***UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL***
***FACULTAD REGIONAL CORDOBA***
***DEPARTAMENTO ELECTRONICA***

***Carrera*** ***:*** *Ingeniería Electrónica*
***Asignatura*** ***:*** *Análisis de Señales Y Sistemas*

## ***Apéndice 2 :*** *Señales básicas en tiempo discreto*

***Rev 1.2*** *Enero 2001*

*La variable independiente ( tiempo ) solo tiene valores en instantes discretos, y la señal correspondiente, solo tiene valores en estos instantes discretos correspondientes.*

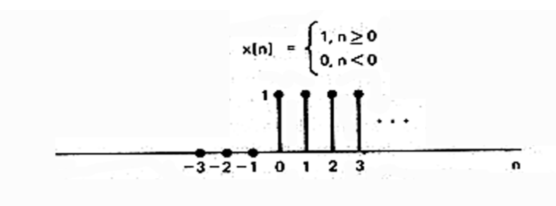
### ***Funciones pares e impares***

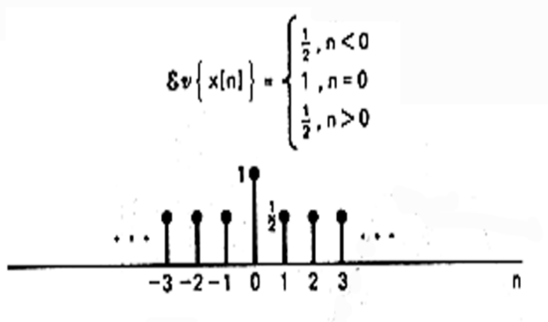
*Una señal* $x_{[n]}$ *es una señal par si es idéntica a su reflexión alrededor del orígen*

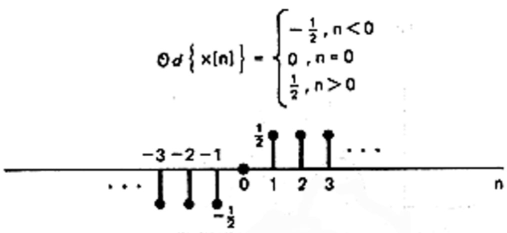
$$x_{[-n]} = x_{[n]}$$

*Una señal será referida como impar si se cumple*

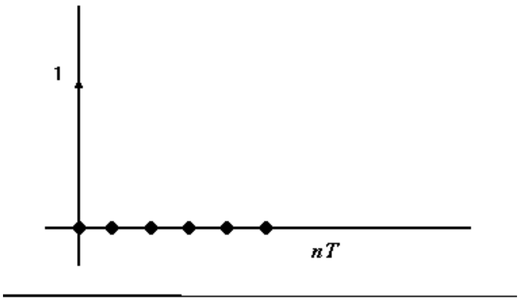
$$x_{[-n]} = -x_{[n]}$$







***Función impulso unitario***




$$d_{[n]} = \begin{cases} 1 \;\; para \;\; n = 0 \\ 0 \;\; para \;\; n \neq 0 \end{cases}$$

*Transformada Zeta del impulso*

$d_{(Z)} = \sum_{0}^{\infty} d_{[n]} Z^{-n} = 1.Z^{0} = 1$ *ROC todo el plano Z*

*La muestra unitaria de tiempo discreto posee muchas propiedades que son un paralelo muy cercano de las características del impulso unitario de tiempo continuo . Por ejemplo, así como el impulso de tiempo continuo es la primera derivada del escalón unitario de tiempo continuo, el impulso unitario de tiempo discreto es la primera diferencia del escalón de tiempo discreto.*

$x[n]d[n] = x[0]d[n]$ $\qquad d[n] = u[n] - u[n-1]$ $\qquad u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} d[m]$

*La secuencia de muestra unitaria retardada denominada* $d[n-k]$ *tiene un elemento no nulo en el instante k.*

$$d_{[n-k]} = \begin{cases} 1 & para \;\; n = k \\ 0 & para \;\; n \neq k \end{cases}$$

