Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

12/1/2018

Final de enero

Instrucciones:

- En cada pregunta de test sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto; y de los ejercicios: sobre 3 puntos.
- El test se recoge a los **40 minutos**.
- Tiempo total del examen: **4 horas** (Dos horas cada parte y partes separadas por un descanso).
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico a lo largo de todo el examen.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en Moodle.
- **Justificar todas las respuestas en los 10 ejercicios y los 4 problemas**.

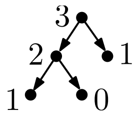
TEST (20%)

Dada la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

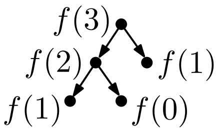
$$f(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n \in \{0,1\} \\ 3f(n-1) + 2f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

se verifica que el árbol de dependencia de la función f en 3 es

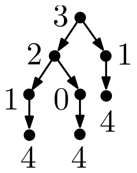
a)



b)



c)



A

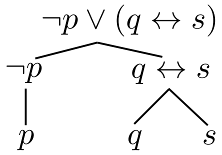
Si G es un grafo sin ciclos con 20 vértices y 12 aristas, entonces el número de componentes conexas de G es

a) 16.
b) 8.
c) depende del grafo G.

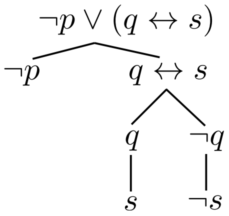
B

El árbol estructural de la fórmula $\neg p \vee (q \leftrightarrow s)$ es

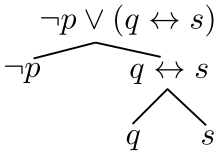
a)



b)



c)



A

En el conjunto de cadenas de bits de longitud 3 se considera la relación de equivalencia definida del siguiente modo: *una cadena está relacionada con otra si y solo si tienen la misma cantidad de unos.* Entonces, el conjunto cociente tiene

a) dos elementos.
b) tres elementos.
c) cuatro elementos.

C

Sea $f : \mathrm{LIST}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathrm{LIST}(\mathbb{N})$ la función dada por

$$f(L) = \begin{cases} L & \text{si } L = [\,] \\ [\mathrm{CAB}(L)] \parallel f(\mathrm{RESTO}(L)) & \text{si } \mathrm{LISTA}(\mathrm{CAB}(L)) = 0 \\ \mathrm{CAB}(L) \parallel f(\mathrm{RESTO}(L)) & \text{si } \mathrm{LISTA}(\mathrm{CAB}(L)) = 1. \end{cases}$$

Entonces se verifica que $f([[1,2],3])$ es

a) $[[1,2],[3]]$
b) $[[1,2,3]]$
c) $[1,2,3]$

C

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 7 juguetes iguales entre 3 chicos?

a) $\frac{9!}{7!}$
b) $7!$
c) $\frac{9!}{7! \cdot 2!}$

C

La fórmula $(p \to q) \to q$ es equivalente a

a) $p \to (q \to q)$
b) $p \vee q$
c) $\perp$

B

Si se ponderan todas las aristas del grafo $K_{3,4}$ con peso 1, se verifica que hay:

a) 3 medianas.
b) 4 medianas.
c) 7 medianas.

A

Se considera el dominio $D = \{\text{ciudadanos europeos}\}$ y los predicados $P(x) =$ "x es político", $E(x) =$ "x es español" y $C(x) =$ "x es corrupto". La formalización del enunciado "Hay políticos españoles que no son corruptos" es:

a) $\exists x\,(P(x) \wedge E(x) \wedge \neg C(x))$
b) $\forall x\,(P(x) \wedge E(x) \to \neg C(x))$
c) $\exists x\,(P(x) \wedge E(x) \to \neg C(x))$

A

En $\mathbb{Z}_{12}$, la clase de 5 contiene al número:

a) 15
b) 29
c) 40

B

DEFINICIONES (10%)

1. Definir contraejemplo de una estructura deductiva en lógica de proposiciones.

Es una valoración que es modelo de todas las premisas y no modelo de la conclusión.

2. Definir regla recursiva de una función recursiva $f : A \longrightarrow B$.

Es aquella que define la imagen de un elemento de A en términos de la imagen de otros elementos de A.

3. Definir ciclo hamiltoniano en un grafo G.

Es un ciclo que pasa por todos los vértices de G.

4. Desarrollar la expresión $(a + 2b)^n$ usando la fórmula del binomio de Newton.

$$(a+2b)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{n-k} a^{n-k} 2^k b^k$$

5. Definir mínimo en un conjunto ordenado $(A, \preceq)$.

Es un elemento m de A tal que $m \preceq a$, para todo $a \in A$.

EJERCICIOS (30%, hay 10)

Ejercicio 1. Demostrar, mediante reglas de inferencia, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$\neg p \wedge (t \to s),\ \ q \to \neg s,\ \ p \vee q \quad \Longrightarrow \quad \neg(t \vee s)$$

Solución: Sean $P_1 = \neg p \wedge (t \to s)$, $P_2 = q \to \neg s$, $P_3 = p \vee q$ y $Q = \neg(t \vee s)$. Haremos la demostración por derivación o implicación directa:

