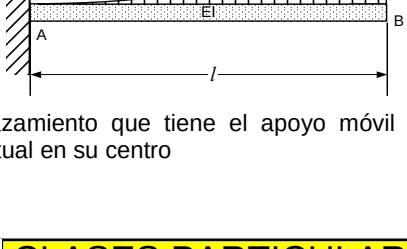
9.36.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura.



9.37.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura



9.38.- Hallar las deformadas lineal y angular máximas en el sistema de la figura.



9.39.- Hallar el desplazamiento que tiene el apoyo móvil de una viga con forma cosenoidal y carga puntual en su centro

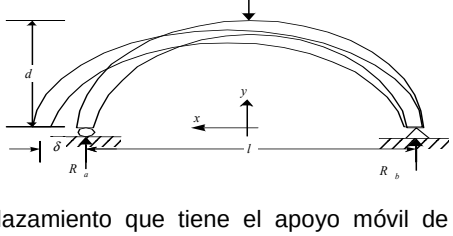
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

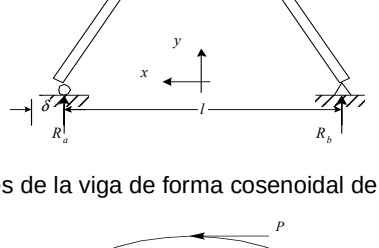
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

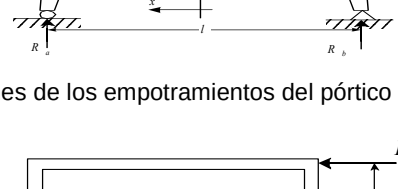
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



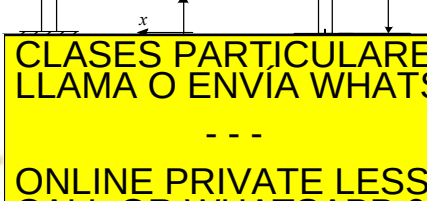
9.40.- Hallar el desplazamiento que tiene el apoyo móvil de una viga con forma cosenoidal y carga puntual en su centro



9.41.- Hallar las reacciones de la viga de forma cosenoidal de la figura

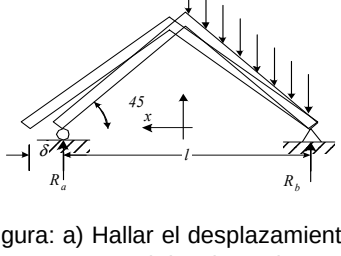


9.42.- Hallar las reacciones de los empotramientos del pórtico de la figura



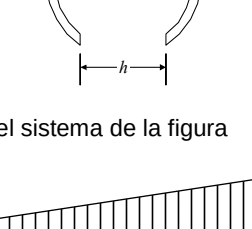
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

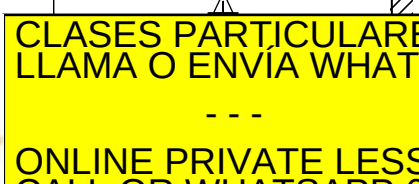


9.44.- En el sistema de la figura: a) Hallar el desplazamiento horizontal producido por las fuerzas P. b) El valor de α, para que el desplazamiento sea nulo.

9.45.- Un anillo de radio "R" de alambre de acero de radio "r" tiene una separación de h. Se pide la fuerza P que cierra esta separación



9.46.- Hallar las reacciones en el sistema de la figura



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

10.- PANDEO DE COLUMNAS

10.1.- INTRODUCCIÓN

Los procedimientos de análisis de esfuerzos y deformaciones se estudiaron en detalle en los capítulos anteriores. En este capítulo se tratará la cuestión de la posible inestabilidad de sistemas estructurales.

