

1. ESPACIO EUCLÍDEO. ISOMETRÍAS

1. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + t = 0\}$$

y

$$W_2 = L\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}$$

Hallar:

- Las ecuaciones de $W_1^\perp$ y una base ortonormal de $W_1^\perp$.
- Las ecuaciones del complemento ortogonal $W_2^\perp$ y una base ortogonal para W_2 .

Resolvamos a). Buscamos las ecuaciones de $W_1^\perp$. En primer lugar, se determina una base de W_1 pasando a paramétricas:

$$W_1 \equiv \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -\mu \\ t &= \mu \end{cases}$$

Se tiene $B_{W_1} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$. Entonces,

$$W_1^\perp = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : \bar{x} \perp (1, 1, 0, 0) \text{ y } \bar{x} \perp (0, 0, -1, 1)\}$$

$$W_1^\perp \equiv \begin{cases} x + y &= 0 \\ -z + t &= 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$W_1^\perp \equiv \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= -\lambda \\ z &= \mu \\ t &= \mu \end{cases}$$

y una base será $B_{W_1^\perp} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$. Obsérvese que esta

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

es la base ortonormal de $W_1^\perp$ buscada.

Resolvamos b). Determinemos una base ortogonal para W_2 . Los vectores $\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}$ son base de W_2 , pero no son ortogonales. Elegimos $e_1 = (1, 1, -2, 2)$. Aplicamos Gram-Schmidt para obtener

$$\begin{aligned} e_2 &= (1, 0, -1, 0) - \frac{\langle (1, 0, -1, 0), (1, 1, -2, 2) \rangle}{\|(1, 1, -2, 2)\|^2} (1, 1, -2, 2) \\ &= \frac{1}{10}(7, -3, -4, -6) \end{aligned}$$

La base ortogonal pedida es $B_{W_2} = \{(1, 1, -2, 2), (-7, 3, 4, 6)\}$

Las ecuaciones de $W_2^\perp$ son

$$W_2^\perp \equiv \begin{cases} x + y - 2z + 2t = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

2. Dada la forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^3$, $F(x, y) = x^t A y$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinar para qué valores de "a" define F un producto escalar.
- Para $a = 1$, ¿son ortogonales los vectores $(1, 1, 1)$ y $(2, -1, -1)$?

Resolvamos a). Aplicamos el criterio de Sylvester. Debe ocurrir

$$\Delta_1 = a > 0, \Delta_2 = 2a > 0, \Delta_3 = 3a > 0$$

Esto equivale a pedir $a > 0$.

Resolvamos b). Se tiene

$$\langle (1, 1, 1), (2, -1, -1) \rangle = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

de modo que los vectores dados sí son ortogonales con respecto al producto escalar definido por F para $a = 1$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

determinar los valores de " a " para los que F define un producto escalar.
Por el criterio de Sylvester, debe ocurrir

$$\Delta_1 = a > 0, \Delta_2 = a - 1 > 0$$

De modo que se tiene producto escalar si, y sólo si, $a > 1$.

4. Sea $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida en la base canónica por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Determinar si Q da lugar a un producto escalar.
- b) En el espacio euclídeo real $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que define Q se pide:
 - b.1) Calcular la distancia y ángulo entre los vectores $u = (1, 1, 1, 1)$ y $v = (1, 1, 0, 0)$.
 - b.2) Obtener las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal al subespacio vectorial $U = L\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$.
 - b.3) Determinar una base ortonormal del subespacio vectorial $V = L\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$.

Resolvamos a). Aplicamos el criterio de Sylvester.

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 4 > 0, \Delta_3 = 6 > 0, \Delta_4 = 9 > 0$$

Efectivamente, Q da lugar a un producto escalar.

Resolvamos b.1). La distancia entre los vectores

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

El ángulo entre los vectores se calcula a partir de la fórmula $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(\alpha)$. Tenemos

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{u^t A v}{\sqrt{u^t A u} \sqrt{v^t A v}} = \frac{6}{\sqrt{12} \sqrt{4}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En consecuencia, $\alpha = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

Resolvamos b.2). Dada una base de U , B_U , el subespacio $U^\perp$ es

$$U^\perp = \{\bar{x} : \bar{x} \perp B_U\} = \{\bar{x} : \bar{x} \perp (1, 1, 0, 0), \bar{x} \perp (1, 1, 1, 0)\}$$

Las ecuaciones son

$$U^\perp \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolvamos b.3). Los vectores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son base de V pero no son ortogonales, ya que $u_1^t A u_2 = 6 \neq 0$. Escogemos $e_1 = (1, 1, 1, 1)$. Para obtener e_2 perpendicular a e_1 , $e_2 \in V$, aplicamos Gram-Schmidt.

$$e_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = (1, 0, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) = (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)$$

La base $B_V = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1)\}$ es una base ortogonal de V con respecto al producto escalar determinado por Q . Para obtener una base ortonormal, cada vector debe dividirse entre su módulo. Así,

$$B'_V = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \right\}$$

es la base buscada

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

b) La proyección del vector $(1, 2, 3)$ sobre el subespacio $W = L\{(1, 0, 1)\}$.