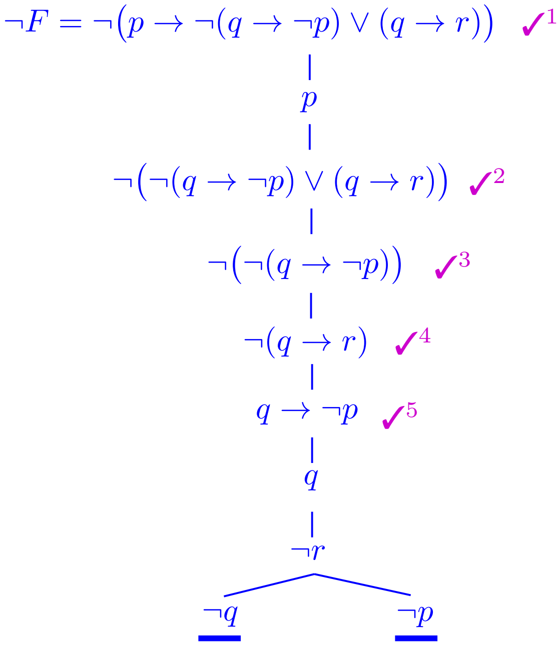
1. $\neg p$ } por P_1 y Simplificación $(A \wedge B \Rightarrow A,\ B)$
2. $t \to s$
3. q por $1, P_3$ y Silogismo Disyuntivo.
4. $\neg s$ por $3, P_2$ y Modus Ponens.
5. $\neg t$ por $2, 4$ y Modus Tollens.
6. $\neg s \wedge \neg t$ por $4, 5$ y Conjunción $(A, B \Rightarrow A \wedge B)$.
7. $\neg(s \vee t) = Q$ por 6 y Ley de De Morgan.

Luego la estructura deductiva es correcta.

Ejercicio 2. Usar el método del tableau para clasificar F (tautología, contradicción o contingente).

$$F = p \to \neg(q \to \neg p) \vee (q \to r)$$

Solución: Si se empieza por el tableau de $\neg F$:



Como el tableau de $\neg F$ es cerrado, $\neg F$ es contradicción y, por tanto, F es tautología.

Ejercicio 3. Dada la fórmula $F = \forall x\,\big(\exists y\, P(x,y) \to \exists y\, Q(y,x)\big)$ y la interpretación I con dominio $D = \{d_1, d_2\}$ y funciones booleanas $P, Q : D \times D \to \{0,1\}$ parcialmente definidas a continuación, se pide completar su definición para que I sea:

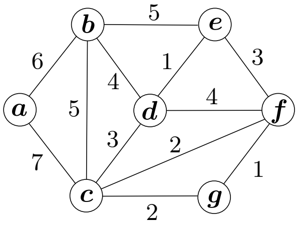
a) *(1'5 puntos)* Modelo de F

$$P : \begin{cases} P(d_1,d_1) = 0 & P(d_2,d_1) = 0 \\ P(d_1,d_2) = 1 & P(d_2,d_2) = 0 \end{cases} \qquad Q : \begin{cases} Q(d_1,d_1) = 1 & Q(d_2,d_1) = 0 \\ Q(d_1,d_2) = 0 & Q(d_2,d_2) = 0 \end{cases}$$

b) *(1'5 puntos)* No modelo de F

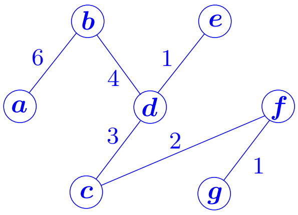
$$P : \begin{cases} P(d_1,d_1) = 0 & P(d_2,d_1) = 0 \\ P(d_1,d_2) = 0 & P(d_2,d_2) = 1 \end{cases} \qquad Q : \begin{cases} Q(d_1,d_1) = 1 \text{ ó } 0 & Q(d_2,d_1) = 1 \text{ ó } 0 \\ Q(d_1,d_2) = 0 & Q(d_2,d_2) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Se considera el siguiente grafo.



a) *(2 puntos)* Aplicar el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol generador (o recubridor) de peso mínimo. Hallar su peso e indicar el orden en que han sido elegidas las aristas.

Solución: Para obtener un árbol recubridor de peso mínimo basta, según el algoritmo de Kruskal, ir eligiendo aristas de menor peso evitando que se formen ciclos, hasta completar un total de aristas igual al número de vértices menos 1: $7 - 1 = 6$.

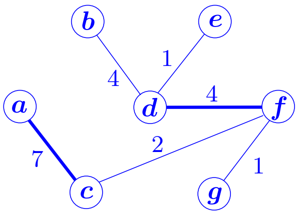


El orden en que han sido elegidas las aristas del árbol ha sido: gf, de, cf, cd, db, ab.
Y el peso del árbol recubridor T es:

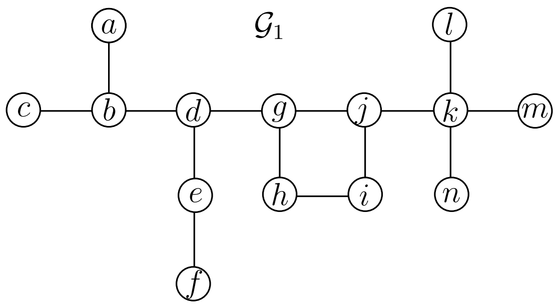
$$w(T) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 17$$

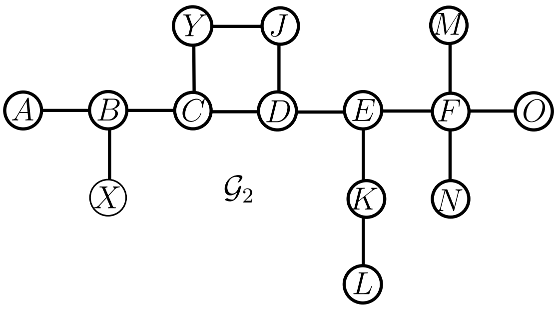
b) *(1 punto)* Dar el árbol generador de peso mínimo si las aristas ac y df han de estar en dicho árbol.

