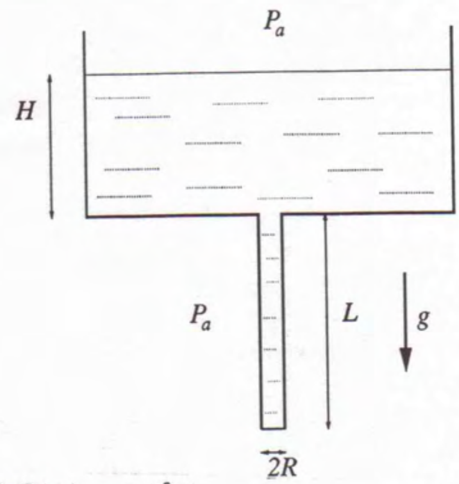
Problema 1



1)

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\nabla(P + \rho g z) + \mu \nabla^2 \bar{v}$$

$$\rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \sim \mu \nabla^2 \bar{v}$$

$$\rho \frac{U_c^2}{L_e} \sim \mu \frac{U_c}{R^2} \rightarrow \boxed{L_e \sim \frac{U_c R}{\nu} R}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \sim \mu \nabla^2 \bar{v} \rightarrow \boxed{t_T \sim R^2/\nu}$$

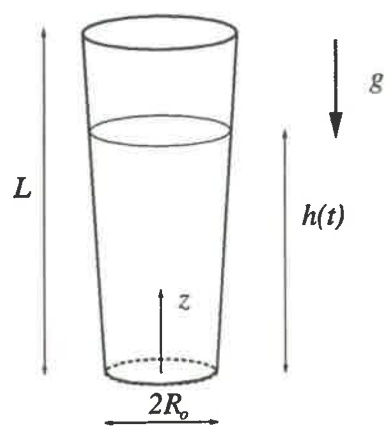
CRITERIOS: $L \gg L_e$, $t_v \gg t_T$ $\quad t_v \sim V$

$$\boxed{U_c \sim \rho g R^2} \rightarrow +\nabla(P + \rho g z) \sim \mu \nabla^2 \bar{v}$$

$h = 0$, $\boxed{\bar{t}_v = \ln(1 + H)}$

→ EN FORMA ADIMENSIONAL $\quad z = t/(R^2/\nu)$

Problema 2



$\uparrow u \; \rightarrow v$

$$\frac{U_c}{L} \sim \frac{V_c}{R}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho\, u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho\, v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial z}(p + \rho g z) + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

CONVECCION DESPRECIABLE SI $\rho \frac{U_c^2}{L} \ll \frac{\mu}{R_0^2} U_c \sim \frac{U_c R_0}{\nu} \frac{R_0}{L} \ll 1$

TERMINOS NO-ESTACIONARIOS DESPRECIABLES SI $\rho \frac{U_c}{t_0} \ll \frac{\mu}{R_0^2} U_c \rightarrow \frac{U_c R_0}{\nu} \frac{R_0}{L} \ll 1$ $\quad$ MISMO CRITERIO

$t_0 \sim L/U$

PARA ESTIMAR LA $U_c \rightarrow U_c \sim \frac{\rho g R_0^2}{\mu}$, DE DONDE EL CRITERIO ES $\boxed{\frac{g R_0^3}{\nu^2} \frac{R_0}{L} \ll 1}$

EL FLUJO ES LOCALMENTE UNIDIMENSIONAL

$P_\ell(z,t)$

$u(r,z,t)$

$$0 = P_\ell + \mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{du}{dr}\right) \rightarrow u = \frac{1}{4\mu} P_\ell (R^2 - r^2)$$

$$Q(t) = \frac{\pi R^4 P_\ell}{8\mu} \Rightarrow \frac{d}{dz}(p + \rho g z) = -\frac{8\mu Q(t)}{\pi R^4} \frac{1}{(\ldots)^4}$$

$$Q = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}\pi R_0^2 \frac{L}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\alpha h}{L}\right)^3 - 1\right]\right] \Rightarrow \frac{\rho g L}{\ldots}(\eta - 1) = \frac{8\mu L}{3\pi \alpha R_0^4}\left[\frac{1}{\eta^3} - 1\right] \pi R_0^2 L\, \eta^2\, d\eta \qquad t=0,\ \eta = 1+\alpha$$

