Introducción a la recursividad

Diseño y Análisis de Algoritmos

Universidad Rey Juan Carlos

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Contenidos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Introducción

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

¿Qué es la recursividad?

- La mayoría de programadores piensa que **la recursividad**:

  "surge cuando una rutina se llama a sí misma"

- Es cierto, pero la recursividad **es mucho más** que eso
  - Debemos alejarnos de esa visión tan estrecha
- **Herramienta muy potente** para la resolución de problemas computacionales y matemáticos
  - No hay que evitarla porque "parezca" difícil

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

¿Qué es la recursividad?

- Definición de **descendientes**, según el diccionario de la Real Academia Española:
  - *Descendientes*: "hijos, nietos o personas que **descienden** de otra"
    - Es recursiva, pero no es muy clara. . .
  - *Descender*: "proceder, por natural propagación, de un mismo principio o persona común, que es la cabeza de la familia"
    - No es recursiva, pero requiere saber qué significa "natural propagación", o "cabeza de familia". . .

- La siguiente es mucho mejor

"los hijos y los descendientes de los hijos"

$\begin{cases} \emptyset & \text{si } H(p) = \emptyset \end{cases}$

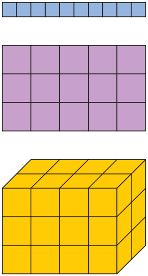
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

p: persona

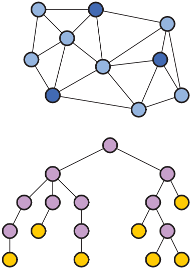
¿Cuándo es útil aplicar la recursividad?

- Especialmente útil cuando la “estructura” del problema, algoritmo o los datos no es “lineal”:

Arrays, listas, ...



Grafos, Árboles, ...



Iteración / Bucles

Recursividad

estructuras lineales

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Conceptos clave en la recursividad

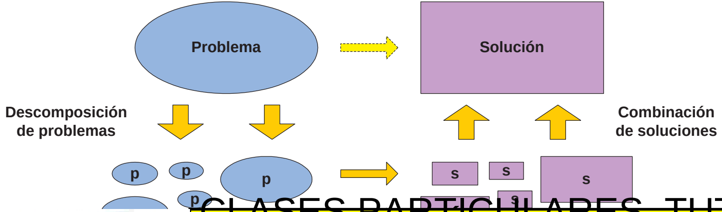
- La **descomposición/simplificación** de problemas
  - Debemos ser capaces de reconocer que para resolver un problema primero podemos **resolver subproblemas idénticos al original, pero más sencillos o de menor tamaño**
- El concepto de **inducción**
  - Construimos nuestra solución **suponiendo que ya sabemos la solución a problemas más simples**
- El paradigma de **programación declarativa**

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Descomposición/simplificación de problemas

- En general, **simplificar**, **transformar**, o **descomponer** un problema en otros más **sencillos** o de **menor tamaño** suele ser una buena idea

- La recursividad surge cuando este proceso genera problemas más simples, o de menor tamaño, idénticos al original



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Descomposición/simplificación de problemas

- Problemas muy sencillos o triviales
  - Casos base
  - Suelen aparecer cuando el “tamaño” del problema es muy pequeño

- Problemas idénticos al original pero de menor tamaño
  - Casos recursivos
  - Aparecen cuando simplificamos el problema, de manera que los nuevos subproblemas se aproximen a los casos base
  - Generalmente, hay que “reducir” parámetros hacia los casos base

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Concepto de inducción

- Pensemos en los pasos que tomamos para realizar una demostración por inducción

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Partimos de un **caso base**, para el que se cumple la definición

$$S(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

2. **Suponiendo que se verifica para** $n-1$, demostrar que se cumple para n

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i =$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Concepto de inducción

- Pensemos en los pasos que tomamos para implementar de manera recursiva:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

