

1. DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS

1. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

con coeficientes en \mathbb{R} . Hallar los valores propios, los vectores propios y una matriz P que permita la diagonalización de A . Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I) = \lambda^2 - 15\lambda + 14 = (\lambda - 1)(\lambda - 14)$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = 14$. Calculemos los subespacios propios asociados a los autovalores.

$$V_1 = \{\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : A\bar{x} = 1 \cdot \bar{x}\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : (A - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

La ecuación cartesiana de V_1 es

$$V_1 \equiv \{x + 3y = 0\}$$

Al pasar a paramétricas,

$$V_1 \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

por lo que una base del subespacio propio V_1 es $B_{V_1} = \{(-3, 1)\}$. El vector $(-3, 1)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$. Esto significa que

$$A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$V_{14} = \{\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : A\bar{x} = 14 \cdot \bar{x}\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : (A - 14 \cdot I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

La ecuación cartesiana de V_{14} es

$$V_{14} \equiv \{4x - y = 0\}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

por lo que una base de V_{14} es $B_{V_{14}} = \{(1, 4)\}$. El vector $(1, 4)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 14$. Esto significa que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Una base de \mathbb{R}^2 formada por autovectores es $B = \{(-3, 1), (1, 4)\}$. La matriz asociada al endomorfismo determinado por $A = M(f, B_c)$ (B_c es la base canónica de \mathbb{R}^2), con respecto a la base B , es la matriz diagonal D de autovalores

$$D = M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso $P = M(B, B_c)$ es

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Se tiene la igualdad $P^{-1}AP = D$.

Calculemos A^n . Se tiene $A = PDP^{-1}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} A^n &= PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^nP^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/13 & 1/13 \\ 1/13 & 3/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12+14^n}{13} & \frac{-3+3 \cdot 14^n}{13} \\ \frac{-4+4 \cdot 14^n}{13} & \frac{1+12 \cdot 14^n}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Determinar los valores de a, b, c, d para los cuales cada una de las siguientes matrices reales es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con la condición } bc > 0 \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Estudiemos primero la matriz A . El polinomio característico es

$$p(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 + (-a - d)\lambda + (ad - bc)$$

Los autovalores son

$$\lambda = \frac{-(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Veamos ahora la matriz B . El polinomio característico es

$$p(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2$$

La única posibilidad de conseguir $p(\lambda) = 0$ es con $b = 0$ y $\lambda = a$. En ese caso, la propia matriz B es ya diagonal.

3. Indicar los valores de a , b y c para los cuales la matriz real A es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$$

Debemos ver si todos los autovalores son reales y si las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para todos ellos.

El polinomio característico es $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2(c - \lambda)$, de modo que los autovalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = c$. Deben distinguirse dos casos:

Caso 1. $c \neq 1$. Entonces $\lambda = 1$ es un autovalor de multiplicidad algebraica $m(1) = 2$ y $\lambda = c$ es un autovalor de multiplicidad algebraica $m(c) = 1$. Como $1 \leq \dim(V_\lambda) \leq m(\lambda)$, resulta que $\dim(V_c) = 1$, de modo que, para el autovalor real $\lambda = c$, las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden. Por otro lado,

$$\dim(V_1) = 3 - r(A - I) = 3 - r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & b & c - 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Debe darse la igualdad $\dim(V_1) = m(1) = 2$, de manera que, supuesto $c \neq 1$, la matriz A es diagonalizable si y sólo si $a = 0$.

Caso 2. $c = 1$. Se tiene entonces que $\lambda = 1$ es el único autovalor, con $m(1) = 3$. Vemos cuál es la dimensión del subespacio propio asociado:

$$\dim(V_1) = 3 - r(A - I) = 3 - r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} < 3$$

Por consiguiente, en el caso 2, la matriz no es diagonalizable.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Determinar una base respecto de la cual F se represente en forma diagonal.