No hay inestabilidad en barras “cortas” sometidas a fuerzas de compresión sin embargo en barras “largas” sometidas a fuerzas de compresión hay inestabilidad y la consideración de la sola resistencia del material no es suficiente para predecir la falla. Cuando una pieza larga y delgada esta sometida a compresión se verifica que la falla de la misma ocurre mucho antes de que los esfuerzos sobrepasen el limite de fluencia del material. Este tipo de solicitación se conoce como pandeo

Este fenómeno se presenta en numerosas situaciones con cargas de compresión. Asi, Placas delgadas no pueden transmitir compresión. Vigas angostas sin arriostramiento lateral, pueden doblarse lateralmente. Tanques de almacenamiento y silos metálicos pueden deformarse gravemente por la presión externa (viento) o interna (líquidos o granos). Un tubo de pared delgada puede arrugarse cuando se somete a una torsión.

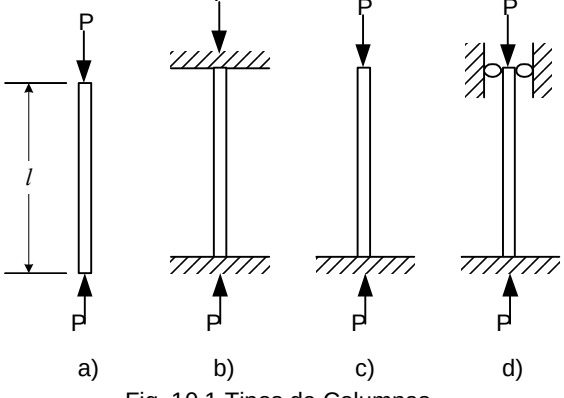
10.2.- TIPOS DE APOYOS

Los apoyos de las columnas son los mismos de las vigas, es decir :
- Apoyo móvil
- Apoyo Fijo
- Empotramiento

10.3.- TIPOS DE COLUMNAS

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



a) b) c) d)

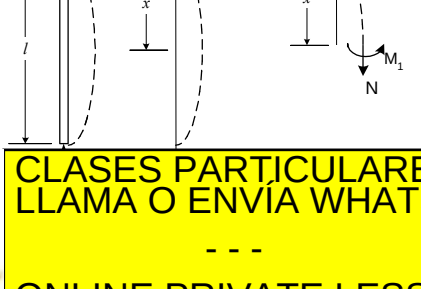
Fig. 10.1 Tipos de Columnas

De la combinación de estos apoyos se obtienen los cuatro tipos de Columnas básicas

a) Extremos articulados o libres
b) Ambos extremos empotrados
c) Un extremo empotrado el otro libre
d) Un extremo empotrado el otro articulado

10.3.- CARGA DE PANDEO DE EULER PARA COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS

Analizando una columna con extremos articulados



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

De la estática

$M = Py$ (10.1

$N = P$ (10.2

$Q = 0$ (10.3

De la ecuación de doble integración en flexión

$d^2y/dx^2 = M/EI$ (10.4

$d^2y/dx^2 = -Py/EI$ (10.5

$d^2y/dx^2 + Py/EI = 0$ (10.6

La Solución de esta ecuación es

$y = C1\,Sin\,C2x + C3Cos\,C4x$ (10.7

$dy/dx = C1C2Cos\,C2x - C3C4Sin\,C4x$ (10.8

$d^2y/dx^2 = -C1C2^2Sin\,C2x - C3C4^2CosC4x$ (10.9

Reemplazando 8.7 y 8.9 en 8.6

$(-C1C2^2Sin\,C2x - C3C4^2CosC4x) + P(C1Sin\,C2x + C3Cos\,C4x)/EI = 0$ (10.10

$Sin\,C2x(-C1C2^2 + PC1/EI) + CosC4x(-C3C4^2 + PC3/EI) = 0$ (10.11

$-C1C2^2 + PC1/EI = 0 \qquad C2 = (P/EI)^{1/2}$ (10.12

$-C3C4^2 + PC3/EI = 0 \qquad C4 = (P/EI)^{1/2}$ (10.13

$$y = C1Sin(\sqrt{\frac{P}{EI}}x) + C3Cos(\sqrt{\frac{P}{EI}}x)$$ (10.14

Las constantes c1 y c3 se hallan de las condiciones de borde. En los extremos de la columna no hay deformación.