1. Establecer el caso base **caso base**: $S(1) = 1$ (también vale $S(0) = 0$)
2. **Suponiendo que conocemos la solución a** $S(n-1)$, construimos la solución para $S(n)$:

$$S(n) = n + S(n-1)$$

- Lo cual origina el siguiente algoritmo:

```
int sumatorio(int n){
  if(n==1)
```

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

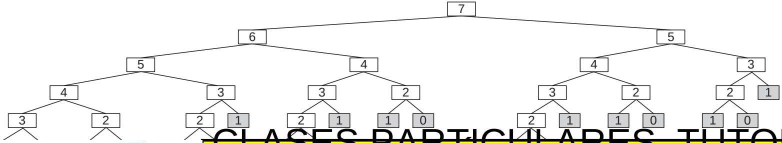
El paradigma de programación declarativa

- En el ejemplo anterior, no nos preocupa **cómo** se calculará $S(n-1)$, nos vale con saber **qué** se calcula
- En general, hay que pensar en **qué** se va a hacer mucho más que en **cómo** se va a hacer
- Suponemos que sabemos **qué** se resuelve (el subproblema), pero no nos interesa saber **cómo**
- A diferencia del paradigma imperativo, evitaremos pensar en cómo se modifican los parámetros y variables a medida que se ejecuta un

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

El paradigma de programación declarativa

- No perdemos tiempo en pensar **cómo** se resolverán los subproblemas
- Si podemos, evitaremos pensar en el *árbol de recursión*
- Por ejemplo, para números de Fibonacci saber que $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ es suficiente
- Pensar en el árbol de recursión generalmente no aclara nada



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Plantilla para diseñar algoritmos recursivos

1. Reconocer los **casos base**
2. **Simplificar** o reducir el problema original hacia los casos base
3. **Completar** la solución, suponiendo que ya sabemos resolver los subproblemas simplificados

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Tipos de recursividad

- Lineal (no final)

$$f(n, A) = \begin{cases} I & \text{si } n = 1 \\ A \cdot f(n-1, A) & \text{si } n > 1 \end{cases} \qquad g(n) = f\left(n, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)_{1,2}$$

- Lineal final (por cola)

$$f(n, a, b) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ f(n-1, a+b, a) & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \qquad g(n) = f(n, 0, 1)$$

- Múltiple

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, 2 \\ 1 + \sum_{i=1}^{n-2} f(i) & \text{si } n \geq 3 \end{cases} \qquad g(n) = f(n)$$

- Mutua

$$B(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ A(i-1) & \text{si } i \geq 2 \end{cases} \quad A(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ A(i-1) + B(i-1) & \text{si } i \geq 2 \end{cases} \quad g(n) = B(n) + A(n)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Ejemplos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Suma de los primeros n números naturales

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

1. Reconocer los **casos base** sencillos o triviales
   - $S(1) = 1$ y $S(0) = 0$
2. **Simplificar** o reducir el problema original hacia los casos base
   - El datos de entrada es $n \geq 0$. Como los casos base aparecen para $n = 1$ y $n = 0$, lo lógico es reducir n, ¿pero en cuánto?
     - $n \leftarrow n - 1$ origina un algoritmo sencillo
     - $n \leftarrow n/2$, suponiendo n par, presenta dificultades (aunque conduciría a

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Suma de los primeros n números naturales

3. **Completar** la solución, suponiendo que ya sabemos resolver los subproblemas simplificados
   - Supongo que conozco $S(n-1)$. ¿Qué operación necesitamos para conseguir $S(n)$?

     $$S(n) = S(n-1) + n \qquad \text{es lo más sencillo}$$

   - Supongo que conozco $S(n/2)$. ¿Qué operación necesitamos para conseguir $S(n)$?

     $$S(n) = \sum_{i=1}^{n/2} i + \sum_{i=n/2+1}^{n} i = S(n/2) + ??? =$$

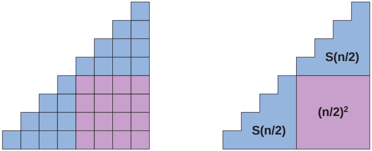
     - Se puede

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Suma de los primeros n números naturales