Solución: Seguimos un procedimiento semejante al anterior, solo que contamos como ya seleccionadas las aristas ac y df y solo tenemos que elegir 4 tomando las de menor peso que no formen ciclos con las ya elegidas.



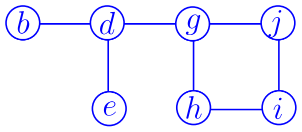
Ejercicio 5. Estudiar si los grafos de la figura son isomorfos.



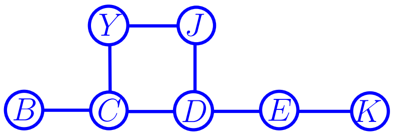


SOLUCIÓN: En cada uno de estos grafos se consideran los subgrafos inducidos por los vértices de grado 2 y 3:

$$\mathcal{G}_1' = \langle v \in V_{\mathcal{G}_1} \,/\, g(v) = 2 \text{ ó } 3 \rangle$$

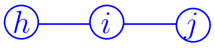


$$\mathcal{G}_2' = \langle v \in V_{\mathcal{G}_2} \,/\, g(v) = 2 \text{ ó } 3 \rangle$$



Y ahora se considera los subgrafos inducidos por los vértices de grado 2 en $\mathcal{G}_1'$ y en $\mathcal{G}_2'$:

$$\mathcal{G}_1'' = \langle v \in V_{\mathcal{G}_1'} \,/\, g(v) = 2 \rangle$$



$$\mathcal{G}_2'' = \langle v \in V_{\mathcal{G}_2'} \,/\, g(v) = 2 \rangle$$

Evidentemente, $\operatorname{sec}(\mathcal{G}_1'') = [2,1,1] \neq \operatorname{sec}(\mathcal{G}_2'') = [1,1,0]$.

Luego $\mathcal{G}_1'' \not\approx \mathcal{G}_2''$, y en consecuencia $\mathcal{G}_1' \not\approx \mathcal{G}_2'$ que a su vez implica que $\mathcal{G}_1 \not\approx \mathcal{G}_2$.

Ejercicio 6. Una cadena de TV dispone de 6 series, 4 documentales, 3 concursos y 2 debates para emitir en el horario *prime-time*. Si tiene que elegir 4 programas distintos, hallar de cuántas formas puede hacerlo en los siguientes casos:

a) *(1 punto)* Si se quiere establecer la programación completa incluyendo la hora de emisión de cada uno de los programas elegidos.

SOLUCIÓN: Hay que seleccionar 4 programas distintos de un total de $6+4+3+2=15$ programas y además hay que ordenarlos según la hora de emisión, luego se trata de variaciones sin repetición de 4 elementos tomados de un total de 15 y por tanto hay:

$$V(15,4) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32760$$

b) *(2 puntos)* Si sólo se tiene en cuenta los programas elegidos y entre ellos debe haber al menos una serie.

SOLUCIÓN: En este caso el orden de los programas no importa y si no hubiera más restricciones serían combinaciones de 4 elementos tomados de un conjunto de 15. Como debe haber al menos una serie, de esas combinaciones eliminamos aquellas en las que no hay ninguna serie. En total habrá:

$$\binom{15}{4}-\binom{9}{4} = \frac{15!}{4!11!}-\frac{9!}{4!5!} = \frac{1}{4!}(15\cdot14\cdot13\cdot12-9\cdot8\cdot7\cdot6) = 15\cdot7\cdot13-3\cdot7\cdot6 = 21(65-6) = 1239$$

Ejercicio 7. ¿Cuántas secuencias de 8 letras elegidas entre las letras de la palabra ARBOL existen de modo que haya 6 vocales delante y las dos últimas sean dos consonantes distintas, o bien, 6 consonantes delante y las dos últimas, dos vocales iguales?

SOLUCIÓN: Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{palabras de 8 letras tomadas de la palabra ARBOL}\} \\ A_1 &= \{\text{palabras de } A \text{ con 6 vocales delante y 2 consonantes distintas al final}\} \\ A_2 &= \{\text{palabras de } A \text{ con 6 consonantes delante y 2 vocales iguales al final}\} \end{aligned}$$

Se busca, por tanto el cardinal de $A_1 \cup A_2$. Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, por el principio de adición:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$$

Cada una de las palabras de A_i se puede construir en un proceso de dos pasos: primero la subpalabra inicial de 6 letras y luego la subpalabra final de 2 letras.
Para A_1:

- Tomamos una selección ordenada de 6 vocales de $\{A, O\}$, obviamente repetidas: hay $VR(2,6) = 2^6$ formas de hacerlo.
- Tomamos una selección ordenada de 2 consonantes distintas de $\{R, B, L\}$: hay $V(3,2) = 3 \cdot 2 = 6$ formas de hacerlo por cada una del paso anterior.

Como las palabras así construidas son distintas entre sí, por el principio de multiplicación, $|A_1| = 2^6 \cdot 6 = 3 \cdot 2^7$.

Análogamente, para A_2:

- Tomamos una selección ordenada de 6 consonantes de $\{R, B, L\}$, obviamente repetidas: hay $VR(3,6) = 3^6$ formas de hacerlo.
- Tomamos una vocal de $\{A, O\}$ y la repetimos: hay $C(2,1) = 2$ formas de hacerlo por cada una del paso anterior.

Como las palabras así construidas son distintas entre sí, por el principio de multiplicación, $|A_2| = 3^6 \cdot 2$.