Cuando x=0 y=0

$0 = C1\,Sin\,(0) + C3\,Cos(0)$ (10.15

$0 = C3$ (10.16

Cuando x=l y=0

$0 = C1\,Sin\,(P/EI)1/2\,l$ (10.17

Hay dos posibilidades :

$C1 = 0$ descartada ya que anula toda Solución

$\sqrt{P}\,l = n\pi$ Solución (10.18

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Empleando la relacion $I = A\,k^2$ donde A es el área y k es el radio de giro

$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 E}{\left(\frac{l}{k}\right)^2} \qquad (10.20$$

Donde l/k recibe el nombre de relacion de esbeltez de la columna.

10.4.- PANDEO ELÁSTICO DE COLUMNAS CON DIFERENTES RESTRICCIONES EN SUS EXTREMOS

Procedimientos iguales a los estudiados en la sección anterior se pueden utilizar para determinar las cargas de pandeo elástico de columnas con diferentes condiciones de borde. Las soluciones de tales problemas son muy sensibles a las restricciones de extremo. Por ejemplo la carga crítica de pandeo para una columna empotrada en su base con una carga vertical en su extremo libre superior, es

$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{(2l)^2} \qquad (10.21$$

En este caso extremo la carga crítica es sólo 1/4 de la de extremos articulados

Para una columna empotrada en un extremo y articulada en el otro

$$P_{cr} = 2.05\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \qquad (10.22$$

En tanto que para una columna empotrada en ambos extremos

$$P_{cr} = 4\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \qquad (10.23$$

Las dos últimas ecuaciones indican que mediante la restricción en los extremos las cargas de pandeo críticas van aumentando notablemente por encima del caso fundamental.

Todas las fórmulas anteriores pueden asemejarse al caso fundamental siempre que en vez de la longitud real de la columna se utilice la longitud efectiva de la misma

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

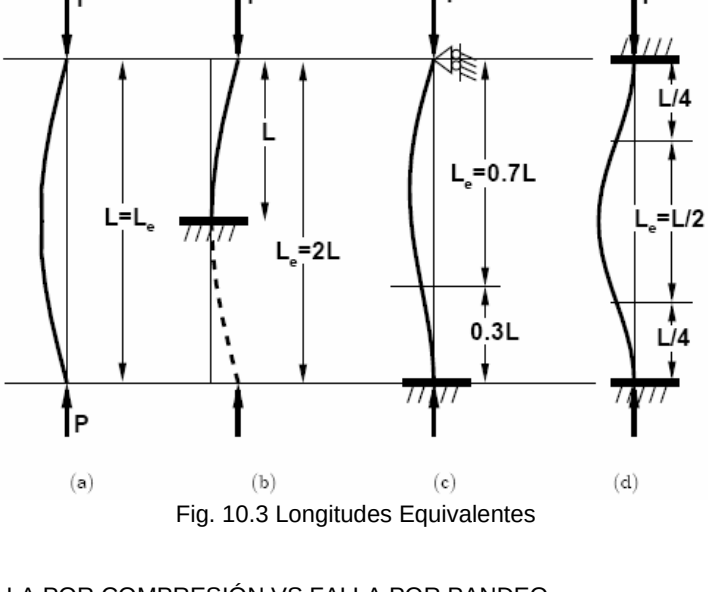
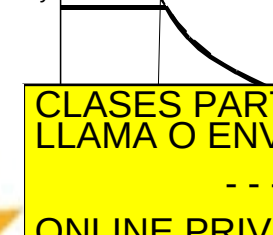


Fig. 10.3 Longitudes Equivalentes

10.5.- FALLA POR COMPRESIÓN VS FALLA POR PANDEO

En piezas cortas sometidas a compresión la falla ocurre cuando los esfuerzos superan los límites de fluencia. En piezas largas y esbeltas sometidas a compresión, la falla ocurre por pandeo a pesar de que los esfuerzos son mucho menores al límite de fluencia

Gráficamente



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

En la grafica se tiene la relación de esbeltez (l/k) como abcisa y la carga por unidad de área (P/A) como ordenada. Entonces para elementos con relacion de esbeltez bajos la falla ocurre cuando la carga por unidad de área es mayor a la fluencia. Para elementos con relacion de esbeltez altos la falla se determina por la ecuación 8.22.