Problema 3

1)

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\dfrac{U_c}{L} \qquad \dfrac{\Delta v}{h}$

(2) $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$\dfrac{U_c^2}{L} \qquad V_0\dfrac{U_c}{h} \qquad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{P_1-P_2}{L} \qquad \nu\dfrac{U_c}{h^2}$

(3) $u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

$U_c\dfrac{\Delta v}{L} \qquad V_0\dfrac{\Delta v}{h} \qquad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\Delta_y P}{h} \qquad \nu\dfrac{\Delta v}{h^2}$

SI $\boxed{\Lambda \ll 1}$, $\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg v\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $U_c \sim \dfrac{h^2}{\nu}\dfrac{(P_1-P_2)}{\rho L} = \left(\dfrac{h V_0}{\nu}\right)\dfrac{(P_1-P_2)}{\rho V_0}\dfrac{h}{L} = \Lambda\dfrac{P_1-P_2}{\rho V_0}\dfrac{h}{L}$ → SI HAY SOPLADO PASA MENOS FLUIDO QUE SIN SOPLADO

$\dfrac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \dfrac{U_c h}{\nu}\dfrac{h}{L} \sim \rho\dfrac{h^4(P_1-P_2)}{\mu^2 L^2} \ll 1,$

$0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$\Delta_y P \sim (P_1-P_2)\left(\dfrac{h}{L}\right)^2 \to \dfrac{\partial P}{\partial y} \simeq 0$

EL CASO $\Lambda \sim O(1)$ ES INTERMEDIO, $v\dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

SI $\boxed{\Lambda = \dfrac{V_0 h}{\nu} \gg 1}$, $\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ll v\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$U_c \sim \dfrac{h}{L}\dfrac{(P_1-P_2)}{\rho V_0}$ $\qquad V_0 \gg \dfrac{\nu}{h}$

$\dfrac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{v\frac{\partial u}{\partial y}} \sim \dfrac{U_c}{L}\dfrac{h}{V_0} = \dfrac{h^2}{L^2}\dfrac{(P_1-P_2)}{\rho V_0^2} \ll \dfrac{\rho h^4(P_1-P_2)}{L^2\mu^2} \ll 1$

ADEMAS $\dfrac{\Delta v}{V_0} \sim \dfrac{h}{L}\dfrac{U_c}{V_0} \sim \dfrac{h^2}{L^2}\dfrac{(P_1-P_2)}{\rho V_0^2} \ll 1$

DE DONDE (2) → $V_0\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}$

Y DE (3) $\Delta_y P \sim (P_1-P_2)\left(\dfrac{h}{L}\right)^2 \ll (P_1-P_2) \to \dfrac{\partial P}{\partial y} \simeq 0$

2) INTEGRANDO SE OBTIENE

$V_0\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dx} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\qquad \begin{matrix} y=0 \\ y=h \end{matrix} \quad u=0$

$$u = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{h^2}{\mu}\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{e^{\Lambda\eta}-1}{e^{\Lambda}-1} - \eta\right), \quad \eta = y/h$$

3)

$$q = h\int u\, d\eta = \frac{1}{\Lambda}\frac{h^3}{\mu}\frac{dP}{dx}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{e^{\Lambda}-1}\right)$$

$$\boxed{q = \frac{1}{\Lambda}\frac{h^3}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{e^{\Lambda}-1}\right)}$$

$u = \dfrac{1}{\Lambda}\left(\dfrac{h^2}{\mu}\dfrac{P_1-P_2}{L}\right)\left(\eta - \dfrac{e^{\Lambda\eta}-1}{e^{\Lambda}-1}\right)$