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2(1 - \lambda),$$

de modo que los autovalores son $\lambda = 1$, con $m(1) = 1$ y $\lambda = 2$ con $m(2) = 2$. Calculemos una base de autovectores de V_1 .

$$V_1 = \{\bar{x} : F\bar{x} = \bar{x}\} = \{\bar{x} : (F - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Escalonemos la matriz asociada al sistema homogéneo $(F - I)\bar{x} = \bar{0}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta

$$V_1 \equiv \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$$

Pasando a paramétricas queda

$$V_1 \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

de modo que una base de V_1 es $B_{V_1} = \{(3, -1, 3)\}$. Esto quiere decir

que $F \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. De hecho, al aplicar F a cualquier vector

de V_1 , obtenemos el mismo vector.

Calculemos ahora una base del otro subespacio propio V_2 .

$$V_2 = \{\bar{x} : F\bar{x} = 2\bar{x}\} = \{\bar{x} : (F - 2I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

La matriz de coeficientes del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

No es necesario escalonarla. La ecuación cartesiana de V_2 es $z = x + 2y$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Una base de V_2 es $B_{V_2} = \{(2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$. Tenemos una base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores

$$B = \{B_{V_1}, B_{V_2}\} = \{(3, -1, 3), (2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$$

Ésta es la base pedida. La matriz asociada a la aplicación lineal f (determinada por la matriz F) con respecto a la base B es una matriz diagonal

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Demostrar que un endomorfismo f es inyectivo si y sólo si ningún valor propio de f es nulo.

$$f \text{ es inyectivo} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \bar{0} \Leftrightarrow f(\bar{x}) = \bar{0} \text{ implica que } \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}) = 0\bar{x} \text{ implica que } \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow 0 \text{ no es autovalor de } f$$

6. Sea E_4 un espacio vectorial real. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ una base de E_4 . Sea $f \in \text{End}(E_4)$, cuya matriz respecto a B es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de a para los que f es diagonalizable.

b) Si $a = 1$:

1) Diagonalizar A .

2) Si V_2 es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 2$, hallar las ecuaciones paramétricas de $V_2 \cap W$ y $V_2 + W$, siendo W el subespacio de E_4 de ecuaciones implícitas $W = \{(x, y, z, t) / x + z = x = y - 3t = 0\}$.

3) ¿Es f suprayectivo?, ¿es f inyectivo?.

Resolvamos el apartado a). El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - a)(\lambda - 2)$. Existen 3 casos posibles: $a = 1$, $a = 2$ y $a \neq \{1, 2\}$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

de modo que f es diagonalizable.

Caso 2. Sea $a = 2$. Entonces $\lambda = 1$ es autovalor con $m(1) = 2$ y $\lambda = 2$ es autovalor con $m(2) = 2$. Veamos las dimensiones de los subespacios propios asociados.

$$\dim(V_1) = 4 - r(A - I) = 4 - 2 = 2 \quad \dim(V_2) = 4 - r(A - 2I) = 4 - 2 = 2,$$

de modo que los dos autovalores son reales y las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para los dos. El endomorfismo del caso 2 es, por tanto, diagonalizable.

Caso 3. Sea $a \neq \{1, 2\}$. Entonces los autovalores son $\lambda = 1$ con $m(1) = 2$, $\lambda = 2$ con $m(2) = 1 = \dim(V_2)$ y $\lambda = a$ con $m(a) = 1 = \dim(V_a)$. Además, $\dim(V_1) = 4 - r(A - I) = 4 - 2 = 2 = m(1)$, de manera que f es diagonalizable también para el caso 3.

Resolvamos el apartado b.1). El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)$. Los subespacios propios tienen ecuaciones cartesianas:

$$V_1 \equiv \{x + t = 0\} \quad V_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Pasando a paramétricas queda

$$V_1 \equiv \begin{cases} x = -\lambda_3 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_2 \\ t = \lambda_3 \end{cases} \quad V_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = \lambda \end{cases}$$

Las bases respectivas para los subespacios propios son:

$B_{V_1} = \{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$, con coordenadas respecto de B , de modo que $B_{V_1} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_3, -\vec{e}_1 + \vec{e}_4\}$.

$B_{V_2} = \{(0, 0, 0, 1)\}$, con coordenadas respecto de B , de modo que $B_{V_2} = \{\vec{e}_4\}$.

