

# AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen final: 5 de Febrero de 2014

1.- Calcula la serie de Fourier de la función

$$f(x) = 1 + \cos(x) + x \quad x \in [-\pi, \pi].$$

2.- a) Halla la solución general de la E.D.O.

$$y'x^2 \operatorname{sen}(y) = 1$$

b) Calcula la única solución del problema:

$$\begin{cases} y'x^2 \operatorname{sen}(y) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3.- Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 27t^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

4.- Resuelve el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod{9} \\ x \equiv 0 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{16} \end{cases}$$

5.- Se considera el grupo aditivo  $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_{121}$ . Encuentra un elemento de  $G$  de orden máximo. Otro de orden 60 ¿Puedes encontrar otro de orden 37?

6.- Considera el polinomio  $p = x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ .

- a) Determina si  $p$  es irreducible. ¿Es  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x]/\langle p \rangle$  un cuerpo?  
b) Determina si existe  $[x + x^2]^{-1} \in \mathbb{K}$  y halla su valor.

## Observaciones:

- En el examen sólo se puede utilizar papel y bolígrafo.
- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.
- Cada pregunta se puntúa con un máximo de 1,5 puntos.

The logo for 'Cartagena99' features the word 'Cartagena' in a stylized, blue, serif font with a white outline, followed by '99' in a larger, bold, blue font. The text is set against a light blue background with a white shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

PROBLEMA: sea  $f(x) = 1 + \cos x + x$   $x \in [-\pi, \pi]$

LA FUNCIÓN  $h(x) = 1 + \cos x$  ES IGUAL A SU SERIE DE FOURIER OBVIAMENTE

CALCULAMOS LA SERIE DE FOURIER DE LA FUNCIÓN

$$y(x) = x \quad \text{con } x \in [-\pi, \pi]$$

q es impar ( $y(-x) = -y(x)$ ) luego los coeficientes

$$a_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

por otro lado  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx =$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n} (-2\pi \cos n\pi) = \frac{2}{n} (-1) (-1)^n = \frac{(-1)^{n+1} 2}{n}$$

como  $y$  es continua y derivable en  $(-\pi, \pi)$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

y son también:

$$f(x) = 1 + \cos x + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx}_{\text{SERIE DE FOURIER QUE BUSCAMOS}} \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

PROBLEMA LA E.C.O. DE 1ª ORDEN

$$y' x^2 \operatorname{sen} y = 1 \quad \text{ES UNA ECUACIÓN}$$

DE VARIABLES SEPARADAS, ASÍ

$$y' \operatorname{sen} y = \frac{1}{x^2}$$

SE INTEGRAN RESPECTO DE  $x$

$$\int y' \operatorname{sen} y \, dx = -\cos y(x)$$

$$\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + k$$

OBSERVAMOS QUE PARA  $x=0$  LA ECUACIÓN NO ESTÁ DEFINIDA

$$y \quad \cos y(x) = \frac{1}{x} - k = \frac{1}{x} + k'$$

PERO TAMBIÉN SE DEBE QUE VERIFICAR QUE

$$\frac{1}{x} + k' \in [-1, 1], \quad \text{PARA QUE LA}$$

2 GUARDEMOS TRAZO SIN TIRAR ASÍ

$$\frac{1}{x} \in [-1 - k', 1 - k']$$

$$\text{LUEGO } y(x) = \operatorname{Arc} \left( \frac{1}{x} + k' \right) \quad \forall x \text{ TAL QUE } \frac{1}{x} \in [-1 - k', 1 - k']$$

SOLUCIÓN GENERAL.

$$\text{ALIMEN SI } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \pi/2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos y(x) = 0 \quad \text{Y ASÍ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + k' = k'$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

PROBLEMA:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 27t^2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

ESTE PROBLEMA SE PUEDE RESOLVER DE VARIAS MANERAS. VAMOS UNA DE ELAS. LA ECUACION CARACTERISTICA ES

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$$

LUEGO  $\lambda = 3$  ES RAIZ DOBLE DE LA ECUACION. POR TANTO LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION HOMOGENEA ES

$$x(t) = A e^{3t} + B t e^{3t}$$

COMO  $h(t) = 27t^2$  ES UN POLINOMIO DE GRADO 2 Y  $\lambda = 0$  NO ES RAIZ DE LA ECUACION CARACTERISTICA POR TANTO UNA SOLUCION PARTICULAR DE TIPO

$$\begin{aligned} y_0(t) &= a + bt + ct^2 \\ y_0'(t) &= b + 2ct \\ y_0''(t) &= 2c \end{aligned}$$

SUSTITUYENDO EN LA ECUACION CON  $y_0$

$$2c - 6(b + 2ct) + 9(a + bt + ct^2) = 27t^2$$

$$\begin{cases} 2c - 6b + 9a = 0 & \text{ASÍ } c = 3 \\ -12c + 9b = 0 & \text{ASÍ } b = 4 \\ 9c = 27 & \text{ASÍ } a = 2 \end{cases}$$

