Soluciones Hoja 3. Pedro Balodis

Problema 2. Decidir la convergencia escribiendo las series como sumas telescópicas y calcular la suma cuando sea posible:

a) $S = \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}$: Si $x_n = \log \frac{n}{n+1}$, $x_n = \log n - \log(n+1)$. Así, las sumas parciales de S son, para $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{j=2}^{n} (\log j - \log(j+1)) = \left[\sum_{j=2}^{n} \log j\right] - \left[\sum_{j=3}^{n+1} \log j\right] = \log 2 - \log(n+1)$$

(hemos usado que $\sum_{j=2}^{n} \log(j+1) = \sum_{j=3}^{n+1} \log j$). Por tanto, $s_n \to -\infty$, luego S es divergente

b) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$: Si $x_n = \frac{1}{n(n+2)}$, descomponiendo x_n en combinación lineal de fracciones simples, $x_n = (1/2)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right]$. Entonces, sus sumas parciales S_n, $n \geq 1$ son:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right\} \end{aligned}$$

de dónde $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 3/4$.

c) $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$: Las sumas parciales de S_n, $n \geq 0$ son

$$S_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

que no tiene límite, luego S es divergente (también podía observarse ésto simplemente notando que no se cumple que $x_n \to 0$.)

Problema 3. Calcular las siguientes sumas, justificando su convergencia:

1. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}$: Tenemos

2. $S=\sum_{n=0}^{\infty}[4\cdot(0,1)^n+(-0,7)^n]$: Tenemos $S=4S_1+S_2$, siendo $S_1=\sum_{n=0}^{\infty}(0,1)^n$, $S_2=\sum_{n=0}^{\infty}(-0,7)^n$ dos sucesiones convergentes (y una combinación lineal de sucesiones convergentes es convergente a la combinación lineal de las sumas). Por tanto:

$$S_1=\frac{1}{1-\dfrac{1}{10}}=\frac{10}{9},\;\; S_2=\frac{1}{1+\dfrac{7}{10}}=\frac{10}{13}\Rightarrow S=\frac{40}{9}+\frac{10}{13}$$

3. $S=\sum_{n=2}^{\infty}\pi^{n/2}e^{-n}$: $S=\sum_{n=2}^{\infty}r^n$, $r=\pi^{1/2}e^{-1}$. Puesto que $2<e<3<\pi<4$, $0<r<\dfrac{4^{1/2}}{2}=1$, luego S es convergente con

$$S=\frac{r^2}{1-r},\;\; r=\pi^{1/2}e^{-1}$$

Problema 4. Probar la divergencia, con el criterio del término general (esto es, si $S=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ es convergente, $x_n\to 0$ lo cual equivale a que si x_n no converge a 0, S es divergente):

1. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{3n-1}$: Si $x_n=\dfrac{n+3}{3n-1}$, $x_n\to 1/3\neq 0$.

2. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2n^2}$: $x_n=\sqrt[n]{2n^2}=\underbrace{2^{1/n}}_{>1}\underbrace{n^{1/(2n)}}_{>1}>1$ (hemos usado que $a^b>1$ si $a>1$ y $b>0$), luego x_n no puede converger a 0 (de hecho, converge a 1, aunque éso no es estrictamente necesario), y S diverge.

3. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$: $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\to e^{-1}>0$, luego S diverge.

4. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{\operatorname{sen} n!}{n}\right)$: $x_n=1+\dfrac{\operatorname{sen} n!}{n}$ cumple

$$1-\frac{1}{n}\leq x_n\leq 1+\frac{1}{n}\;\forall n$$

Usando el Lema del Sandwich (o de las Sucesiones Encajadas), deducimos que $x_n\to 1$, luego S diverge.

Problema 5. Decidir la convergencia, comparando con series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}$, $p>0$ (ver la indicación teórica del ejercicio):

1. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2013}$: Puesto que $x_n=\dfrac{1}{n^2+2013}$ cumple $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}n^2x_n=1$, la convergencia de ésa serie equivale a la de $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, que es convergente por ser el exponente $p=2>1$.

2. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{20n-13}$: Puesto que $x_n=\dfrac{1}{20n-13}$ cumple $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{1/n}=\lim_{n\to\infty}nx_n=1/20>0$, la convergencia de ésa serie equivale a la de $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, que es divergente por ser el exponente $p=1$.

4. $S=\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2013n^2+2014}$: Puesto que $x_n=\dfrac{\sqrt{n}+1}{2013n^2+2014}$ cumple $\lim_{n\to\infty} n^{3/2}x_n = 1/2013>0$, la convergencia de ésa serie equivale a la de $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$, que es convergente por ser el exponente $p=3/2>1$.

$$n^{3/2}x_n=\frac{n^{3/2}n^{1/2}(1+n^{-1/2})}{n^2(2013+2014n^{-2})}=\frac{1+n^{-1/2}}{2013+2014n^{-2}}\to\frac{1}{2013}$$

Problema 5. Estudiar la convergencia de:

a) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n2^n}$: Si $x_n=\dfrac{n^2+1}{n2^n}$, $x_n>0$ y

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{[(n+1)^2+1]n}{2(n+1)(n^2+1)}\to\frac{1}{2}\in[0,1)$$

Por el Criterio del Cociente (Prop.10 de las Notas de Clase), S es convergente. Si usáramos el Criterio de la Raíz,

$$|x_n|^{1/n}=\frac{1}{2}(n+1/n)^{1/n}=\frac{1}{2}n^{1/n}(1+1/n^2)^{1/n}\to\frac{1}{2},$$

pues $n^{1/n}\to 1$ (aunque justificar ésto excede lo que podemos hacer con lo que conocemos en éste momento), y de nuevo concluiríamos que S es convergente.

b) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$: Si $x_n=\left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$, $x_n>0$ y

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n}&=\frac{2n+2}{3n+4}\left[\frac{(2n+2)(3n+1)}{(3n+4)2n}\right]^n\\&=\frac{2n+2}{3n+4}\underbrace{\left[1+\frac{2}{6n^2+8n}\right]^n}_{\to 1};\quad n\cdot\frac{2}{6n^2+8n}\to 0\\&\to\frac{2}{3}\in[0,1)\end{aligned}$$

Por el Criterio del Cociente, S es convergente. Si usáramos el Criterio de la Raíz,

$$|x_n|^{1/n}=\frac{2n}{3n+1}\to\frac{2}{3},$$

y de nuevo obtendríamos la convergencia de S.

c) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-6}{n^3+1}$: Si $x_n=\dfrac{n^2-6}{n^3+1}$, $\dfrac{x_n}{1/n}=nx_n\to 1$ y razonando como en el Problema 5, S diverge.

d) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$: Si $x_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $x_n>0$ y

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{[(n+1)!]^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2}$$

e) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}$: Si $x_n=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}$, $x_n>0$ y

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^3-n^3}\left[\frac{[(n+1)^2-1]n^2}{(n+1)^2(n^2-1)}\right]^{n^3}\\ &= \underbrace{\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{3n^2+3n+1}}_{:=a_n}\underbrace{\left[1+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n^2-1)}\right]^{n^3}}_{:=b_n}\end{aligned}$$

Las sucesiones a_n y b_n son de la forma $(1+x_n)^{y_n}$ con $x_n\to 0$, $y_nx_n\to l\in\mathbb{R}$. Entonces es fácil ver que $(1+x_n)^{y_n}\to e^l$ [1]. Usando ésto, $\frac{x_{n+1}}{x_n}\to e^{-3}e^2=e^{-1}\in[0,1)$. Entonces, por el Criterio del Cociente, S es convergente. Si usáramos el Criterio de la Raíz,

$$|x_n|^{1/n}=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\to e^{-1},$$

y de nuevo obtenemos la convergencia de S.

f) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$: Si $x_n=\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$, $x_n>0$ y

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{[(n+1)!]^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}}\\ &= (n+1)^2 2^{-2n-1}\end{aligned}$$