Resolvamos a). Escogemos una base ortogonal de U , $B_U = \{u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (0, 0, 1)\}$, y calculamos $P_U(x)$ para $x = (1, 0, 0)$.

$$P_U(x) = \frac{\langle x, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle x, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 0) + 0(0, 0, 1) = (1/2, -1/2, 0)$$

Resolvamos b). Sea $x = (1, 2, 3)$. Una base ortogonal de W es $B_W = \{w_1 = (1, 0, 1)\}$. Entonces,

$$P_W(x) = \frac{\langle x, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (2, 0, 2)$$

6. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, se considera el subespacio

$$U = L\{u_1 = (0, 1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1, 0), u_3 = (0, 1, 0, -1)\}$$

Se pide:

- a) Hallar una base ortonormal de U .
- b) Hallar las proyecciones sobre U y sobre $U^\perp$ del vector $v = (1, 2, 3, 4)$.

Resolvamos a). Aplicamos Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 1, 1) \\ e_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = \frac{1}{3}(0, 1, 1, -2) \\ e_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle u_3, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2 = \frac{1}{2}(0, 1, -1, 0) \end{aligned}$$

Como base ortonormal elegimos

$$B_U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0) \right\}$$

7. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, utilizar el método de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal a partir de los vectores

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 1, 1, 1) \\
e_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1) \\
e_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle u_3, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2 = \frac{1}{2}(0, 0, 1, -1) \\
e_4 &= u_4 - \frac{\langle u_4, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle u_4, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2 - \frac{\langle u_4, e_3 \rangle}{\|e_3\|^2} e_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0)
\end{aligned}$$

8. En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, obténgase la proyección ortogonal del vector $v = (1, 0, 3, 2)$ sobre el subespacio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tales que } x + y + z - t = 0, x - 2y + z + t = 0\}$$

9. Obtener la matriz, expresada con respecto a la base canónica, de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio

$$W = L\{(1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

Calculemos una base de $W^\perp$. En primer lugar obtengamos Las ecuaciones cartesianas.

$$W^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \perp (1, 0, 1, 1), (x, y, z, t) \perp (1, 1, 1, 0)\}$$

$$W^\perp \equiv \begin{cases} x + z + t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$$

En paramétricas:

$$W^\perp \equiv \begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

Una base será

$$B_{W^\perp} = \{(-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$$

La matriz, P , de la proyección será

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

10. Encuentra la matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ que produce un giro (o rotación) de ángulo $\pi/2$ en el plano y después proyecta el resultado sobre el eje OX . Calcúlese también la matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$ que realiza primero la proyección y luego el giro. ¿Coinciden ambas matrices?

El giro pedido tiene por matriz $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. De igual modo, la proyección sobre el eje OX es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Las matrices A y B pedidas son

$$A = PG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = GP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ¿qué tipo de movimiento determina?

Pruébese que A mantiene invariantes las distancias entre vectores, esto es, la distancia entre $\bar{x} = (x_1, x_2)$ y $\bar{x}' = (x'_1, x'_2)$ es la misma que la distancia entre $A\bar{x}$ y $A\bar{x}'$.

El movimiento es, claramente, un giro de ángulo $\pi/2$ en el sentido contrario a las agujas del reloj. Por otro lado, se tiene

$$d(\bar{x}, \bar{x}') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}$$

y

$$d(A\bar{x}, A\bar{x}') = d((-x_2, x_1), (-x'_2, x'_1)) = \sqrt{(-x_2 + x'_2)^2 + (x_1 - x'_1)^2}$$

Es claro que ambas distancias coinciden.

12. Caracterícense las isometrías de $\mathbb{R}^2$ dadas por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

de modo que $\alpha = \arccos 0$ y $\alpha = -\arcsen 1$, esto es, $\alpha = -\pi/2$.

Estudiamos ahora el movimiento generado por B . Se tiene $|B| = -1$, de modo que es una simetría. El eje se obtiene a partir del subespacio propio asociado al autovalor 1. Los subespacios propios son:

$$V_1 = \{-x + y = 0\} \quad V_{-1} = \{x + y = 0\}$$

$$V_1 = L\{(1, 1)\} \quad V_{-1} = L\{(1, -1)\}$$

El eje de simetría es la recta $L\{(1, 1)\}$.