Por tanto,

$$|A_1 \cup A_2| = 3 \cdot 2^7 + 3^6 \cdot 2$$

Ejercicio 8. Probar por inducción que $f(n) = g(n)$ para todo natural $n \geq 0$ siendo

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \quad (RB1) \\ 1 & \text{si } n = 1 \quad (RB2) \\ f(n-1) + 2f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \quad (RR) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(n) = 2^n + (-1)^n$$

Solución: Usaremos la versión del principio de inducción adecuada al tipo de recursividad usada para definir f.

Paso base: $f(0) \overset{RB1}{=} 2 = 1 + 1 = 2^0 + (-1)^0 = g(0)$

$f(1) \overset{RB2}{=} 1 = 2 - 1 = 2^1 + (-1)^1 = g(1)$

Luego es cierto para $n = 0$ y $n = 1$.

Paso inductivo: Supongamos que $f(n) = g(n)$ y $f(n+1) = g(n+1)$ (H.I.) para $n \geq 0$, entonces para $n+2$:

$$\begin{aligned} f(n+2) \underset{n+2\geq 2}{\overset{RR}{=}} \; & f(n+1) + 2f(n) \overset{H.I.}{=} g(n+1) + 2g(n) = \\ & 2^{n+1} + (-1)^{n+1} + 2\big(2^n + (-1)^n\big) = 2^0 + (-1)^0 = \\ & 2^{n+1} + (-1)^{n+1} + 2^{n+1} + 2(-1)^n = \\ & 2 \cdot 2^{n+1} + (-1)^n(-1+2) = 2^{n+2} + (-1)^n \cdot 1 = 2^{n+2} + (-1)^n \cdot (-1)^2 = \\ & 2^{n+2} + (-1)^{n+2} = g(n+2) \end{aligned}$$

Luego es cierto para $n+2$.

Por tanto, por el principio de inducción, es cierta la igualdad para todo $n \geq 0$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida recursivamente por:

$$f(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m \quad (RB) \\ 1 + f(n, m-1) & \text{si } n < m \quad (RR1) \\ 1 + f(n, m+1) & \text{si } n > m \quad (RR2) \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Hallar el conjunto de partida de f.

Solución: $CP_f = \{(n,n) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$

b) *(1 punto)* Evaluar detalladamente y siguiendo el esquema recursivo dado $f(7,3)$ y $f(2,5)$.

Solución:

$$\begin{aligned} f(7,3) &\overset{RR2}{=} 1 + f(6,3) = 1 + 3 = 4 \\ f(6,3) &\overset{RR2}{=} 1 + f(5,3) = 1 + 2 = 3 \\ f(5,3) &\overset{RR2}{=} 1 + f(4,3) = 1 + 1 = 2 \\ f(4,3) &\overset{RR2}{=} 1 + f(3,3) = 1 + 0 = 1 \\ f(3,3) &\overset{RB}{=} 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2,5) &\overset{RR1}{=} 1 + f(2,4) = 1 + 2 = 3 \\ f(2,4) &\overset{RR1}{=} 1 + f(2,3) = 1 + 1 = 2 \\ f(2,3) &\overset{RR1}{=} 1 + f(2,2) = 1 + 0 = 1 \\ f(2,2) &\overset{RB}{=} 0 \end{aligned}$$

c) *(1 punto)* Describir lo que devuelve $f(n,m)$.

Solución: $f(n,m) = \begin{cases} n - m & \text{si } n \geq m \\ m - n & \text{si } n < m \end{cases} = |n - m|$

Ejercicio 10. Sea A el conjunto de los números naturales de dos cifras. Se considera en A la siguiente relación de equivalencia R:

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad \text{el producto de las cifras de } x \text{ coincide con el producto de las cifras de } y$$

a) *(1 punto)* Describir la clase de 10 y dar su cardinal.

b) *(2 puntos)* Hallar una clase que tenga un solo elemento y otra que tenga exactamente dos.

SOLUCIÓN: En $A = \{10, 11, 12, 13, \ldots, 99\}$, con la relación de equivalencia dada,

$$\begin{aligned}[10] &= \{x \in A \,/\, \text{ el producto de las cifras de } x \text{ es } 0\} \\ &= \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}\end{aligned}$$

Una clase con un solo elemento: $[11] = \{ab \in A \,/\, a \cdot b = 1\} = \{11\}$

(O también $[99], [88], [77]$ y $[55]$).

Una clase con dos elementos: $[12] = \{ab \in A \,/\, a \cdot b = 2\} = \{12, 21\}$.