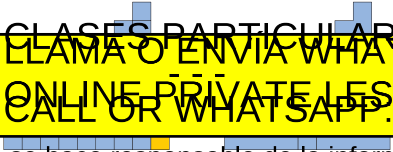
- En este caso podemos simplificar la expresión:

$$S(n) = 2S(n/2) + \frac{n^2}{4} \qquad \text{esto es un poco más fácil}$$



o

$$S(n) = 4S(n/2) - \frac{n}{2} \qquad \text{ahorras una multiplicación}$$

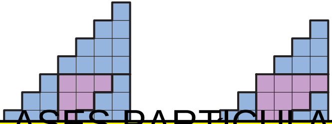


Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Suma de los primeros n números naturales

- Se pueden plantear funciones más sofisticadas (pero no necesariamente más eficientes):

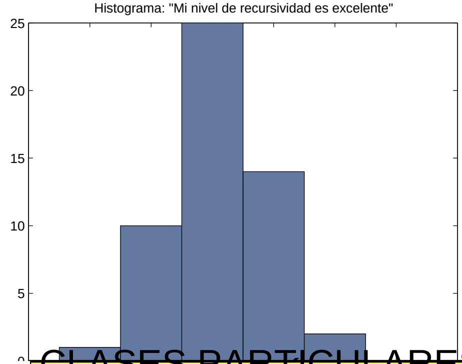
$$S(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 3S(\frac{n}{2}) + S(\frac{n}{2} - 1) & \text{si } n > 1 \text{ y } n \text{ par} \\ 3S(\frac{n-1}{2}) + S(\frac{n+1}{2}) & \text{si } n > 1 \text{ y } n \text{ impar} \end{cases}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Nivel de recursividad

- Apreciación subjetiva de alumnos de segundo curso de Grado en Ingeniería Informática sobre su nivel de recursividad



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Ejercicios que debéis saber hacer:

- Producto lento (usando sumas)
- Suma lenta (usando incrementos y decrementos de uno en uno)
- Sumar los dígitos de un número
- Contar los dígitos de un número
- Factorial
- Potencia
- Coeficientes binomiales
- Números de Fibonacci
- Sumatorio general
- Escribir un número invertido
- Torres de Hanoi

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Ejemplos básicos

- Producto lento para números naturales

$$f(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b = 0 \\ a & \text{si } b = 1 \\ a + f(a, b-1) & \text{si } b \geq 2 \end{cases}$$

- Suma lenta para números naturales

$$f(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ f(a+1, b-1) & \text{si } b \geq 1 \end{cases}$$

- Sumar los dígitos de un número

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n < 10 \\ n\%10 + f(n/10) & \text{si } n \geq 10 \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Ejemplos básicos

- Factorial

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Potencia

$$p^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ p \cdot p^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Coeficiente Binomial

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } (n = p) \text{ o } (p = 0) \\ \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Ejemplos básicos

- Sumatorio general

$$g(f,m,n) = \sum_{i=m}^{n} f(i) = \begin{cases} f(n) & \text{si } n = m \\ f(m) + g(f,m+1,n) & \text{si } m < n \end{cases}$$

- Escribir un número invertido

$$p(n) = \begin{cases} \text{write}(n) & \text{si } n < 10 \\ \text{write}(n\,\%10);\ \text{p(n/10);} & \text{si } n \geq 10 \end{cases}$$