13. Encuéntrese, en $\mathbb{R}^2$, la matriz de la simetría ortogonal con respecto a la recta $2x - y = 0$.

La matriz de la simetría es $S = 2P - I$, siendo P la proyección ortogonal sobre la recta $L\{(1, 2)\}$. Calculemos P :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente:

$$S = 2P - I = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Otro modo de resolver este ejercicio es tener en cuenta que la matriz asociada a S respecto a la base ortonormal formada por los autovectores, $B = \{(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$, es

$$M(S, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, si se escribe la expresión matricial con respecto a la base canónica:

$$S = M(B, B_c)M(S, B)M(B_c, B) = M(B, B_c)M(S, B)M(B, B_c)^{-1}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

- i) Proyectando todos los vectores sobre el plano XY .
- ii) Reflejando todos los vectores a través del plano XY .
- iii) Rotando el plano XY un ángulo $\pi/2$ y llevando cada vector del eje Z a dos veces él mismo.
- iv) Rotando primero el plano XY un ángulo $\pi/2$ y dejando fijo el eje Z , rotando después el plano XZ un ángulo $\pi/2$ y dejando fijo el eje Y , y rotando después el plano YZ un ángulo $\pi/2$ y llevando cada vector del eje X a tres veces él mismo.

¿Determina alguna de esas matrices una isometría?

Caso *i*). La matriz es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Caso *ii*). La matriz es $S = 2P - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Caso *iii*). La matriz de la rotación es $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por otro

lado, el giro se debe componer con la matriz $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dando

lugar a

$$A = HR = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Caso *iv*). La rotación alrededor del eje Z , la rotación alrededor del eje Y y la rotación alrededor del eje X son

$$R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La aplicación que estira el eje X tres unidades es



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$H_3 R_x R_y R_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que sólo en el caso *ii*) tenemos una isometría.

15. Dada la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ determinada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide clasificarla y encontrar los subespacios propios

Dado que $|A| = -1$, se tiene una simetría o una simetría compuesta con una rotación. El polinomio característico es

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Los valores propios son $+1$ y -1 . Por tanto, la transformación es una simetría. Calculemos el subespacio propio asociado al autovalor -1 .

$$V_{-1} = \{\bar{x} : (A + I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Resolviendo el sistema,

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

$$V_{-1} = L\{(1, 0, 1)\}$$

El subespacio propio asociado al autovalor 1 es el plano perpendicular a V_{-1} , esto es,

$$V_1 \equiv \{x_1 + x_3 = 0\}$$

$$V_1 = L\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

se pide:

Probar que es una rotación, encontrar el eje de rotación, el plano invariante ortogonal a dicho eje, así como el ángulo de rotación.

Es claro que $|A| = 1$ y que las columnas de A son unitarias y ortogonales, con lo que tenemos una rotación. Por tanto, $\lambda = 1$ es un autovalor real. El subespacio propio asociado, V_1 , es el eje de rotación buscado.

$$V_1 \equiv \{\bar{x} : (A - I)\bar{x} = \bar{0}\} \quad V_1 \equiv \begin{cases} -x_1 + x_2 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = L\{(-1, -1, 1)\}$$

El plano invariante ortogonal a V_1 es

$$V_1^\perp \equiv \{-x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \quad V_1^\perp = L\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

El ángulo se obtiene, por ejemplo, calculando la imagen de uno de los generadores de $V_1^\perp$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dado que

$$(1, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 = \sqrt{2}\sqrt{2} \cos \alpha,$$

ocurre que $\alpha = \arccos(-1/2) = \frac{2\pi}{3}$. Obsérvese que los autovalores complejos del polinomio característico también suministran esta información.

17. Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z),$$

probar que es una isometría y caracterizarla geométricamente.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

Para probar que es una isometría basta ver que $A^T A = I$. Se deja como tarea para el lector. Por otro lado, dado que $|A| = 1$, resulta un giro. Calculemos el eje de giro, que se corresponde con el subespacio propio V_1 .

$$V_1 = \{\bar{x} : (A - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Dado que

$$A - I = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

para obtener el subespacio propio, escalonamos la matriz $A - I$:

$$A - I \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema asociado, se tiene

$$V_1 \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

El eje de rotación es $V_1 = L\{(1, 1, 1)\}$. El plano invariante, ortogonal al eje de rotación, es

$$V_1^\perp \equiv \{x + y + z = 0\} \quad V_1^\perp = L\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

Elegimos un vector de este plano y calculamos su imagen:

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculemos los autovalores:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 2)^2(5 - \lambda)$$

Los subespacios propios son

$$V_2 \equiv \{x + y + z = 0\} \quad V_2 = L\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

y

$$V_5 \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad V_5 = L\{(1, 1, 1)\}$$

Debemos encontrar una base ortonormal de estos subespacios propios. Para ello, aplicamos Gram-Schmidt. Empecemos con V_2 .

$$e_1 = (-1, 0, 1), \quad e_2 = (-1, 1, 0) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1) = (-1/2, 1, -1/2)$$

La base ortonormal es

$$B_{V_2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \right\}$$

Hagamos lo mismo con el subespacio propio V_5 . La base ortonormal asociada es

$$B_{V_5} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\}$$

La matriz de paso ortogonal resultante es

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Se tiene $P^{-1}AP = D$ con D la matriz diagonal

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99