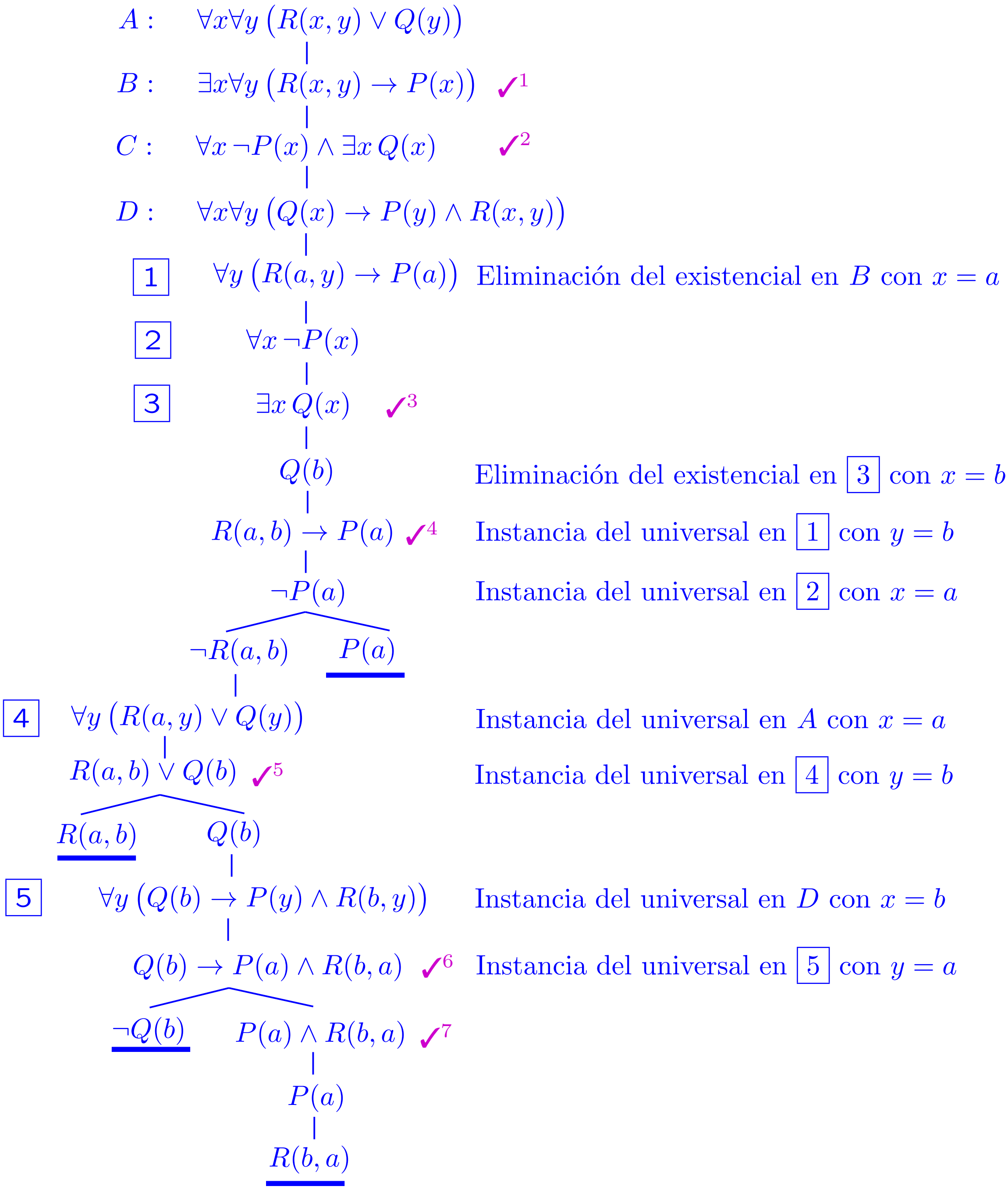
(Ocurre eso mismo con $[1b]$ donde b es un número primo de una cifra.)

Problema 1 (12%)

a) *(6 puntos)* Usar el método del tableau para probar que el conjunto de fórmulas $\{A, B, C, D\}$ es insatisfactible siendo

$$\begin{aligned} A &= \forall x \forall y\,\big(R(x,y) \vee Q(y)\big) \\ B &= \exists x \forall y\,\big(R(x,y) \to P(x)\big) \\ C &= \forall x\,\neg P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \\ D &= \forall x \forall y\,\big(Q(x) \to P(y) \wedge R(x,y)\big) \end{aligned}$$

Solución: Hallamos el tableau de $\{A, B, C, D\}$



Como el tableau de $\{A, B, C, D\}$ es cerrado, el conjunto de fórmulas es insatisfactible.

b) *(4 puntos)* Utilizar el apartado anterior para estudiar si las siguientes estructuras deductivas son correctas (sin realizar más tableaux).

1. $A, B, C, D \quad \Rightarrow \quad \forall x \forall y \, \neg R(x,y)$

SOLUCIÓN: La estructura deductiva es correcta si y solo si es insatisfactible el conjunto formado por las premisas junto con la negación de la conclusión.

Del apartado anterior sabemos que $\{A, B, C, D\}$ es insatisfactible y, por tanto, todo conjunto que lo contenga también. En particular, $\{A, B, C, D, \neg\forall x \forall y \, \neg R(x,y)\}$.

Luego la estructura deductiva dada es correcta.

2. $A, C, D \quad \Rightarrow \quad \forall x \exists y \, \big(R(x,y) \wedge \neg P(x)\big)$

SOLUCIÓN: Sabemos que $\{A, B, C, D\}$ es insatisfactible y por tanto la estructura deductiva $A, C, D \Rightarrow \neg B$ es correcta.