- Torres de Hanoi

```
hanoi(int n, int destino, int origen, int auxiliar)
```

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Problemas Variados

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Algoritmo de Horner

- Un método famoso para la evaluación de un polinomio es el **algoritmo de Horner**. Evalúa un polinomio de grado n utilizando solamente n multiplicaciones. La clave detrás del algoritmo de Horner es la descomposición de un polinomio $p(x)$ de grado n de la siguiente manera:

$$p(x, d) = d_0 + x(d_1 + x(d_2 + \cdots + x(d_{n-1} + d_n x) \cdots))$$

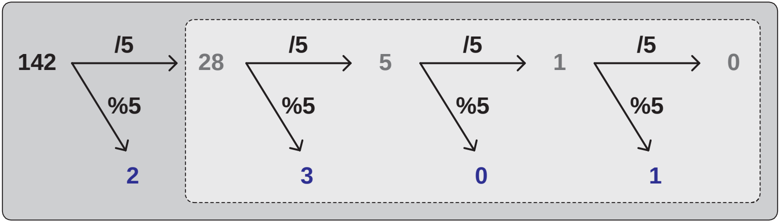
- Suponiendo que los coeficientes del polinomio de grado n se almacenan en un array d de longitud $n + 1$, una solución es:

$$f(d, inic, fin, x) = \begin{cases} d[fin] & \text{si } inic = fin \\ d[inic] + x \cdot f(d, inic + 1, fin, x) & \text{si } inic < fin \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Cambio de base

- $142_{10} = 1032_5$
- Algoritmo y descomposición del problema ($28_{10} = 103_5$):

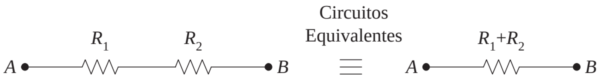


$$f(n,b) = \begin{cases} n & \text{si } n < b \\ n\%b + 10f(n/b, b) & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

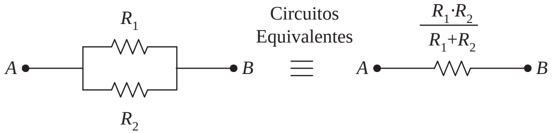
Escalera de resistencias

- **Dos resistencias en serie**



La resistencia entre A y B, $R_{AB} = R_1 + R_2$. Esto quiere decir que podemos construir un circuito equivalente con una resistencia de valor $R_1 + R_2$.

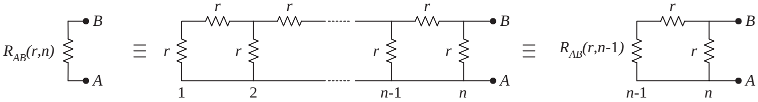
- **Dos resistencias en paralelo**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Escalera de resistencias

- Hallar una expresión recursiva $R_{AB}(r,n)$ para la resistencia entre A y B, dado el circuito mostrado con exactamente n resistencias verticales cuyo valor es r ohmios



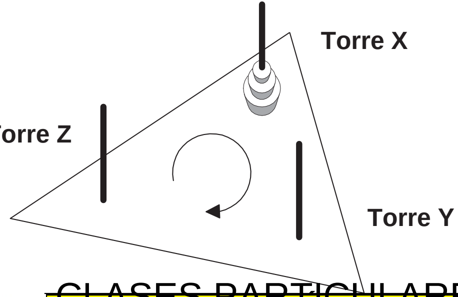
- Un circuito con una sola resistencia de valor $R_{AB}(r,n)$ entre dos extremos A y B sería equivalente al circuito en escalera completo con n peldaños

$$R_{AB}(r,1) = r \quad \ldots \frac{1}{\ldots} \quad \frac{1}{\ldots} \quad \frac{1}{\ldots}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Torres de Hanoi Cíclicas

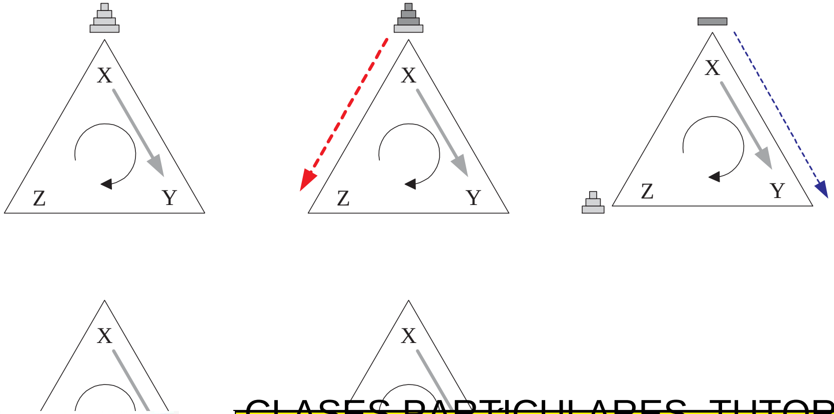
- Variante de la Torres de Hanoi, en la que los discos sólo pueden moverse en una "dirección"