10.6.- ECUACIÓN DE LA SECANTE

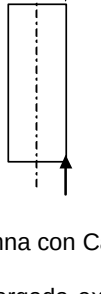


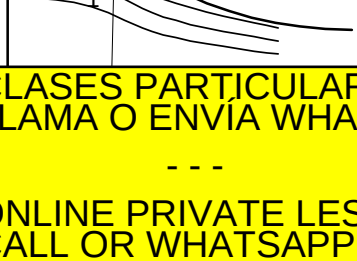
Fig. 10.5 Columna con Carga Excéntrica

Cuando una columna se encuentra cargada excéntricamente, es decir que la acción de la carga no coincide con el eje centroidal de la columna ocurre que esta excentricidad produce un momento inicial de magnitud Pe. En estos casos se deduce una ecuación llamada formula de la secante cuyo formula es

$$P/A = Sy /(1+(ec/k2)Sec[(1/k)(P/4Ae)1/2] \qquad (10.25$$

En esta ecuación c es la distancia del plano neutro de flexión a la superficie exterior.

En la grafica se comparan los resultados de la ecuación de Euler con los de la Secante



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS RESUELTOS

10.1. Se pide hallar la carga que provoca pandeo para los cuatro tipos de columnas. Material acero; longitud 10 m y diámetro 1 cm.

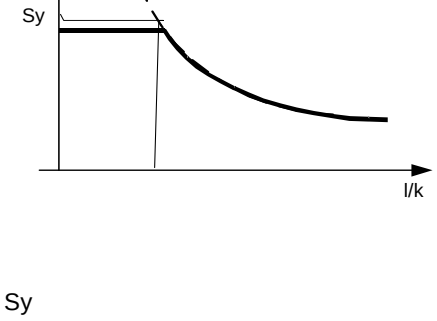
Solución :

$I = \pi d4/64$
$Pcr = \lambda\ \pi 2\ E\ (\pi d4/64)/l2$

$\lambda = 1$ Pcr= 1.01 Kg
$\lambda = 4$ Pcr= 4.06 Kg
$\lambda = ¼$ Pcr= 0.25 Kg
$\lambda = 2$ Pcr= 2.03 Kg

10.2. Determinar la relacion de esbeltez critica. Encima de la cual la falla se produce por pandeo y debajo de la cual la falla se debe a esfuerzos que superan la fluencia. Tomar $\lambda = 1$, Sy = 1800 Kg/cm2.

Solución :



Falla por compresión

$P/A = Sy$

Falla por pandeo

$Pcr/A = \lambda\ \pi 2\ E/(l/k)2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

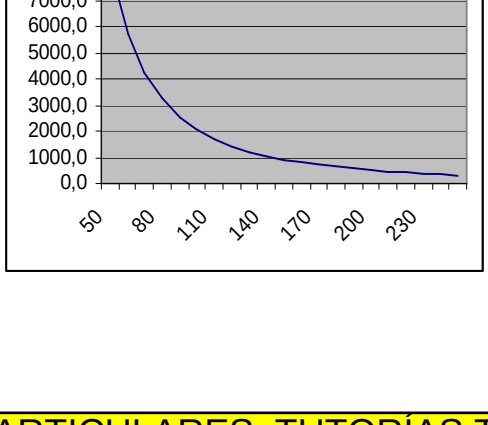
10.3. En el anterior problema. Si el diámetro de la barra es 1 cm cual es la longitud que da la relacion de esbeltez calculada.