Una base de autovectores de E_4 es $B_{E_4} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_3, -\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4\}$. La matriz diagonal de autovalores D y la matriz de paso P son

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$y \dim(W) = 4 - r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Las ecuaciones cartesianas de $V_2 \cap W$ son

$$V_2 \cap W \equiv \begin{cases} x & = 0 \\ y - 3t & = 0 \\ z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \\ t & = 0 \end{cases}$$

Por la fórmula de las dimensiones, $\dim(V_2 + W) = \dim(V_2) + \dim(W) - \dim(V_2 \cap W) = 1 + 1 - 0 = 2$. Como $V_2 + W = L(B_{V_2}, B_W)$, necesitamos calcular una base de W . Tras pasar a paramétricas, se obtiene la base $B_W = \{(0, 3, 0, 1)\}$, con coordenadas respecto de B . De modo que una base para $V_2 + W$ es $B_{V_2 + W} = \{(0, 0, 0, 1), (0, 3, 0, 1)\}$, con coordenadas respecto de B , esto es,

$$B_{W+V_2} = \{\vec{e}_4, 3\vec{e}_2 + \vec{e}_4\}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$V_2 + W \equiv \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 3\lambda_2 \\ z & = 0 \\ t & = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

Resolvamos el apartado b.3). El endomorfismo f tiene matriz asociada A con $a = 1$, de modo que $\dim(\text{Im}(f)) = r(A) = 4 = \dim(E_4)$. Por consiguiente, $\text{Im}(f) = E_4$ y f es suprayectivo. Por otro lado, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E_4) - \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 4 = 0$, con lo que $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, siendo f un monomorfismo (homomorfismo inyectivo).

7. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Calculemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & -\lambda(-2+\lambda) \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
 &= - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & -\lambda(-2+\lambda) \\ 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2(-2+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= (2-\lambda)^3(-\lambda-2)
 \end{aligned}$$

Los autovalores son $\lambda = 2$ con $m(2) = 3$ y $\lambda = -2$ con $m(-2) = 1$.

Por otro lado, $\dim(V_{-2}) = m(-2) = 1$, mientras que $\dim(V_2) = 4 - r(A - 2I) = 4 - 1 = 3$, de modo que A es diagonalizable.

Estudiamos a continuación el apartado b). Para determinar la matriz de paso necesitamos una base de autovectores de \mathbb{R}^4 , que obtenemos a partir de los subespacios propios V_2 y V_{-2} .

$$V_2 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A - 2I)\bar{x} = \bar{0}\}, \quad V_{-2} \equiv \{-x + y + z + t = 0\}$$

Tras pasar a paramétricas, se tiene la base

$$B_{V_2} = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}.$$

Por otro lado,

$$V_{-2} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A + 2I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Al escalar la matriz asociada al sistema homogéneo $(A + 2I)\bar{x} = \bar{0}$ queda

$$A + 2I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$V_{-2} \equiv \begin{cases} x - y - z + 3t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

La matriz de paso P y la matriz diagonal de autovalores D serán

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = M(f, B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Apartado c). Obsérvese que

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

de modo que $D^2 = P^{-1}A^2P$. Esto quiere decir que la matriz diagonal de autovalores asociada a A^2 es

$$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso es P . Obsérvese, además, que $A^2 = PD^2P^{-1} = 2^2I$.

Por otro lado, $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ y, por tanto, $D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, con lo que la matriz diagonal de autovalores asociada a A^{-1} es

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso es P .

Resolvamos el apartado d). Si n es par, $n = 2m$, entonces

$$A^n = (A^2)^m = (2^2I)^m = 2^n I.$$

Si n es impar, $n = 2m + 1$, entonces

$$A^n = A^{2m}A = 2^{2m}IA = 2^{n-1}A.$$

8. Estudiar la posible diagonalización de las siguientes aplicaciones f :
 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Estudiemos el caso a). La matriz asociada al endomorfismo f es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda - 16 = (-4 - \lambda)(\lambda - 2)^2$, de modo que los autovalores son $\lambda = -4$, $m(-4) = 1$ y $\lambda = 2$, $m(2) = 2$. Las dimensiones de los subespacios propios correspondientes son

$$\dim(V_{-4}) = m(-4) = 1 \text{ y } \dim(V_2) = 3 - r(A - 2I) = 2 = m(2)$$

de manera que f es diagonalizable.