COMO $q = CTE \to \boxed{\dfrac{dP}{dx} = CTE = -\dfrac{P_1-P_2}{L}}$

$\tau_0 = \mu\dfrac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \dfrac{h}{\Lambda}\dfrac{P_1-P_2}{L}\left(1 - \dfrac{\Lambda}{e^{\Lambda}-1}\right)$

$\tau_0 = -\mu\dfrac{du}{dy}\Big|_{y=h} = \dfrac{h}{\Lambda}\dfrac{P_1-P_2}{L}\left(\dfrac{\Lambda e^{\Lambda}}{e^{\Lambda}-1} - 1\right)$

4) $\Lambda \to 0$,

$$\boxed{u = \frac{-1}{\Lambda}\left(\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\right)\left(\frac{\Lambda\eta + \frac{\Lambda^2\eta^2}{2}+\dots}{\Lambda + \frac{\Lambda^2}{2}+\dots} - \eta\right) = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\eta(1-\eta)}$$

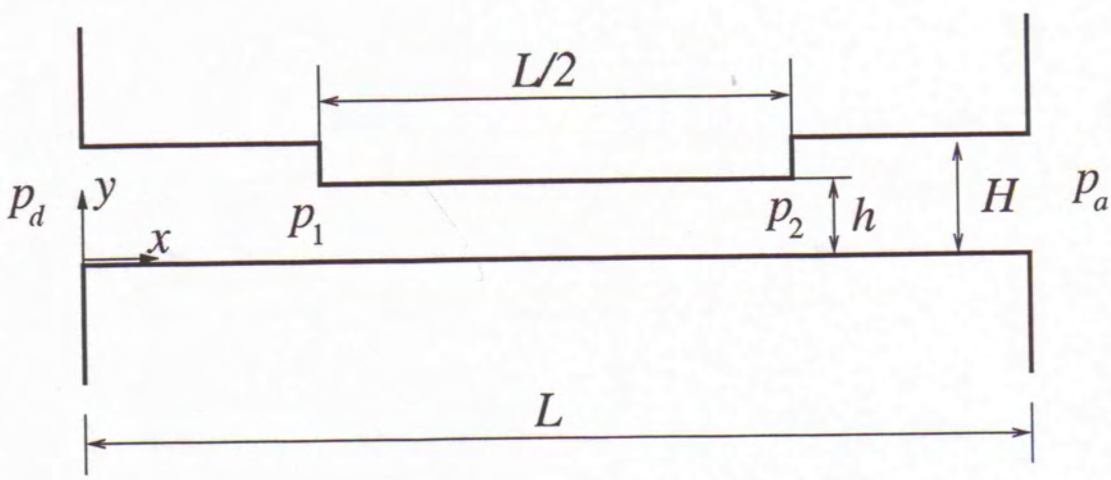
CLARO, LA EC. ADIMENSIONAL DARIA $\bar{u} = \dfrac{u}{\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}}$, $\dfrac{d^2\bar{u}}{d\eta^2} - \Lambda\dfrac{d\bar{u}}{d\eta} = -1 \xrightarrow{\Lambda=0} \dfrac{u}{\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}} = \dfrac{1}{2}(\eta-\eta^2)$

NOTESE ADEMAS QUE $\Lambda \to 0$

$q = \dfrac{h^3}{\mu}\dfrac{P_1-P_2}{L}\dfrac{1}{\Lambda}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\Lambda} + \dfrac{1}{\Lambda + \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^3}{6}\dots}\right) \simeq \dfrac{h^3}{} \dfrac{P_1-P_2}{}$

$d\xi^2 \qquad d\xi \qquad u(\infty) = \dfrac{1}{\Lambda}$

Problema 4



1) $U_c \sim \frac{H^2}{\mu} \frac{P_d - P_a}{L}$, CRITERIO $\frac{\rho U_c H}{\mu} \frac{H}{L} \ll 1 \rightarrow \frac{\rho H^4 (P_d - P_a)}{\mu^2 L^2} \ll 1$