Y como

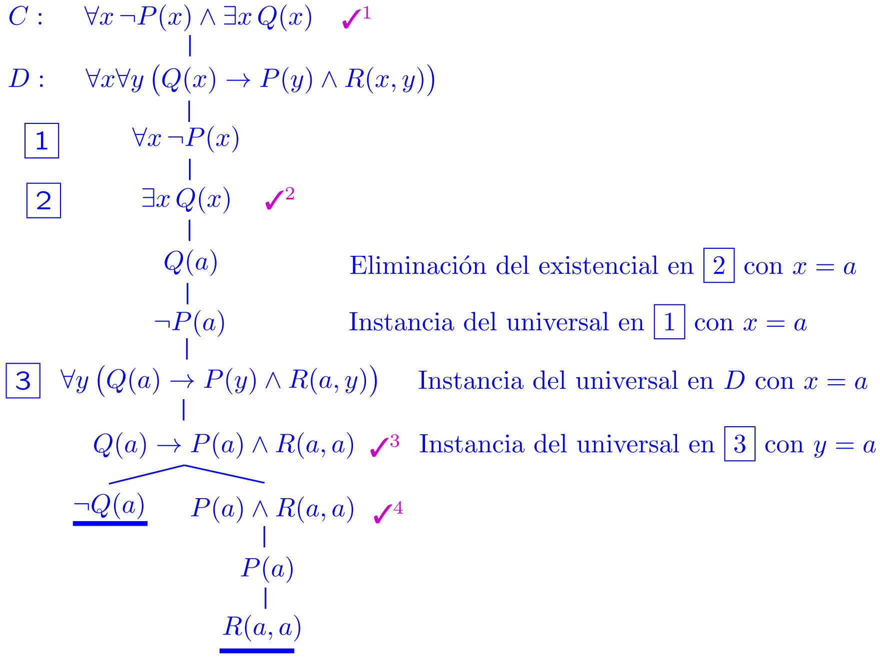
$$\begin{aligned} \neg B &= \neg\exists x \forall y \, \big(R(x,y) \to P(x)\big) \\ &\equiv \forall x \neg\forall y \, \big(R(x,y) \to P(x)\big) \\ &\equiv \forall x \exists y \, \neg\big(R(x,y) \to P(x)\big) \\ &\equiv \forall x \exists y \, \big(R(x,y) \wedge \neg P(x)\big) \end{aligned}$$

por el teorema de sustitución, la estructura deductiva

$$A, C, D \Rightarrow \forall x \exists y \, \big(R(x,y) \wedge \neg P(x)\big)$$

también es correcta.

Otra forma El tableau de $\{C, D\}$ es cerrado:



Consecuencias:

a) El conjunto $\{C, D\}$ es insatisfactible y por tanto $\{A, B, C, D\}$, que lo contiene, también.

b) Ambas estructuras deductivas son correctas porque no hay contraejemplos: el conjunto de premisas contiene a $\{C, D\}$ y por tanto es imposible hacer simultáneamente verdaderas todas las premisas y falsa la conclusión.

Problema 2 (10%)

a) *(5 puntos)* Definir una función recursiva $f : \text{LIST}_P(\mathbb{N}) \longrightarrow \text{LIST}_P(\mathbb{N})$ de modo que $f(L)$ sea la lista que se obtiene al intercambiar cada elemento que en L tiene posición par con el anterior a él.

Solución: Buscamos una función f tal que para una lista $L = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots]$ se verifique que

$$\begin{aligned} f([a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots]) &= [a_2, a_1, a_4, a_3, a_6, a_5, \dots] \\ &= [a_2, a_1] \| [a_4, a_3, a_6, a_5, \dots] \\ &= [a_2, a_1] \| f(\text{RESTO}(\text{RESTO}(L))) \\ &= [\text{CAB}(\text{RESTO}(L)), \text{CAB}(L)] \| f(\text{RESTO}(\text{RESTO}(L))) \end{aligned}$$

De ahí se puede sacar una regla recursiva, que solo es válida si $\text{LONG}(L) \geq 2$.
Y si $\text{LONG}(L) = 0$ o $\text{LONG}(L) = 1$ la función no hace nada sobre L, es decir $f(L) = L$.
De este modo la función f queda definida recursivamente del siguiente modo:

$$f(L) = \begin{cases} [\,] & \text{si LONG}(L) = 0 \ (RB1) \\ L & \text{si LONG}(L) = 1 \ (RB2) \\ \big[\text{CAB}(\text{RESTO}(L)), \text{CAB}(L)\big] \| f(\text{RESTO}(\text{RESTO}(L))) & \text{si LONG}(L) \geq 2 \ (RR) \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Dar el conjunto de partida de f.

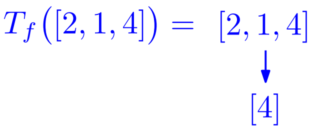
Solución: $CP_f = \{L \in \text{LIST}_P(\mathbb{N}) \,/\, \text{LONG}(L) = 0 \text{ ó } 1\}$

c) *(2 puntos)* Dar dos listas de longitud mayor o igual a 3, suficientemente significativas para f. Evaluar detalladamente f sobre ellas siguiendo el esquema recursivo propuesto y hallar los respectivos árboles de dependencia de f en dichas listas.

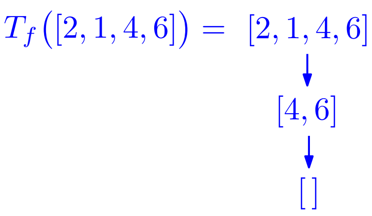
Solución: Tomemos dos listas con longitud de distinta paridad. Por ejemplo,

$$L_1 = [2, 1, 4] \ \text{ y } \ L_2 = [2, 1, 4, 6].$$

$$\begin{aligned} f\big([2,1,4]\big) &\overset{RR}{=} [1,2] \,\|\, f\big([4]\big) = [1,2] \,\|\, [4] = [1,2,4] \\ f\big([4]\big) &\overset{RB2}{=} [4] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f\big([2,1,4,6]\big) &\overset{RR}{=} [1,2] \,\|\, f\big([4,6]\big) = [1,2] \,\|\, [6,4] = [1,2,6,4] \\ f\big([4,6]\big) &\overset{RR}{=} [6,4] \,\|\, f\big([\,]\big) = [6,4] \,\|\, [\,] = [6,4] \\ f\big([\,]\big) &\overset{RB1}{=} [\,] \end{aligned}$$



d) *(2 puntos)* Definir (recursiva o explícitamente) la función $g : \text{LIST}_P(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(L)$ es la profundidad del árbol $T_f(L)$, es decir, el número de aristas de la rama más larga del árbol de dependencia de L para la función f del apartado **a)**.