Soluciona :

$I = \pi\, d4/64$
$A = \pi\, d2/4$
$k = (I/A)1/2 = d2/16 = 0.0625\ cm2$
$l = k\ 107.3 = 6.7\ cm$

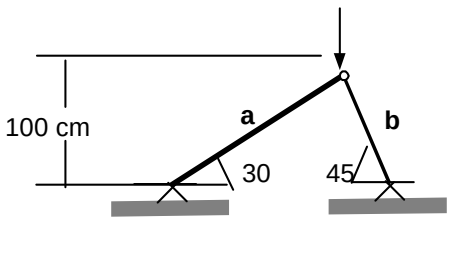
10.4. Hallar (P/A) para valores de (l/k) de 0 a 250 en la formula de Euler. Graficar los resultados. Tomar $\lambda = 1$, E = 2.1 E 06 y Sy= 1800 Kg/cm2

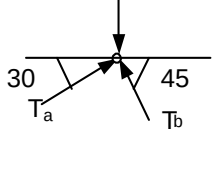
(l/k)	$P_{cr}/A = \lambda \pi^2 E/(l/k)^2$
50	8290,5
60	5757,3
70	4229,8
80	3238,5
90	2558,8
100	2072,6
110	1712,9
120	1439,3
130	1226,4
140	1057,5
150	921,2
160	809,6
170	717,2
180	639,7
190	574,1
200	518,2
210	470,0
220	428,2
230	391,8



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce





Solución:

$\Sigma Fx = 0$ $T_a \text{ Cos } 30 = T_b \text{ Cos } 45$ (i

$\Sigma Fy = 0$ $T_a \text{ Sin } 30 + T_b \text{ Sin } 45 = P$ (ii

DE i y ii $T_b \text{ Cos } 45/\text{Cos } 30) \text{ Sin } 30 + T_b \text{ Sin } 45 = P$ (iii

$T_b = 0.8965\ P$

$T_a = 0.732\ P$

$L_a \text{ Sin } 30 = 100$ $l_a = 200$ cm

$L_b \text{ Sin } 45 = 100$ $l_b = 141.42$ cm

$P_{cr} = \lambda\ \pi 2\ EI/l^2$

Para A $0.732\ P = \pi 2\ 2.1 \text{ x } 10\ 6\ \pi\ (1)4/64/2002$

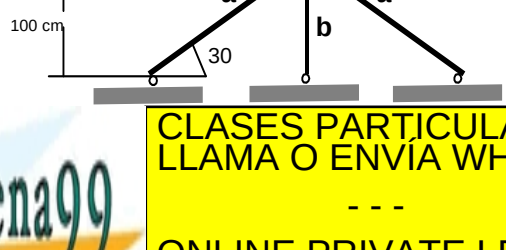
$P = 34.74$ Kg

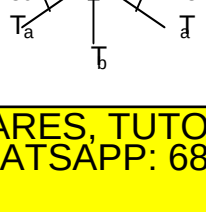
Para B $0.8965\ P = \pi 2\ 2.1 \text{ x } 10\ 6\ \pi\ (1)4/64/141.422$

$P = 56.74$ Kg

De donde $P_{max} = 34.74$ Kg

10.6. Hallar la carga máxima que puede soportar el sistema antes de sufrir Pandeo. Material acero y diámetro 1 cm

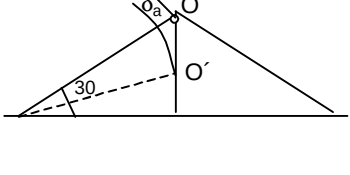


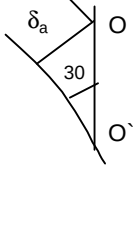


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

El 10.es hiperestatico por lo que se debe hallar la ec de deformadas





$\delta_b = OO´$
$\delta_a = OO´ \text{Sin } 30$
$\delta_b = \delta a / \text{Sin } 30$
$T_b l_b/EA = T_a l_a/(EA \text{ Sin } 30)$
$l_a \text{ Sin } 30 = l_b \quad ; \quad la = 200 \text{ cm}$
$T_b l_a \text{ Sin } 30 = T_a l_a/\text{Sin } 30$
$T_b = T_a/\text{Sin2 } 30$
$T_b = 4\ T_a$ (ii