LUEGO  $y(t) = (2 + 4t + 3t^2) + A e^{3t} + B t e^{3t}$  ES LA SOLUCION DE LA ECUACION HOMOGENEA.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

PROBLEMA

$$\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod{9} \\ x \equiv 0 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{16} \end{cases} (*)$$

9 = 3\*3    5    16 = 4\*4    LCM = 360    9, 5 y 16 son  
 primos entre si.    como m.c.d(2, 4) = 2

EXISTE  $2^{-1} \in \mathbb{Z}_9$  y  $2^{-1} = 5$

ASS (\*)  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x &= 5 \times 7 = 35 \equiv 8 \pmod{9} \\ x &= \quad \quad \quad = 0 \pmod{5} \\ x &\equiv \quad \quad \quad = 3 \pmod{16} \end{aligned}$$

APLICANDO EL TEOREMA CHINÉS DEL RESIDUO

$$x = 8 \times a \times 5 \times 16 + 3 \times b \times 9 \times 5$$

donde  $a \equiv (80)^{-1} = 8^{-1} \pmod{9}$  ASS  $a = 8$

y  $b \equiv (45)^{-1} = (13)^{-1} \pmod{16}$  ASS  $b = 5$

usando el algoritmo de euclides

16		1	0
13		0	1
3	1	1	-1
1	4	-4	5

LCM  $x = 8 \times 8 \times 80 + 3 + 5 \times 45 =$   
 $= 5120 + 675 = 5795 \pmod{9 \times 5 \times 16} = 770$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

PROBLEMA

$$\text{SEA } (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_{121} + ) = G$$

COMO  $12 = 2^2 \times 3$

$35 = 7 \times 5$

$121 = 11 \times 11$

12, 35 y 121 son primos

entre si, por tanto

G es un grupo ciclico de orden  $12 \times 35 \times 121$

Asi  $(1, 1, 1) \in G$  es un elemento de orden

maximo ya que  $m.c.m\{12, 35, 121\} = 12 \times 35 \times 121$

es decir  $(1, 1, 1)$  tiene orden  $12 \times 35 \times 121$ , luego

es un elemento de orden maximo.

37 es primo y 37 no divide a  $12 \times 35 \times 121$ ,  
luego no existe un elemento en G de orden

37 (segun el teorema de Lagrange).

Por otro lado  $60 = 12 \times 5 \mid 12 \times 35 \times 121$   
luego se puede encontrar un elemento de  
este orden en G. SEA  $x = (1, 7, 0)$ .

$1 \in \mathbb{Z}_{12}$

tiene orden 12 en  $(\mathbb{Z}_{12}^+)$

$7 \in \mathbb{Z}_{35}$

" " 5 en  $(\mathbb{Z}_{35}^+)$

$0 \in \mathbb{Z}_{121}$

" " 1 en  $(\mathbb{Z}_{121}^+)$

luego como  $m.c.m\{12, 5\} = 60$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

PROBLEMA SEA  $p(x) = x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ .

$p$  ES IRREDUCIBLE SOBRE  $\mathbb{Z}_5$  SI Y SOLO SI TIENE RAICES EN  $\mathbb{Z}_5$  (Y A QUE HAY UN POLINOMIO DE GRADO 2)

ASÍ  $p(0) = 4$

$p(1) = 1 + 3 + 4 \equiv 3 \pmod{5}$

$p(2) = 4 + 6 + 4 \equiv 4 \pmod{5}$

$p(3) = 9 + 9 + 4 \equiv 2 \pmod{5}$

$p(4) = 16 + 12 + 4 \equiv 2 \pmod{5}$

LUEGO COMO  $p$  NO TIENE RAICES EN  $\mathbb{Z}_5$  ES IRREDUCIBLE EN  $\mathbb{Z}_5[x]$ . SUR TAMBIÉN  $K = \mathbb{Z}_5[x]/p$  ES UN

CUERPO DE  $5^2 = 25$  ELEMENTOS.

EL ELEMENTO  $x + x^2 \in \mathbb{Z}_5[x]$  ES EL ELEMENTO

(COMO  $x^2 = -3x - 4 = 2x + 1$ )

$2x + 1 + x = 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]/p$

COMO  $3x + 1 \neq 0$  Y

$K$  ES UN CUERPO, EXISTE

EL INVERSO. PARA

HACER  $[x + x^2]^{-1} = [3x + 1]^{-1}$

SE PUEDE USAR EL LEMA DE BEZOUT.

$x^2 + 3x + 4$		1	0
$3x + 1$		0	1
2	$2x + 2$	1	$3x + 3$

LUEGO  $2^{-1}(3x + 3) = 4x + 4$  ES EL INVERSO DE  $x^2 + x$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized arrow or a splash of paint pointing to the right. Below the text, there is a horizontal orange bar that tapers at both ends, giving it a dynamic, arrow-like appearance.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**