SOLUCIÓN: El árbol de dependencia $T_f(L)$ se puede definir recursivamente como:

$$T_f(L) = \begin{cases} [\,] & \text{si LONG}(L) = 0 \ (RB1) \\ L & \text{si LONG}(L) = 1 \ (RB2) \\ \begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ T_f(\text{RESTO}(\text{RESTO}(L))) \end{array} & \text{si LONG}(L) \geq 2 \ (RR) \end{cases}$$

Y por tanto, la profundidad de $T_f(L)$ se puede definir recursivamente como

$$p(L) = \begin{cases} 0 & \text{si LONG}(L) = 0 \ (RB1) \\ 0 & \text{si LONG}(L) = 1 \ (RB2) \\ 1 + p(\text{RESTO}(\text{RESTO}(L))) & \text{si LONG}(L) \geq 2 \ (RR) \end{cases}$$

Una definición explícita puede inducirse de los ejemplos del apartado anterior. Se observa que cada vez que se aplica la regla recursiva, la longitud de la lista sobre la que se aplica f disminuye en dos unidades. Por tanto, la profundidad de una lista viene a ser la mitad de su longitud. Concretamente, para listas de longitud par es $\dfrac{\text{LONG}(L)}{2}$ y para las de longitud impar $\dfrac{\text{LONG}(L) - 1}{2}$. O lo que es lo mismo:

$$p(L) = \left\lfloor \frac{\text{LONG}(L)}{2} \right\rfloor$$

Problema 3 (8%)

En el conjunto $A = \{a, b\} \times \{0, 2, 3, 6, 8\}$ se define la siguiente relación de orden:

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff x \leq_{Lex} x' \text{ y también } y \,|\, y'$$

a) *(2 puntos)* Probar que el orden $\preceq$ es parcial.

Solución: Es de orden parcial porque hay elementos no comparables en A. Por ejemplo: $(a, 2)$ y $(b, 3)$.

En efecto,

$$(a,2) \not\preceq (b,3) \text{ ya que } 2 \nmid 3.$$

$$\text{y}$$

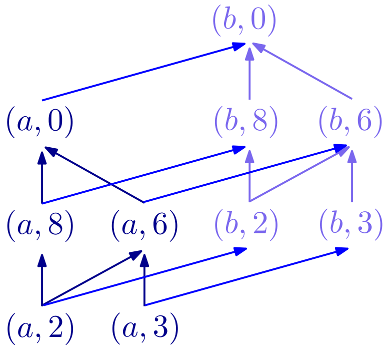
$$(b,3) \not\preceq (a,2) \text{ ya que } b \not\leq_{Lex} a.$$

b) *(5 puntos)* Dibujar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, \preceq)$.

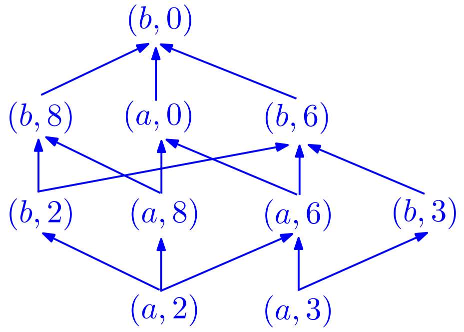
Solución: Se trata de ver la relación de precedencia de los elementos de

$$A = \{(a,0), (a,2), (a,3), (a,6), (a,8), (b,0), (b,2), (b,3), (b,6), (b,8)\}$$

Y es la que está reflejada en el siguiente diagrama de Hasse.



o lo que es lo mismo:



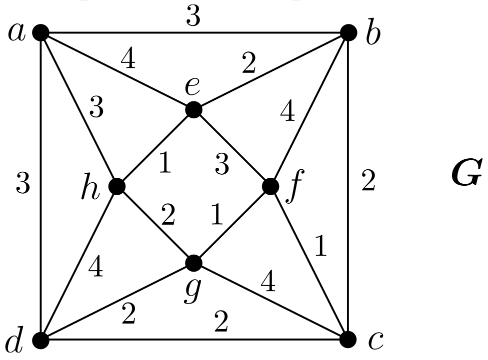
c) *(3 puntos)* Hallar razonadamente los elementos notables de $(A, \preceq)$.

Solución: A la vista del diagrama de Hasse podemos concluir lo siguiente:

- $(b, 0)$ es máximo porque es mayor o igual que todos los elementos de A. Al haber máximo, solo hay un maximal: él mismo.
- $(a, 2)$ y $(a, 3)$ son minimales ya que no hay elementos menores que ellos. Al haber más de un minimal, no hay mínimo.

Problema 4 (10%)

En el grafo G se representan las plazas de un barrio de una ciudad y las calles que las unen. El peso de las aristas indica el tiempo en minutos que se tarda en recorrer las calles correspondientes.



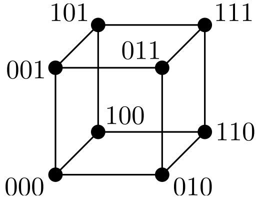
a) *(1 punto)* En las fiestas del barrio es costumbre adornar cada una de las plazas de un color. ¿Puede hacerse con solo dos colores de forma que dos plazas adyacentes tengan colores distintos?