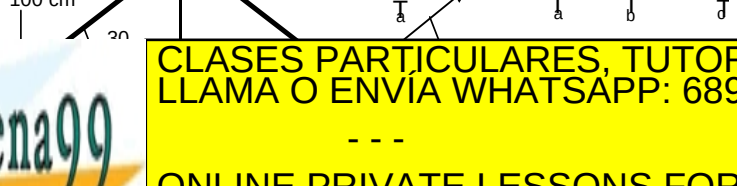
De i y ii $2\ (4\ T_b) \text{ Sin } 30 + Tb = P$
$T_b = 0.2\ P$
$T_a = 0.8\ P$

Para A $0.2\ P = \pi 2\ 2.1 \times 10\ 6\ \pi\ (1)^4/64/2002$
$P = 127.17$ Kg

Para B $0.8\ P = \pi 2\ 2.1 \times 10\ 6\ \pi\ (1)^4/64/1002$
$P = 127.17$ Kg

De donde $P_{max} = 127.17$ Kg

10.7. Si P = 1000 Kg hallar el diámetro de los elementos sometidos a compresión para evitar el Pandeo. Material acero



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

Por simetría $R_a = R_b = P/2 = 500$ Kg

En el apoyo izquierdo

$\Sigma F_x = 0$ $T_a \text{ Cos } 30 + T_c = 0$ (i

$\Sigma F_y = 0$ $T_a \text{ Sin } 30 + R_a = 0$ (ii

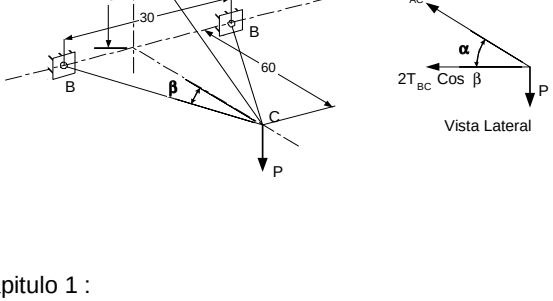
$T_a = - R_a/\text{Sin } 30 = -1000$ Kg (Compresión)

$T_c = - T_a \text{ Cos } 30 = 866.2$ Kg (Tracción)

$$T_a = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 E(\frac{\pi d^4}{64})}{(100/Sin30)^2}$$

De donde d = 2.5 cm

10.8. Se pide hallar el diámetro de la barras BC. Material acero



Solución :

Del 10.12 del capitulo 1 :

$T_{AC} = 3163.09$ Kg tracción

$T_{BC} = - 1546.56$ kg Compresion – Pandeo

$L_{BC} = (152+602)1/2$

$L_{BC} = 61.84$ cm

$P_{cr} = \pi^2 EI/l^2 = \pi^2 2.1 \times 10^6 (\pi d^4/64)/l^2 = 1546.56$

$d_{BC} = 1.55$ cm

Compárese con

$d_{BC} = 1.49$ cm hallados en el capitulo 1

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

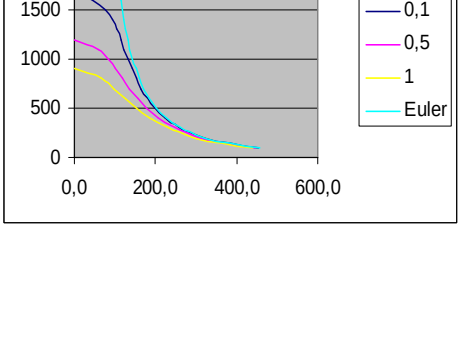
$$P/A = S_y /(1+(ec/k2)Sec[(l/k)(P/4Ae)1/2] \quad (8.23$$

En la ecuación no se puede despejar P/A pero si l/k

$$\frac{l}{k} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P/A}{4E}}} Cos^{-1} \frac{ec/k^2}{\frac{S_y}{P/A} - 1}$$