Usaremos el siguiente Lema: si $a>1$ y $p\in\mathbb{R}$ es cierto exponente, $x_n=n^pa^{-n}\to 0$ [2] Aplicando ésto, es inmediato que $\frac{x_{n+1}}{x_n}\to 0$, luego por el Criterio del Cociente, la serie converge.

g) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(n+2)}{n^{3/2}}$: Si $x_n=\frac{1+\cos(n+2)}{n^{3/2}}$, $|x_n|\leq 2n^{-3/2}$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de $S'=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}$ (y ésta se argumenta como en el Problema 5.)

h) $S=\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}-3}$: Si $x_n=\frac{1}{\sqrt{n+3}-3}$, $n\geq 7$, x_n está bien definido y $n^{1/2}x_n\to 1$, luego la divergencia de S se deduce de la de $S'=\sum_{n=7}^{\infty}n^{-1/2}$ (y ésta se argumenta como en el Problema 5.)

Problema 7. Estudiar la convergencia según los valores del parámetro α:

a) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(n+1)}$: Puesto que $x_n=\frac{1}{n^{\alpha}(n+1)}$ cumple $n^{\alpha+1}x_n\to 1$, razonando como en el Problema 5, la convergencia de S equivale a la $S'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$, la cual se da sii $\alpha+1>1\Leftrightarrow\alpha>0$.

b) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\alpha}$: $x_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\alpha}$ puede escribirse como

$$x_n = \left[\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right]^{\alpha} = n^{-\alpha/2}[\sqrt{1+1/n} + 1]^{-\alpha/2}$$

de lo cual se deduce que $n^{\alpha/2} x_n \to 1$, luego la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$, la cual se da sii $\alpha/2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

c) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}$: Puesto que $x_n = \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}$ cumple

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{e^{\alpha(n+1)}(n^2+1)}{e^{\alpha n}[(n+1)^2+1]} \\ &= \frac{e^{\alpha}(n^2+1)}{(n+1)^2+1} \\ &\to e^{\alpha} \end{aligned}$$

tenemos, según el Criterio del Cociente que S converge si $e^{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$ y diverge si $e^{\alpha} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$. Para $\alpha = 0$ éste criterio no proporciona información, pero entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, y como $x_n = \frac{1}{n^2+1}$ cumple $n^2 x_n \to 1$, la convergencia de S eqquivale a la $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual se cumple. En resumen, la serie S converge sii $\alpha \leq 0$.

Problema 8. Estudiar la convergencia, absoluta o condicional, de las siguientes series de signo variable:

a) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}$: Si $x_n = (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}$, $n^2|x_n| \to 1$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n^2)$: Si $x_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n^2)$, $|x_n| \leq \frac{1}{n^2}$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

c) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: Si $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotada. Como no se cumple que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ es divergente, aunque sí que se cumple que las sumas parciales de S están acotadas.

Problema 10. Idem para las series:

a) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$: Si $x_n = \frac{n}{n+1}$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotada ($\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{n(n+2)} > 1$ y $x_n > 0$). Como no se cumple que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ es divergente, aunque sí que se cumple que las sumas parciales de S están acotadas. indescription

Como además está claro que $x_n \to 0$, S es convergente. Su convergencia es condicional (no absoluta), pues como $nx_n \to 1$, la convergencia absoluta de S sería equivalente a la de $S' = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$, la cual no se cumple.

c) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$: Si $x_n = \frac{n^2}{e^n}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to e^{-1} \in (0,1)$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$. Si usáramos el Criterio de la Raíz,

$$|x_n|^{1/n} = n^{2/n} e^{-1} \to e^{-1};\ n^{2/n} \to 1,$$

y de nuevo S converge (absolutamente).

Problema 11. Probar que si $a_n > 0\,\forall n$ y $a_n \to L > 1$, entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} [a_1 \dots a_n]^{-1}$ converge.

Dem: Escogiendo $r \in (1, L)$ (por ejemplo, $r = \frac{1+L}{2}$), existe N tal que $n \geq N \Rightarrow a_n \geq r$ (ésto es así porque si $\epsilon = L - r > 0$, existe N tal que $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$, luego entonces $a_n = (a_n - L) + L \geq L - \underbrace{|a_n - L|}_{\leq \epsilon = L - r} \geq L - (L - r) = r$).