Solución: Podrá hacerse si y solo si G es bipartito, pero no lo es porque tiene ciclos de longitud impar, concretamente de longitud 3: a, b, e, a, por ejemplo.

b) *(2 puntos)* Para el servicio de limpieza se utiliza una máquina barredora que parte de la plaza d. ¿Puede establecerse un circuito para la máquina barredora que pase exactamente una vez por cada calle y vuelva al punto inicial? Si es así, darlo.

Solución: Como el objetivo es recorrer mediante un circuito todas las aristas de G una sola vez, se trata de ver si G es euleriano. Como es un grafo conexo y todos sus vértices son de grado par (es regular de grado 4), G es euleriano. Un posible circuito euleriano es: $a, b, c, d, a, h, d, g, c, f, b, e, f, g, h, e, a$ y da una forma de limpiar todas las calles pasando por cada una de ellas una sola vez y volviendo al punto de partida.

c) *(2 puntos)* En un concurso de grabados sobre el barrio, el ganador ha representado una parte del barrio como un cubo:



Indicar qué plazas se corresponden con los vértices del cubo y las aristas de G que no están representadas.

Solución: Se trata de ver que en G hay un subgrafo, obtenido eliminando aristas, que sea isomorfo a Q_3. Un posible isomorfismo entre el subgrafo $G - \{ae, dh, gc, fb\}$ y Q_3 es F definido del siguiente modo:

$F(a) = 000$

$F(d) = 010$

$F(c) = 110$

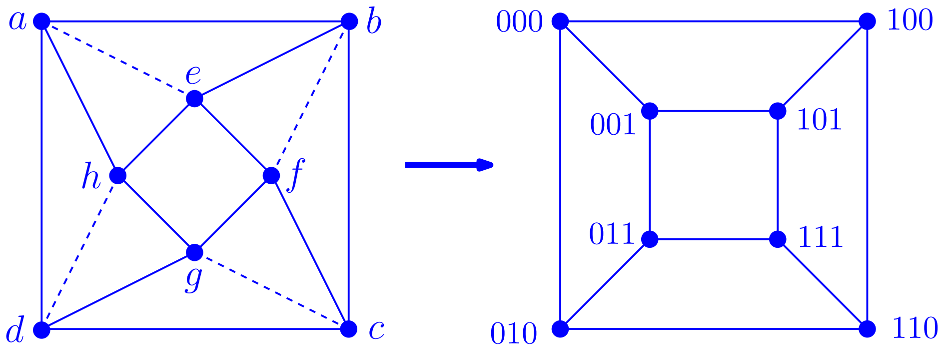
$F(b) = 100$

$F(h) = 001$

$F(g) = 011$

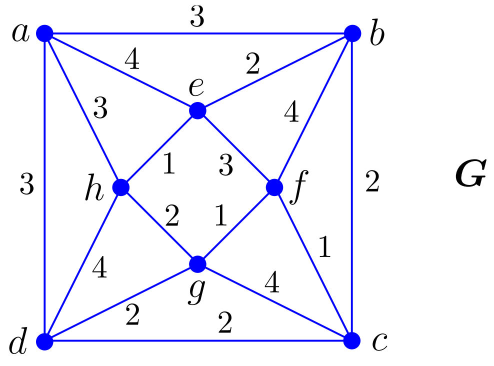
$F(f) = 111$

$F(e) = 101$



d) *(3'5 puntos)* En un panel informativo se indican las siguientes distancias (medidas en tiempo) entre las plazas del barrio. Usar las propiedades de la distancia y el algoritmo de Dijkstra para completar la tabla de distancias.

SOLUCIÓN: Aplicamos el algoritmo de Dijkstra desde g para hallar las distancias desde ese vértice a los demás. Su ejecución queda reflejada en la siguiente tabla:



P	a	b	c	d	e	f	g	h
g	∞	∞	4	2	∞	**1**	**0**	2
f	∞	5	**2**	2	4	–	–	2
c	∞	4	–	**2**	4	–	–	2
d	5	4	–	–	4	–	–	**2**
h	5	4	–	–	**3**	–	–	–
e	5	**4**	–	–	–	–	–	–
b	**5**	–	–	–	–	–	–	–
a	–	–	–	–	–	–	–	–
$d(g,\cdot)$	5	4	2	2	3	1	0	2

La tabla que nos daban se completa con las distancias halladas y usando las propiedades de la distancia: $d(u,v) = d(v,u)$ y $d(u,u) = 0$ para todo u, v, quedando como sigue.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	3	5	3	4	6	5	3
b	3	0	2	4	2	3	4	3
c	5	2	0	2	4	1	2	4
d	3	4	2	0	5	3	2	4
e	4	2	4	5	0	3	3	1
f	6	3	1	3	3	0	1	3
g	5	4	2	2	3	1	0	2
h	3	3	4	4	1	3	2	0

e) *(1'5 puntos)* ¿En qué plaza se debería colocar un coche de policía de tal modo que pueda atender una emergencia en cualquiera de las plazas del barrio en el menor tiempo posible?

SOLUCIÓN: La plaza en la que debe colocarse debe tener la propiedad de que el coche de policía pueda ir lo más rápidamente a cualquier plaza donde surja una eventual emergencia. Luego será en el vértice del grafo que minimice la distancia al vértice más alejado, esto es, en un centro del grafo.
A partir de la tabla de distancias anterior, hallamos el radio de cada vértice:

	a	b	c	d	e	f	g	h
$r(\cdot)$	6	4	5	5	5	6	5	4

En consecuencia, el radio de G es $r(G) = \min\{r(v) \,/\, v \in V_G\} = 4$ y los vértices b y h son centros, los lugares idóneos para colocar el coche de policía.