*Es también una potente herramienta analítica debido a su propiedad examinadora , derivada de que permite la extracción de un elemento de una secuencia completa. Para demostrar esta propiedad evaluamos el valor de x[n] en el instante k que puede ser escrito como :*

$$x_{[k]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{[n-k]} x_{[n]}$$

$d[n-k]$ *es no nulo únicamente cuando su argumento es cero o sea n=k. Cuando multiplicamos las dos secuencias término a término solamente el elemento simple x[k] será no nulo.*
*De esta manera la secuencia puede ser usada para examinar un elemento simple de la secuencia entera.*

*Esta propiedad examinadora será muy importante en la convolución de filtros digitales y secuencias de salida.*

*El rol de* $d_{[nT]}$ *en tiempo discreto es análogo a el de tiempo continuo. La respuesta en el dominio del tiempo de filtros digitales simples puede ser determinada resolviendo la ecuación de diferencias por el método de inducción.*

*Deducir la respuesta al impulso del filtro, inicialmente relajado, lo que significa que* $Y_{[nT]} = 0 \quad para\, n < 0$

$$Y_{[nT]} = X_{[nT]} + e^{a} Y_{[nT-T]}$$

$$X_{[nT]} = d_{[nT]}$$

$$Y_{[nT]} = d_{[nT]} + e^{a} Y_{[nT-T]}$$

$$Y_{[0]} = d_{[nT]} + e^{a} Y_{[-T]} = 1 + e^{a} Y_{[0-T]} = 1$$

$$Y_{[T]} = 0 + e^{a} Y_{[T-T]} = 0 + e^{a} Y_{[0]} = 0 + e^{a} 1 = e^{a}$$

$$Y_{[2T]} = 0 + e^{a}{}_{[2T-T]} = 0 + e^{a} Y_{[T]} = 0 + e^{a} e^{a} = e^{2a}$$

. . . . . . . . . . .

$$Y_{[nT]} = e^{na}$$

*Para representar la respuesta en el tiempo*

$$Lim_{n \to \infty} Y_{[nT]} = e^{-\infty} \to 0 \quad para \quad a < 0$$

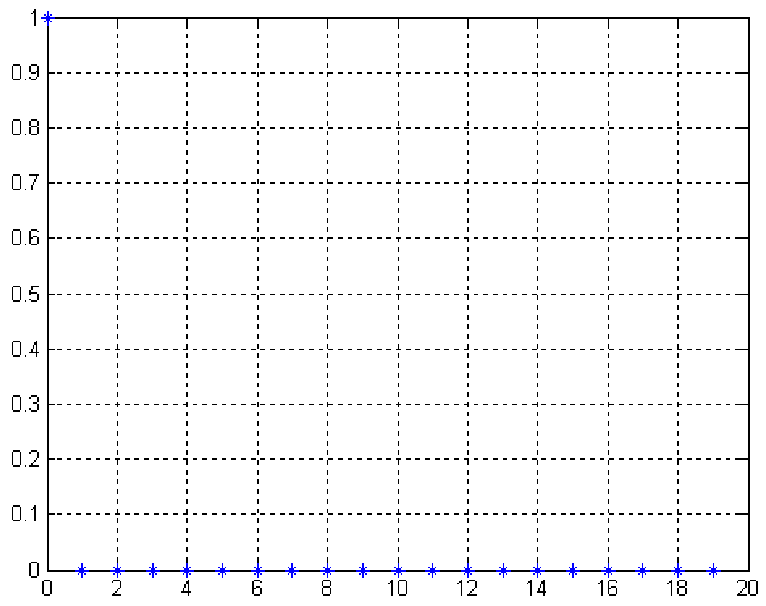
$$Lim_{n \to \infty} Y_{[nT]} = e^{0} = 1 \quad para \quad a = 0$$

