

**Álgebra Lineal**  
**HOJA 2, 2019/20**

Permitimos que la letra  $F$  denote tanto el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  como el conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$ . La letra  $V$  siempre denota un espacio vectorial sobre  $F$ .

1. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
  - (a) El rango de una matriz es igual al número de columnas distintas de  $0$  que contiene.
  - (b) La única matriz  $m \times n$  con rango igual a  $0$  es aquella cuyas entradas son todas  $0$ .
  - (c) Las operaciones elementales con filas preservan siempre el rango de una matriz.
  - (d) Las operaciones elementales con columnas preservan siempre el rango de una matriz.
  - (e) El rango de una matriz es igual al número máximo de columnas linealmente independientes que contiene.
  - (f) El rango de una matriz es igual al número máximo de filas linealmente independientes que contiene.
  - (g) El rango de una matriz  $n \times n$  es menor o igual que  $n$ .
  - (h) Una matriz  $n \times n$  que tenga rango igual a  $n$  es necesariamente invertible.
  
2. Una matriz  $54 \times 37$   $A$  tiene rango igual a  $31$ . Determinar la dimensión del núcleo .
  
3. Para cada una de las siguientes matrices, encontrar bases para su núcleo y su rango.
  - (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$
  - (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$
  - (d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  
4. Sea  $T : X \rightarrow Y$  una función lineal, y sea  $V$  un subespacio de  $X$ . Demostrar que la dimensión del subespacio

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- (a) El espacio columna contiene a  $(1, 0, 0)^T$  y a  $(0, 0, 1)^T$ , mientras que el espacio fila contiene a  $(1, 1)^T$  y a  $(1, 2)^T$ .
- (b)  $(1, 1, 1)^T$  es un vector generador del espacio columna, mientras que  $(1, 2, 3)^T$  es un vector generador del núcleo.
- (c) El espacio columna tiene dimensión igual a 4, mientras que el espacio fila tiene dimensión igual a 3.

6. Dar una base de  $F^7$  que contenga los vectores

$$(e^3, 3, 4, 0, -\pi, 6, -2)^T, (0, 0, 2, -1, \pi^e, 1, 1)^T, (0, 0, 0, 0, 3, -3, 2)^T, (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

7. Encontrar bases para el espacio columna de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & 0 & 24 \\ -1 & -4 & 4 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

8. Determinar los espacios vectoriales complejos  $\text{Im}(A)$  y  $\text{Ker}(A)$  para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Dar una base de  $F^5$  que contenga los vectores

$$(1, 2, -1, 2, 3)^T, (2, 2, 1, 5, 5)^T, (-1, -4, 4, 7, -11)^T.$$

10. Considerar el sistema de vectores

$$(1, 2, 1, 1)^T, (0, 1, 3, 1)^T, (0, 3, 2, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T.$$

Demostrar que es una base de  $F^4$ , y encontrar la matriz de cambio de coordenadas desde esta base a la base canónica de  $F^4$ .

11. Encontrar la matriz de cambio de coordenadas desde la base  $\{1, 1+t\}$  hasta la base  $\{1-t, 2t\}$  de  $\mathbb{P}_1$ .

12. Demostrar que si las matrices  $A$  y  $B$  son similares, entonces  $\text{tr}A = \text{tr}B$ .

13. Decidir razonadamente si las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

15. Sea  $T : F^2 \rightarrow F^2$  la función lineal dada por

$$T((x, y)^T) = (x + y, -2x + 4y)^T.$$

Encontrar la matriz de  $T$  con respecto a la base  $(1, 1)^T, (1, 2)^T$  de  $F^2$  como dominio y codominio.

16. Sea  $T : F^2 \rightarrow F^3$  la función lineal dada por

$$T((x, y)^T) = (x + 3y, 0, 2x - 4y)^T.$$

Encontrar la matriz de  $T$  con respecto a la base canónica de  $F^2$  y la base (ordenada)  $e_3, e_2, e_1$  de  $F^3$  (el orden importa).

17. Sea  $T : F^3 \rightarrow F^3$  la función lineal dada por

$$T((x, y, z)^T) = (x - y, y - x, x - z)^T.$$

Sea  $\underline{v} = (1, 1, 2)^T$ , y considerar la base

$$B = \{(1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T\}$$

de  $F^3$ . Escribir explícitamente  $[T]_{B,B}$ ,  $[\underline{v}]_B$  y  $[T(\underline{v})]_B$ , y verificar que efectivamente cumplen la propiedad

$$[T(\underline{v})]_B = [T]_{B,B} [\underline{v}]_B.$$

18. Sea  $T : F^3 \rightarrow F^3$  el isomorfismo dado por

$$T((x, y, z)^T) = (2x - y, -x + 2y - z, z - y)^T.$$

Definir explícitamente la función lineal inversa  $T^{-1}$  a partir de haber calculado la matriz inversa de  $T$ , y comprobar que efectivamente la función obtenida es la correcta.

19. Sea  $T : F^2 \rightarrow F^2$  la función lineal dada por

$$T((x, y)^T) = (-7x - 15y, 6x + 12y)^T.$$

Encontrar una base  $B$  de  $F^2$  que tenga la propiedad de que

$$[T]_{B,B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Demostrar que si una matriz  $A$  es similar a una matriz  $B$ , y además  $B$  es similar a una matriz  $C$ , entonces  $A$  es similar a  $C$ .

21. Demostrar que si una matriz  $A$  es similar a una matriz  $B$ , entonces  $A^n$  es similar a  $B^n$  para cualquier número natural  $n$ .



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70