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Torres de Hanoi Cíclicas

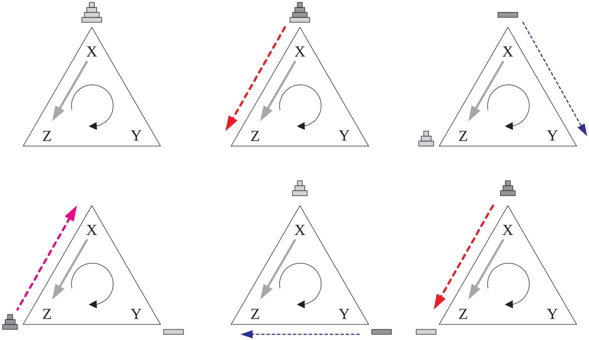
Movimiento en el sentido de las agujas del reloj



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Torres de Hanoi Cíclicas

Movimiento en el sentido contrario al de las agujas del reloj



Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Torres de Hanoi Cíclicas

```
Reloj(n,X,Y,Z)

    si n>0

        AntiReloj(n-1,X,Z,Y)
        Mueve el disco n de X a Y
        AntiReloj(n-1,Z,Y,X)


AntiReloj(n,X,Z,Y)

    si n>0

        AntiReloj(n-1,X,Z,Y)
        Mueve el disco n de X a Y
        Reloj(n-1,Z,X,Y)
```

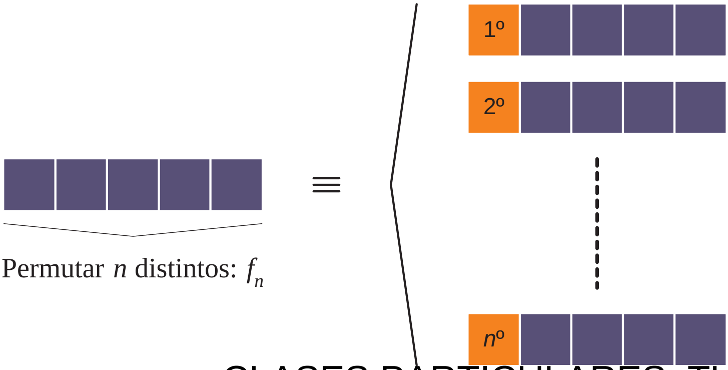
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Problemas Combinatorios

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Ordenar n elementos distintos

- Hallar de cuántas maneras pueden ordenarse n elementos distintos.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Ordenar n elementos distintos

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ n \cdot f(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- El caso base es trivial (para que coincida con la función factorial $f(0)$ debe ser interpretado como 1).
- Fijando un elemento en la primera posición, habrá $f(n-1)$ formas de ordenar $n-1$ elementos. Como hay n formas de escoger el primer elemento, es necesario sumar todas, por tanto: $f(n) = n \cdot f(n-1)$.
- Son permutaciones (factorial)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Hojas de un árbol

- Hallar cuántas hojas tiene un árbol de altura n cuyos nodos padre siempre tienen p hijos.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Hojas de un árbol