$$Lim_{n \to \infty} Y_{[nT]} = e^{\infty} \to \infty \quad para \quad a > 0$$

### *MatLab*

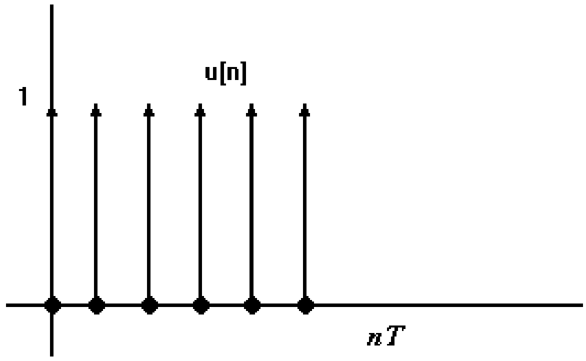
```
u=[1 zeros(1,19)];

figure(1)
k=0:1:19;
plot(k,u(1:20),'*'),grid;
```




### *Función escalón unitario*

$$U_{[n]} = \begin{cases} 1 & para\ \ n \geq 0 \\ 0 & para\ \ n < 0 \end{cases}$$




*Transformada Zeta del escalón unitario*

$$U_{(Z)} = \sum_{\infty}^{0} U_{[n]} Z^{-n} = \sum_{\infty}^{0} Z^{-n} = \sum_{\infty}^{0} \left( \frac{1}{Z} \right)^{n} = 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + .....$$

*Desarrollando la serie geométrica*

$$U_{(Z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{Z}} = \frac{Z}{Z-1} \qquad \text{ROC} \quad \left| \frac{1}{Z} \right| < 1 \qquad |Z| > 1$$

*Esta secuencia es utlizada para definir el punto de inicio de una secuencia de expresiones analíticas, por ejemplo*

$$X_{[n]} = \begin{cases} a^{n} & para \quad n \geq 0 \\ 0 & para \quad n < 0 \end{cases}$$

*podría ser escrita simplemente como* $X_{[n]} = a^{n} u_{[n]} \ \ para \ \ todo \ \ n$

*Deducir la respuesta al escalón unitario*

$$X_{[nT]} = U_{[nT]}$$

$$Y_{[nT]} = X_{[nT]} + e^{a}{}_{[nT-T]}$$

$$Y_{[nT]} = U_{[nT} + e^{a} Y_{[nT-T]}$$

$$Y_{[0]} = 1 + e^{a} Y_{[0-T]} = 1 + e^{a} Y_{[-T]} = 1$$

$$Y_{[T]} = 1 + e^{a} Y_{[T-T]} = 1 + e^{a} Y_{[0]} = 1 + e^{a} 1 = 1 + e^{a}$$

$$Y_{[2T]} = 1 + e^{a} Y_{[2T-T]} = 1 + e^{a} Y_{[T]} = 1 + e^{a} (1 + e^{a}) = 1 + e^{a} + e^{2a}$$

. . . . . . . . . . . . .

$$Y_{[nT]} = \sum_{k=0}^{n} e^{ka}$$

*Llevando la expresión a una progresión geométrica para representar la respuesta en el tiempo*

$$Y_{[nT]} - e^{a} Y_{[nT]} = (1 + e^{a} + e^{2a} + ....) - (e^{a} + e^{2a} + e^{3a} + .....)$$

$$= 1 + e^{a} + e^{2a} - e^{a} - e^{2a} - e^{3a} = 1 - e^{(n+1)a}$$

$$Y_{[nT]}(1 - e^{a}) = 1 - e^{(n+1)a} \qquad Y_{[nT]} = \frac{1 - e^{(n+1)a}}{(1 - e^{a})}$$

*Para* $a < 0\,;\, a = 0\,;\, a > 0$ *podemos analizar la respuesta,*
*evaluando* $Y_{[nT]} \quad para\, n \to \infty$

$$Lim_{n\to\infty} Y_{[nT]} = \frac{1}{(1 - e^{a})}$$ *para* $a < 0$

$$Lim_{n\to 0} Y_{[nT]} = \frac{d(1 - e^{(n+1)a})/da}{d(1 - e^{a})/da} = n + 1$$ *aplicando L'Hospital*

*para* $;\, a = 0$

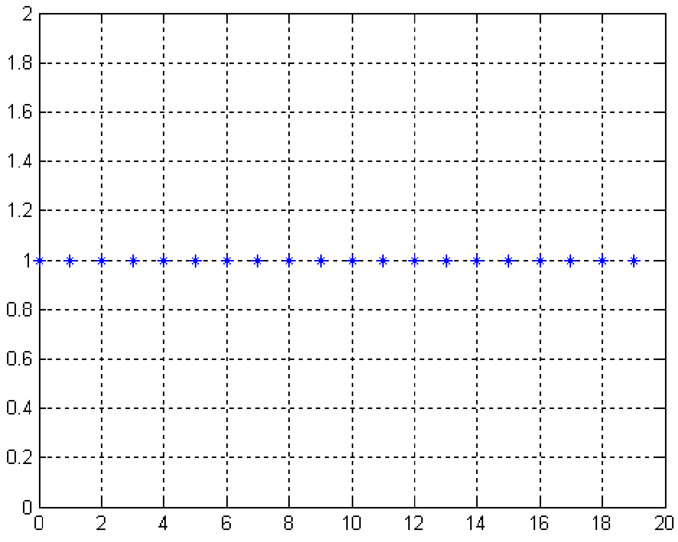
$$Lim_{n\to\infty} Y_{[nT]} = \frac{1 - e^{na}}{(1 - e^{a})} \approx \frac{e^{na}}{e^{a} - 1} \to \infty$$ *para* $a > 0$

---

***MatLab***

```
u=[1 ones(1,19)];

figure(2)
k=0:1:19;
plot(k,u(1:20),'*'),grid;
```




---

***Secuencias sinusoidales***

*Estas secuencias juegan un papel muy importante en el análisis en el dominio de la frecuencia de los filtros digitales. Pueden ser de la forma* $Sen\, wnT$ *o* $Cos\, wnT$ *.Hablando estrictamente, las unidades de* $w$ *son radianes por intervalo de muestreo.*
*Las secuencias sinusoidales en tiempo discreto tienen una interesante propiedad para la evaluación de secuencias en tiempo discreto por transformada de Fourier*

*Deducir la respuesta a una excitación senoidal*

$$X_{[nT]} = \begin{cases} Sen \quad wnT & para \quad n \geq 0 \\ 0 & para \quad n < 0 \end{cases}$$

$$Y_{[nT]} = \Re Sen w \quad nT = \Re\left(\frac{1}{2J} e^{jwnT} - \frac{1}{2J} e^{-jwnT}\right)$$

$$Y_{[nT]} = \frac{1}{2J} \Re e^{jwnT} - \frac{1}{2J} \Re e^{-jwnT} = \frac{1}{2J} Y_{1[nT]} - \frac{1}{2J} Y_{2[nT]}$$

$$Y_{1[nT]} = \Re e^{jwnT} \; para \;\; el \;\; filtro \;\; inicialmente \;\; relajado$$

$$Y_{[nT]} = X_{[nT]} + e^{a} Y_{[nT-T]}$$

$$Y_{1[0]} = e^{0} + e^{a} Y_{1[0-T]} = 1$$

$$Y_{1[T]} = e^{jwT} + e^{a} Y_{1[T-T]} = e^{jwT} + e^{a} Y_{1[0]} = e^{jwT} + e^{a}$$

$$Y_{1[2T]} = e^{j2wT} + e^{a} Y_{1[2T-T]} = e^{j2wT} + e^{a} Y_{1[T]} =$$
$$e^{j2wT} + e^{a} (e^{jwT} + e^{a}) = e^{j2wT} + e^{a+jwT} + e^{2a}$$

. . . . . . . . . . .

$$Y_{1[nT]} = e^{jwnT} + e^{(n-1)a+jwT} + e^{na}$$

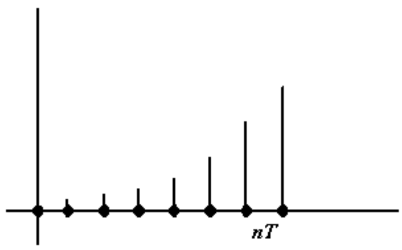
$$Y_{1[nT]} = e^{jwnT}(1 + e^{a-jwT} + \ldots\ldots + e^{n(a-jwT)}) = \sum_{k=0}^{n} e^{k(a-jwT)}$$

*Llevando a una progresión geométrica*

$$Y_{[nT]} = \frac{e^{jwnT} - e^{(n+1)a+jwnT}}{(1-e^{a-jwT})}$$

***Secuencia exponencial compleja***

$$e^{wn}$$




*Para considerar la secuencia exponencial compleja, primero debemos establecer la notación a utilizar, para un complejo cualquiera z=a+Jb, con parte real a e imaginaria b. También puede expresarse en notación exponencial, como* $z = |z| e^{\arg z}$ *. La secuencia exponencial es importante para el análisis compacto de frecuencia de los filtros digitales, y puede escribirse :* $e^{[u+Jv]n} = \{e^{un} e^{Jvn}\}$*, donde u y v son números reales, cada elemento de la secuencia es expresado en notación compleja con magnitud* $e^{un}$ *y fase vn.*
*Un caso especial de esta secuencia se dá cuando u=0.*

$$e^{Jvn} = Cos(vn) + J\,Sen(wn)$$

$$Cos(v\ n) = \frac{e^{Jvn} + e^{-Jvn}}{2} \qquad Sen\ (v\ n) = \frac{e^{Jvn} + e^{-Jvn}}{2J}$$

***Transformada Zeta de una exponencial***

$$X_{[n]} = \begin{cases} e^{\pm an} & para\ \ n \geq 0 \\ 0 & para\ \ n < 0 \end{cases}$$

$$X_{(Z)} = \sum_{\infty}^{0} X_{[n]} Z^{-n} = \sum_{\infty}^{0} e^{\pm an} Z^{-n} = \sum_{\infty}^{0} \left( \frac{e^{\pm a}}{Z} \right)^{n} = 1 + \left( \frac{e^{\pm a}}{Z} \right) + \left( \frac{e^{\pm a}}{Z} \right)^{2} + \left( \frac{e^{\pm a}}{Z} \right)^{3} + \left( \frac{e^{\pm a}}{Z} \right)^{4} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{e^{\pm a}}{Z}} = \frac{Z}{Z - e^{\pm a}}$$

***Transformada Zeta de una función cosenoidal***

$$X_{[nT]} = \begin{cases} Cos\ \ wnT & para\ \ \ n \geq 0 \\ 0 & para\ \ n < 0 \end{cases}$$

$$X_{(Z)} = Z\{Cos\ vnT\} = \frac{1}{2} Z\{e^{JvnT} + e^{-JvnT}\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - e^{JvnT} Z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-JvnT} Z^{-1}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - e^{-JvnT} Z^{-1} + 1 - e^{JvnT} Z^{-1}}{\left(1 - e^{JvnT} Z^{-1}\right)\left(1 - e^{-JvnT} Z^{-1}\right)} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 - Z^{-1}\left(e^{-JvnT} - e^{JvnT}\right)}{\left(1 - e^{-JvnT} Z^{-1} - e^{JvnT} Z^{-1} + Z^{-2}\right)} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{2 - Z^{-1} Cos\ vnT}{\left(1 - Z^{-1}\left(e^{JvnT} + e^{-JvnT}\right) + Z^{-2}\right)} \right\} = \left\{ \frac{1 - Z^{-1} Cos\ vnT}{\left(1 - Z^{-1} 2 Cos\ vnT + Z^{-2}\right)} \right\} \frac{Z^2}{Z^2} =$$

$$\left\{ \frac{Z^2 - Z\ Cos\ vnT}{\left(Z^2 - Z 2\ Cos\ vnT + 1\right)} \right\} = \frac{Z\left(Z - Cos\ vnT\right)}{Z^2 - 2Z\ \ Cos\ vnT + 1}$$