Veamos el caso b). La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

con polinomio característico $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(4 - \lambda)$. Los autovalores son $\lambda = 1$, $m(1) = 2$ y $\lambda = 4$, $m(4) = 1$. Las dimensiones de los subespacios propios son $\dim(V_4) = m(4) = 1$ y $\dim(V_1) = 3 - r(A - I) = 2 = m(1)$. Por consiguiente, el endomorfismo es diagonalizable.

Estudiemos el caso c). La matriz asociada al endomorfismo f es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

con polinomio característico $p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1)$. Se tiene que los autovalores son $\lambda = 1$ y $\lambda = \pm i$, de manera que el endomorfismo no es diagonalizable.

9. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por $f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = dx^3 + cx^2 + bx + a$. Estudiar su diagonalización encontrando la matriz P que la permita.

Consideremos la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ y calculemos la matriz asociada al endomorfismo con respecto a esta base.

Dado que $f(1) = x^3$, $f(x) = x^2$, $f(x^2) = x$, $f(x^3) = 1$, entonces

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda^2)(\lambda^2-1) = (\lambda^2-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

Los autovalores son $\lambda = 1$, $m(1) = 2$ y $\lambda = -1$, $m(-1) = 2$. Determinemos los subespacios propios. Al escribir V_1 con coordenadas respecto de B_c se tiene

$$V_1 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Las ecuaciones implícitas son

$$V_1 \equiv \begin{cases} -x + t = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Tras pasar a paramétricas, se consigue una base de V_1 ,

$$B_{V_1} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\} \text{ con coordenadas respecto de } B_c.$$

Esto quiere decir que $B_{V_1} = \{1 + x^3, x + x^2\}$.

Por otro lado, al escribir V_{-1} con coordenadas respecto de B_c ,

$$V_{-1} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : (A + I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Las ecuaciones implícitas son

$$V_{-1} \equiv \begin{cases} x + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Tras pasar a paramétricas se tiene una base de V_{-1} ,

$$B_{V_{-1}} = \{(-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\} \text{ con coordenadas respecto de } B_c.$$

Esto significa que $B_{V_{-1}} = \{-1 + x^3, -x + x^2\}$.

Por consiguiente, una base de autovectores de $\mathbb{R}_3[x]$ es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

La matriz de paso P y la matriz diagonal de autovalores $D = M(f, B)$ son

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 de matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinar:

- Autovalores y autovectores de f .
- Hallar una base que permita la diagonalización.

Resolvamos el apartado a). El polinomio característico es $p(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda + 2)^2$. Los autovalores son $\lambda = 4$ con $m(4) = 1$ y $\lambda = -2$ con $m(-2) = 2$. Determinemos los subespacios propios asociados.

$$V_4 \equiv \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : (A - 4I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

Al escalar la matriz de coeficientes del sistema $(A - 4I)\bar{x} = \bar{0}$ resulta

$$A - 4I \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera que las ecuaciones cartesianas son

$$V_4 \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

Tras pasar a paramétricas, se obtiene la base $B_{V_4} = \{(1, 1, 2)\}$.

Por otro lado,

$$V_{-2} \equiv \{x - y + z = 0\}$$

Una base de V_{-2} es $B_{V_{-2}} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Por consiguiente, la base de autovectores de \mathbb{R}^3 pedida será $B = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$ y la matriz diagonal asociada a f con respecto a esta base, $D =$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

11. Hallar a , b , c , d , e y f sabiendo que los vectores: $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$, $\vec{w} = (-1, -1, 0)$ son autovectores de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Se tiene $A\vec{u} = \lambda_1\vec{u}$, $A\vec{v} = \lambda_2\vec{v}$, $A\vec{w} = \lambda_3\vec{w}$. Escrito en forma de sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 & = & \lambda_1 \\ a + b + c & = & \lambda_1 \\ d + e + f & = & \lambda_1 \\ 0 & = & \lambda_2 \\ a - c & = & 0 \\ d - f & = & -\lambda_2 \\ -2 & = & -\lambda_3 \\ -a - b & = & -\lambda_3 \\ -d - e & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c & = & 3 \\ d + e + f & = & 3 \\ a - c & = & 0 \\ d - f & = & 0 \\ -a - b & = & -2 \\ -d - e & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -3 \\ e = 9 \\ f = -3 \end{cases}$$

12. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ el endomorfismo definido por $f(p(x)) = p'(x)$. Hallar los autovalores y autovectores de f ($p'(x)$ es el polinomio derivado de $p(x)$).

Teniendo en cuenta que $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x$ y $f(x^3) = 3x^2$, la matriz asociada a f con respecto a la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ es

$$A = M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^4$, de modo que $\lambda = 0$ es el único autovalor, con $m(0) = 4$. El subespacio propio V_0 es, en paramétricas,

$$V_0 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

13. Determinar un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 sabiendo:

- $Im(f) = L\{(0, 1, -1), (2, 1, 1)\}$.
- $\lambda = 0$ es un valor propio de f .
- El subespacio propio asociado a $\lambda = 0$ está generado por $(0, 1, 1)$.

Hallar, si es posible, una base de \mathbb{R}^3 en la que f venga dado por una matriz diagonal.

Al ser 0 autovalor con autovector $(0, 1, 1)$, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a f , se tiene $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

esto es,

$$\begin{cases} a_{12} + a_{13} = 0 \\ a_{22} + a_{23} = 0 \\ a_{32} + a_{33} = 0 \end{cases}$$

La matriz A puede ser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ya que cumple las ecuaciones de arriba y, además, sus columnas son los generadores de $Im(f)$. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 2)$.

Sabemos que $V_0 = L((0, 1, 1))$, de manera que sólo queda obtener bases de V_2 y V_{-2} . Escalonando los sistemas de ecuaciones resultantes, se obtiene

$$V_2 \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad V_{-2} \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Las bases respectivas son $B_{V_2} = \{(1, 1, 0)\}$, $B_{V_{-2}} = \{(1, 0, 1)\}$. La base pedida de autovectores de \mathbb{R}^3 es

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

14. Dados los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^2 :

$$V = L\{(1, -1)\} \quad W \equiv \{x + 2y = 0\},$$

determinése la proyección, P , sobre V a lo largo de W . ¿Cuál es la proyección de $v = (1, 2)$ sobre V a lo largo de W ?

Una base de V es $B_V = \{(1, -1)\}$ y una base de W es $B_W = \{(-2, 1)\}$. La expresión matricial de P respecto a la base canónica, $M(P, B_c)$ (a la que denotamos también por P para abreviar), será:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La proyección de $v = (1, 2)$ sobre V a lo largo de W es

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

15. Dados los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 :

$$V = L\{(1, -1, -1), (0, 1, -2)\} \quad W = L\{(1, -1, 0)\},$$

pruébese que son complementarios y determinése la proyección, P , sobre V a lo largo de W . ¿Cuál es la proyección de $v = (-2, 1, 3)$ sobre V a lo largo de W ?

Son complementarios dado que

$$r \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Determinemos la matriz de P respecto a la base canónica:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

16. Dados los subespacios complementarios de \mathbb{R}^3 :

$$V = L\{(1, 1, 1), (1, 2, 2)\}, \quad W = L\{(1, 2, 3)\},$$

se pide:

- i) Hallar la proyección, P , sobre V a lo largo de W y la proyección, Q , sobre W a lo largo de V .
- ii) ¿Cuál es la proyección de $v = (2, -1, 1)$ sobre W a lo largo de V ?
- iii) Comprobar que P y Q son dos proyecciones.
- iv) Probar que $V = \text{Im}(P) = \text{Ker}(Q)$ y que $W = \text{Ker}(P) = \text{Im}(Q)$.

Resolvamos *i*). La matriz de P será:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz de Q será:

$$Q = I - P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos *ii*). La proyección de v sobre W a lo largo de V es

$$Q \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para resolver *iii*) basta comprobar que $P^2 = P$ y que $Q^2 = Q$. Dejamos esta tarea al lector como ejercicio.

Demostremos *iv*). Es fácil ver que

$$V = L\{(1, 1, 1), (1, 2, 2)\} = \text{Im}(P)$$

Además,

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\dim(Ker(P)) = 3 - \dim(Im(P)) = 1$, una base para $Ker(P)$ es $B_{Ker(P)} = \{(1, 2, 3)\}$, de modo que $W = Im(Q) = Ker(P)$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of paint. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70