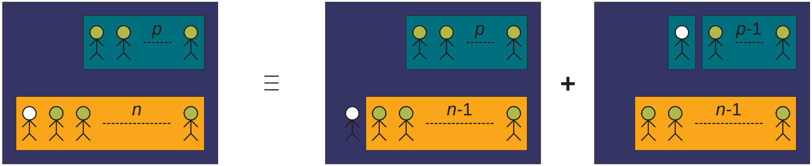
$$f(p,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ p \cdot f(p, n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- El caso base es trivial.
- Si el nodo raíz tiene p hijos, esto significa que tiene p subárboles de altura $n-1$. Como las hojas del árbol de altura n es igual a la suma de las hojas de los subárboles, tenemos: $f(p,n) = p \cdot f(p, n-1)$.
- Son variaciones con repetición (potencia)

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Grupos de alumnos

- En una clase con n alumnos, p alumnos van a salir a la pizarra a resolver un ejercicio. Calcular cuántas maneras diferentes existen de escoger a esos p alumnos, sin importar el orden.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Grupos de alumnos

$$f(n,p) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \text{ ó } p = 0 \\ f(n-1,p) + f(n-1,p-1) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Los casos base son triviales (si consideramos que $f(n,0) = 1$)
- Para hallar $f(n,p)$ podemos pensar en dos situaciones. Suponiendo que elegimos a un alumno al azar, si no sale a la pizarra habría $f(n-1,p)$ formas diferentes de elegir al resto de alumnos. Si sale a la pizarra, habrá $f(n-1,p-1)$ formas distintas de elegirlos. El resultado, naturalmente es la suma de estas cantidades.
- Son combinaciones (Coeficientes binomiales)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Subir escaleras

- ¿De cuántas maneras se puede subir unas escaleras de n peldaños, dando pasos de uno o dos escalones?

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Subir escaleras

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

- Los casos base son triviales
- Para subir las escaleras tenemos dos posibilidades al dar el primer paso:
  - Subir un escalón, con lo que quedarán $n-1$ escalones
  - Subir dos escalón, con lo que quedarán $n-2$ escalones
- Por tanto, el resultado es el número de maneras de subir $n-1$ peldaños ($f(n-1)$), más el número de maneras de subir $n-2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derecho

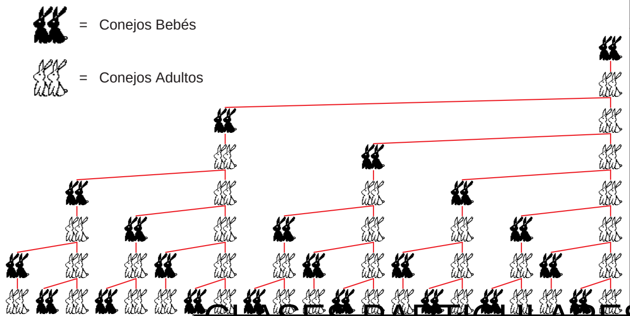
Problema de la población de conejos de Fibonacci

- Resolver el problema de la población de conejos de Fibonacci, que consiste en calcular el tamaño de una población de conejos después de n meses en condiciones ideales, bajo las siguientes reglas:
  - Inicialmente, una pareja de conejos recién nacidos, un macho y una hembra, son colocados en un prado
  - Los conejos tardan un mes en madurar
  - Los conejos maduros tardan otro mes en producir una nueva pareja de conejos recién nacidos
  - Los conejos nunca mueren
  - La hembra siembre da a luz a un macho y una hembra, desde el segundo mes en adelante

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer

Problema de la población de conejos de Fibonacci

- El proceso se puede ver, por ejemplo, mediante un árbol o una tabla



Mes	Pares Bebés	Pares Adultos	Pares Totales
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Problema de la población de conejos de Fibonacci

- Modelado:

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ A_{i-1} & \text{si } i \geq 2 \end{cases} \qquad A_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ A_{i-1} + B_{i-1} & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

- B_i y A_i son el número de parejas de conejos "Bebés" y "Adultos" en el mes i-ésimo, respectivamente