2) $0 < x < \frac{L}{4}$, $P_\ell = -\frac{\partial P}{\partial x} = 4\frac{P_d - P_1}{L}$, $u = \frac{1}{\mu} \frac{P_\ell}{2} y(H-y)$, $Q_1 = \frac{H^3}{12\mu} 4 \frac{P_d - P_1}{L}$

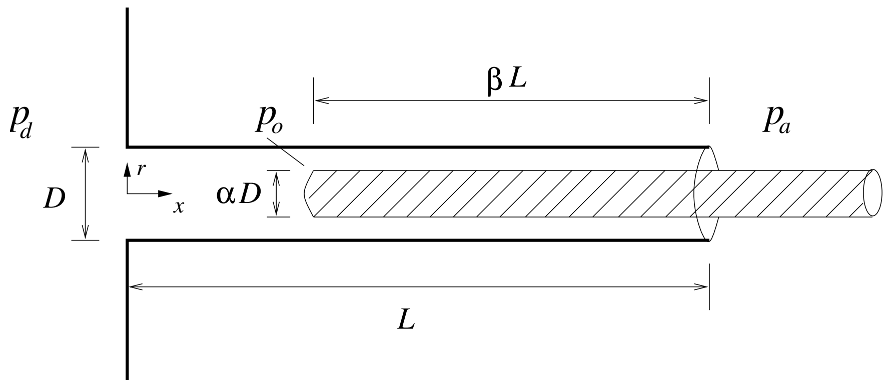
$\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}$, $P_\ell = 2\frac{P_1 - P_2}{L}$, $u = \frac{1}{\mu} \frac{P_\ell}{2} y(h-y)$, $Q_2 = \frac{h^3}{12\mu} 2 \frac{P_1 - P_2}{L}$

$\frac{3L}{4} < x < L$, $P_\ell = 4\frac{P_2 - P_a}{L}$, $u = \frac{1}{\mu} \frac{P_\ell}{2} y(H-y)$, $Q_3 = \frac{H^3}{\,} 4 \frac{P_2 - P_a}{\,}$

$\frac{\,}{4}$, $P_2 = P_d - \frac{3}{4}(P_d - P_a)$, $Q = \frac{H^3}{12\mu L}(P_d - P_a)$

$h \ll H$, $P_1 = P_d$, $P_2 = P_a$, $Q = \frac{h^3}{12\mu L}(P_d - P_a)$

Problema 5



Solución:

1. Dado que el problema es estacionario, ya que las condiciones de contorno son indepedendientes del tiempo, y casi-unidireccional por ser $D \ll L$, para que el movimiento esté dominado por la viscosidad basta con que se cumpla que el término de aceleración convectiva, del orden de $\rho u_c^2/L$, sea mucho menor que el término viscoso, del orden de $\mu u_c/D^2$, donde u_c es la velocidad característica del líquido en el conducto, dando el criterio $ReD/L \ll 1$, donde $Re = \rho u_c D/\mu$ es el número de Reynolds. A su vez, u_c puede obtenerse igualando los órdenes de magnitud del gradiente de presión, que origina el movimiento, y del término viscoso, $(p_d - p_a)/L \sim \mu u_c/D^2$, dando $u_c \sim D^2(p_d - p_a)/(\mu L)$. Por lo tanto, el criterio buscado es

$$\frac{\rho\,(p_d - p_a)\,D^4}{\mu^2\,L^2} \ll 1.$$

2. El campo de velocidad puede obtenerse integrando la ecuación de cantidad de movimiento axial

Para obtener la solución en la región $0 \leq x \leq (1-\beta)L$ ha integrarse la ecuación (1) con las condiciones de contorno $r = 0 : \partial u/\partial r = 0;\ r = D/2 : u = 0$, para dar el flujo de Poiseuille,

$$u = \frac{P_l D^2}{16\mu}\left(1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right), \tag{2}$$

$$P_l = \frac{p_d - p_o}{(1-\beta)L}, \tag{3}$$

donde se ha supuesto que el conducto es horizontal, o, alternativamente, que las fuerzas másicas son despreciables en el movimiento, $Fr = u_c^2/gL \gg 1$.