***Transformada Zeta de una función senoidal***

$$X_{[nT]} = \begin{cases} Sen\ \ wnT & para\ \ \ n \geq 0 \\ 0 & para\ \ n < 0 \end{cases}$$

$$X_{(Z)} = Z\{Sen\ \nu nT\} = \frac{1}{2J} Z\{e^{J\nu nT} - e^{-J\nu nT}\} = \frac{1}{2J}\left\{\frac{1}{1-e^{J\nu nT}Z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-J\nu nT}Z^{-1}}\right\} =$$

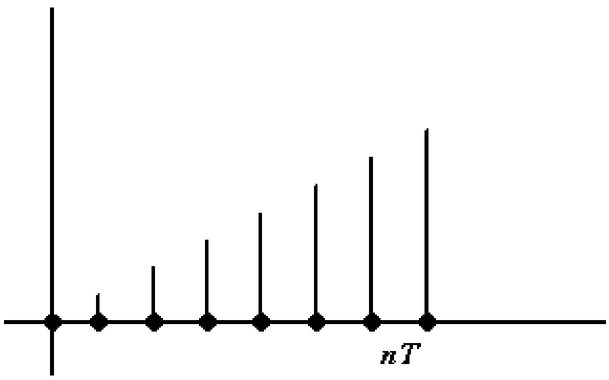
$$= \frac{1}{2J}\left\{\frac{1-e^{-J\nu nT}Z^{-1} - 1 + e^{J\nu nT}Z^{-1}}{\left(1-e^{J\nu nT}Z^{-1}\right)\left(1-e^{-J\nu nT}Z^{-1}\right)}\right\} = \frac{1}{2J}\left\{\frac{Z^{-1}\left(e^{J\nu nT} - e^{-J\nu nT}\right)}{\left(1-e^{-J\nu nT}Z^{-1} - e^{J\nu nT}Z^{-1} + Z^{-2}\right)}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{Z^{-1}Sen\ \nu nT}{\left(1-Z^{-1}\left(e^{J\nu nT} + e^{-J\nu nT}\right) + Z^{-2}\right)}\right\} = \left\{\frac{Z^{-1}Sen\ \nu nT}{\left(1-Z^{-1}2Cos\ \nu nT + Z^{-2}\right)}\right\}\frac{Z^2}{Z^2} =$$

$$\left\{\frac{Z\ Sen\ \nu nT}{\left(Z^2 - Z\,2\,Cos\ \nu nT + 1\right)}\right\} = \frac{Z\ Sen\ \nu nT}{Z^2 - 2Z\ Cos\ \nu nT + 1}$$

***Rampa unitaria***

$$R_{[n]} = \begin{cases} n & para\ \ n \geq 0 \\ 0 & para\ \ n < 0 \end{cases}$$




$$R_{(Z)} = \sum_{\infty}^{0} k\, Z^{-n} = n\sum_{\infty}^{0} U_{[n]} = nU_{[n]} =$$

$$Z\left[nU_{[n]}\right] = -Z\frac{dU_{(Z)}}{dZ} \quad \text{Propiedad de la derivada respecto a Zeta}$$

$$Z\left[nU_{[n]}\right] = -Z\frac{d}{dz}\frac{Z}{Z\text{ -}1} = -Z\frac{d}{dz}Z(Z-1)^{-1} = -Z\left[1(Z-1)^{-1} + (-1)(Z-1)^{-2}Z\right]$$

$$Z\left[nU_{[n]}\right] = -Z\left[\frac{1}{(Z-1)} - \frac{Z}{(Z-1)^2}\right] = -Z\left[\frac{Z-1-Z}{(Z-1)^2}\right] = \frac{Z}{(Z-1)^2}$$

***MatLab***

```
T=1;
u=0:T:50*T;
figure(3)
k=0:1:19;
plot(k,u(1:20),'*'),grid;
```