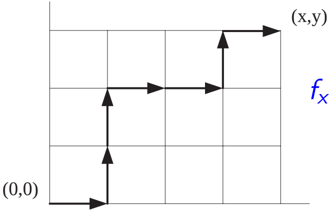
- Se puede demostrar que:

$$F_i = A_i + B_i = A_{i+1} = B_{i+2}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Contar caminos

- ¿Cuántos posibles caminos existen para llegar desde el origen (0,0) hasta la coordenada (x,y), $x, y \in \mathbb{N}$, si únicamente se pueden dar pasos de longitud 1 hacia la derecha o hacia arriba?



$$f_{x,y} = \begin{cases} 0 & \text{si } (x < 0) \text{ ó } (y < 0) \\ 1 & \text{si } (x = 0) \text{ y } (y = 0) \\ f_{x,y-1} + f_{x-1,y} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

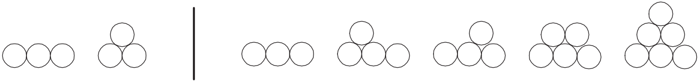
- Se puede demostrar que:

donde $n = x + y$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Configuraciones de monedas

- El problema consiste en determinar el número de configuraciones de monedas que podemos formar, en filas horizontales, de acuerdo a las siguientes reglas:
  1. Todas las monedas en una fila se están tocando (no hay huecos entre ellas)
  2. Cada moneda situada en una fila que no se la inferior, está tocando a dos monedas por debajo de ella
- La siguientes configuraciones no serían válidas:

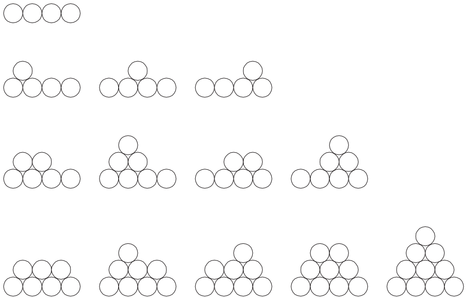


- La siguientes configuraciones no serían válidas:

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Configuraciones de monedas, primera solución

- Solución tradicional (agrupamos según el número de monedas en el segundo nivel):

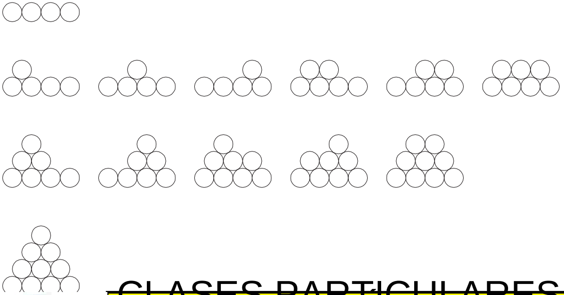


X_n es el número de configuraciones con n monedas en la fila de abajo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Configuraciones de monedas, segunda solución

- Solución alternativa (agrupamos según las configuraciones de una determinada altura):



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Configuraciones de monedas, segunda solución

- Sea $P_{h,n}$ el número total de configuraciones de altura h, que tienen n monedas en la fila de abajo, entonces para $n, h > 0$:

$$P_{h,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } h > n \\ 1 & \text{si } (h = n) \text{ o } (h = 1) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-h+1} i \cdot P_{h-1,n-i} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

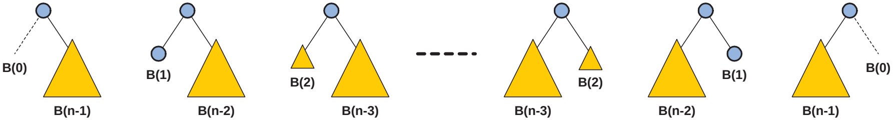
por lo que la solución es:

$$A_n = \sum_{h=1}^{n} P_{h,n} = F_{2n-1} \quad \text{(número de Fibonacci)}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

Número de árboles binarios con n nodos

- Cada nodo en un árbol binario tiene 0, 1 o 2 hijos
- Si $B(n)$ representa el número de árboles binarios con n nodos



$$B(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ \sum^{n-1} \ldots \end{cases}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos