

## 1. EJERCICIOS

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x + y, y, x - 2y)$ .

b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$ .

c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$ .

d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (z, y + x)$ .

e)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = |x - y|$ .

f)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[t], f(x, y, z) = (y + z)t^2 + (x + y)t + z$ .

g)  $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}), f(A) = A^T$ .

2. Dadas  $f$  y  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$  y  $g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - 1, x_3)$ , ver si son lineales y, en ese caso, hallar el núcleo y la imagen.

3. Determinar la dimensión y bases de  $Ker(f)$  e  $Im(f)$  para las siguientes aplicaciones lineales:

a)  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_3)$ .

b)  $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_2)$ .

c)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$ .

d)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_3 + x_4)$ .

4. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el homomorfismo definido por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea  $W$  el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  definido por  $x_1 - x_2 = 0$ . Hallar las ecuaciones de  $f^{-1}(W)$ .

5. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

6. Sean  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$  y  $B' = \{e'_1, e'_2\}$  una base de  $\mathbb{R}^2$ . Se define  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la siguiente forma:  $f(e_1) = e'_1 - e'_2$ ,  $f(e_2) = 2e'_1$ ,  $f(e_3) = e'_1 - 2e'_2$ . Hallar las ecuaciones de  $f$ ,  $\dim(Ker(f))$  y  $\dim(Im(f))$ . Determinar si  $f$  es un monomorfismo, un epimorfismo o un isomorfismo.
7. Sea la aplicación  $f : E \rightarrow F$ , con  $E$  y  $F$  de dimensiones 3 y 4 respectivamente, definida de la siguiente forma:  $f(e_2) = -e'_1 + e'_2 - e'_4$ ,  $f(e_3) = e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4$  y  $e_1 \in Ker(f)$ . Hallar dimensión y una base para  $Ker(f)$  y para  $Im(f)$ .
8. Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida de la siguiente forma:  $f(2, -1) = (1, 0, -1, 3)$  y  $f(4, 1) = (2, -2, 3, 1)$ . Calcular:
- La matriz asociada respecto de las bases canónicas.
  - Las ecuaciones de  $Im(f)$ .
9. Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida de la siguiente forma:  $f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$ .
- Calcular la expresión analítica.
  - Encontrar los vectores invariantes.
  - Calcular las ecuaciones de  $Ker(f)$  e  $Im(f)$ .
  - Hallar una base de  $Ker(f)$  y ampliarla a  $\mathbb{R}^3$ .
  - Hallar la expresión analítica respecto de esta última base.
10. Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(1, 0, 1) = (0, 1)$ ,  $f(0, 0, -1) = (1, 1)$ ,  $f(2, 1, 1) = (1, 0)$
- Hallar la matriz de  $f$  respecto de las bases canónicas.
  - Hallar la matriz de  $f$  respecto de las bases

$$B_1 = \{(1, 0, 1), (0, 0, -1), (2, 1, 1)\} \text{ y } B_2 = \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

- Hallar ecuaciones y dimensión de  $Ker(f)$  e  $Im(f)$ .

11. Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

- b) Si  $f$  no es inyectiva, hallar  $f(L_1)$ , siendo  $L_1$  el subespacio de ecuaciones  $2x_1 - x_3 = 0$ .
- c) Sea  $L_2$  el subespacio de ecuaciones  $x_1 + x_2 - x_4 = 0$ ,  $3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0$  y  $f$  no inyectiva. Hallar una base de  $L_2 \cap f(L_1)$  y de  $L_2 + f(L_1)$ .
12. Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ , definida por  $f(p(x)) = p'(x)$ . Hallar la matriz asociada (con respecto a la base  $B = \{1, x, x^2\}$ ), ecuaciones,  $\text{Ker}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$ . Determinar si es un monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo.
13. Sean

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ y } B'_1 = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$$

bases de  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $B_c$  la base canónica y

$$B_2 = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

bases de  $\mathbb{R}^4$ .

- a) ¿Qué vector de  $\mathbb{R}^3$  tiene, respecto a la base  $B_1$ , coordenadas  $(1, 2, -1)$  y cuáles son éstas respecto a  $B'_1$ ?
- b) Calcular las matrices de cambio de base de  $B_1$  en  $B'_1$  y de  $B_c$  en  $B_2$ .
- c) Siendo  $f$  el homomorfismo caracterizado por  $f(1, 1, 0) = (1, 1, 0, 0)$ ,  $f(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)$  y  $f(0, 1, 1) = (0, 0, 1, 1)$ , hallar la matriz de  $f$  respecto de  $B_1$  y  $B_c$ , respecto de  $B_1$  y  $B_2$ , respecto de  $B'_1$  y  $B_c$  y respecto de  $B'_1$  y  $B_2$ .
14. Sea la aplicación  $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a + b + c, 0)$$

- a) Probar que  $f$  es lineal y hallar su matriz respecto de las bases canónicas.
- b) Obtener las bases, dimensión y ecuaciones implícitas de  $\text{Ker}(f)$  e  $\text{Im}(f)$ .



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**