Entonces, para $n \geq N$,

$$a_1 \dots a_n = \underbrace{[a_1 \dots a_{N-1}]}_{:=A>0} \underbrace{[a_N \dots a_n]}_{n-N+1 \text{ factores } \geq r} \geq A r^{n-N+1} = B r^n;\ B = A r^{-N+1} > 0$$

luego, de nuevo para $n \geq N$,

$$0 < [a_1 \dots a_n]^{-1} \leq\ C r^{-n},\ C = B^{-1} < \infty \qquad (1)$$

Usando la estimación (1), la convergencia de S se deduce de la $S' = \sum_{n=N}^{\infty} r^{-n}$, la cual es cierta por ser $r > 1$. Una forma alternativa de hacerlo es observar lo siguiente: si $x_n = [a_1 \dots a_n]^{-1}$, $x_n > 0\,\forall n$ y los cocientes

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a_{n+1}^{-1} \to L^{-1} \in (0,1) \text{ (pues } L > 1)$$

luego aplicando el Criterio del Cociente, deducimos inmediatamente la convergencia de S.

Problema 12. Decidir si es verdadero o falso (si es falso, dando algún contraejemplo):

a) Si $a_n \geq 0\,\forall n$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $S' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también.

Verdadero: Si S converge, $a_n \to 0$, de dónde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto acotado y existe una constante C con $0 \leq a_n \leq C\,\forall n$. Entonces $0 \leq a_n^2 = a_n a_n \leq C a_n$, de modo que

$$0 \leq S' \leq \sum_{h=1}^{\infty} C a_n = CS < \infty$$

(Observación: El argumento no funciona en absoluto al revés, como la sucesión

c) Si $a_n \to 0$, entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Falso: Considerando la sucesión $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$, que es divergente.

d) Si $0 < a_n \, \forall n$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona y no-acotada, entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-n}$ converge.

Verdadero: Primero de todo, observamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ debe ser creciente, pues si fuera decreciente y positiva, tendría un límite $l \geq 0$ de dónde $l \leq a_n \leq a_1 \, \forall n$, lo cual contradice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada. Siendo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ creciente y no-acotada, $a_n \to \infty$, de dónde existe N tal que $n \geq N \Rightarrow a_n \geq 2$. Entonces, para $n \geq N$, $0 < a_n^{-n} \leq 2^{-n}$, luego la convergencia de S se deduce de la $S' = \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n}$.

e) Si $0 \leq a_n \, \forall n$, entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2a_n}{3a_n + 1} \right)^n$ converge.

Verdadero: Observamos que

$$0 \leq \frac{2a_n}{3a_n + 1} = \frac{2}{3} \frac{a_n}{a_n + 1/3} \leq \frac{2}{3} \frac{a_n + 1/3}{a_n + 1/3} = \frac{2}{3} \; \forall n$$

(en la primera desigualdad usamos que $a_n \geq 0$, y en la segunda que $a_n + 1/3 > 0$). Por tanto, podemos estimar

$$0 \leq \left(\frac{2a_n}{3a_n + 1} \right)^n \leq (2/3)^n \; \forall n$$

luego la convergencia de S se deduce de la de $S' == \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^{-n}$.

Problema adicional: Decidir para qué valores de $a \geq 0$ la serie $S = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \log^a n}$ es convergente.

Solución: Si $x_n = \dfrac{1}{n \log^a n}$, x_n es decreciente, pues para $a \geq 0$, $a_n = n$ y $b_n = \log^a n$ son ambas crecientes, luego también $c_n = a_n b_n$, y entonces $x_n = 1/c_n$ es decreciente. Por tanto, el Criterio de Condensación es aplicable y la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n}$. Pero

$$2^n x_{2^n} = \frac{2^n}{2^n (\log(2^n))^a} = \frac{n^{-a}}{\log^a 2}.$$

Por tanto, la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-a}$, y por lo que hemos visto en Teoría, ésto ocurre sii $a > 1$ (lo cual a su vez lo dedujimos usando el Criterio de Condensación).