Graficando

P/A	$\frac{l}{k} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P/A}{4E}}} Cos^{-1} \frac{ec/k^2}{\frac{S_y}{P/A} - 1}$			
100	455,3	453,6	446,7	438,2
200	321,9	319,4	309,1	296,2
300	262,8	259,5	246,1	229,2
400	227,6	223,5	206,9	185,6
500	203,6	198,6	178,5	152,4
600	185,9	179,9	156,0	123,9
700	172,1	165,1	136,6	96,5
800	161,0	152,8	118,8	65,9
900	151,8	142,1	101,2	0,0
1000	144,0	132,5	82,1	
1100	137,3	123,5	58,3	
1200	131,4	114,6	0,0	
1300	126,3	105,1		
1400	121,7	94,0		
1500	117,5	78,4		
1600	113,8	46,6		
1700	110,4	0,0		



Nótese que la curva de Euler es la de la secante con ec/k2 = 0

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce

PROBLEMAS PROPUESTOS

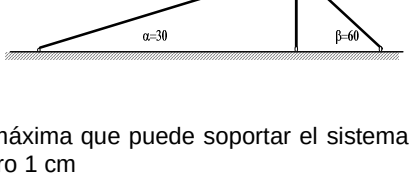
10.10. Que ancho debe tener una barra cuadrada para que no se produzaca pandeo para los cuatro tipos de columnas. Material acero, carga 100 Kg. y longitud 10 m

10.11. Determinar la relacion de esbeltez critica para los cuatro tipos de columnas. Encima de la cual la falla se produce por pandeo y debajo de la cual la falla se debe a esfuerzos que superan la fluencia. Sy = 1800 Kg/cm2.

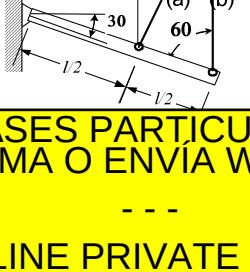
10.12. Hallar el diámetro de una barra circular solida que tiene la misma resitencia al pandeo que otra hueca con diámetros externo e interno D y d respectivamente

10.13. Hallar (P/A) para valores de (l/k) de 0 a 250 para los cuatro tipos de columnas en la formula de Euler. Graficar los resultados. Tomar E = 2.1 E 06 y Sy= 1800 Kg/cm2

10.14. Si P = 1000 Kg hallar el diámetro de los elementos sometidos a compresión para evitar el Pandeo. Material acero

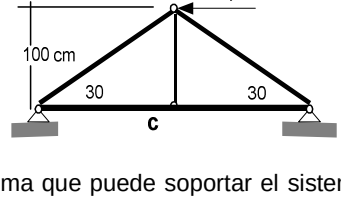


10.15. Hallar la carga máxima que puede soportar el sistema antes de sufrir Pandeo. Material acero y diámetro 1 cm

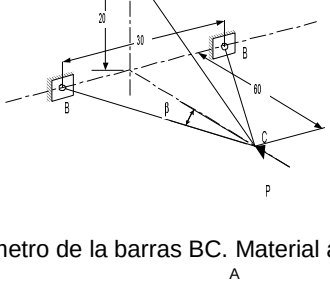


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

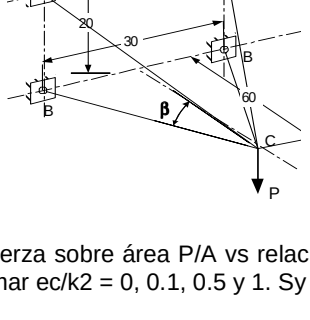
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce



10.17. Hallar la carga máxima que puede soportar el sistema antes de sufrir Pandeo. Material acero y diámetro 1 cm



10.18. Se pide hallar el diámetro de la barras BC. Material acero



10.19. Graficar la relacion fuerza sobre área P/A vs relacion de esbeltez l/k utilizando la formula de la secante. Tomar ec/k2 = 0, 0.1, 0.5 y 1. Sy = 3000 Kg/cm^2

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCN
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente do
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electróni
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un terce