Del mismo modo, la solución en la región $(1-\beta)L \leq x \leq L$ se obtiene de integrar (1) con las condiciones de adherencia en las paredes interior y exterior, $r = \alpha D/2 : u = 0;\ r = D/2 : u = 0$, dando

$$u = \frac{P_l D^2}{16\mu}\left(1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2 - \frac{(1-\alpha^2)}{\ln(\alpha)}\ln\left(\frac{2r}{D}\right)\right), \tag{4}$$

$$P_l = \frac{p_o - p_a}{\beta L}. \tag{5}$$

3. Los valores de p_o y del caudal Q pueden obtenerse usando la pareja de ecuaciones correspondientes a imponer $Q = \int_\Sigma u\, d\sigma$ en ambos tramos. En el primer tramo se tiene que $Q = 2\pi \int_0^{D/2} r\, u(r)\, dr$ con $u(r)$ dado por la ecuación (2), resultando

$$Q = \frac{\pi\,(p_d - p_o)\,D^4}{128\mu\,(1-\beta)L}, \tag{6}$$

mientras que para el segundo tramo $Q = 2\pi \int_{\alpha D/2}^{D/2} r\, u(r)\, dr$ con $u(r)$ dado por (4), obteniéndose

$$Q = \frac{\pi\,(p_o - p_a)\,D^4}{128\mu\,\beta L}\left(1 - f(\alpha)\right), \tag{7}$$

$$f(\alpha) = \alpha^4 - \frac{(1-\alpha^2)^2}{\ln(\alpha)},$$

donde se ha hecho uso de la integral por partes $\int x \ln(x)\, dx = x^2\left(\ln(x) - 1/2\right)/2$.

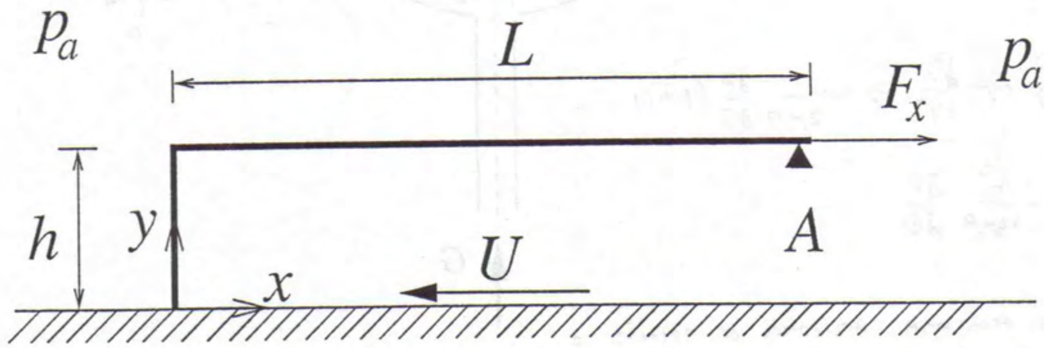
Igualando las expresiones (6) y (7) se obtiene la ecuación que determina la presión p_0,

$$\frac{p_d - p_o}{(1-\beta)L} = \frac{p_o - p_a}{\beta L}\left(1 - f(\alpha)\right),$$

de donde se despeja inmediatamente el valor de p_o,

$$p_o = p_d - \frac{(1-\beta)p_d - p_a}{1 + \frac{\beta f}{1-f}}, \tag{8}$$

Problema 6



① $\frac{\rho U h}{\mu}\frac{h}{L} \ll 1$

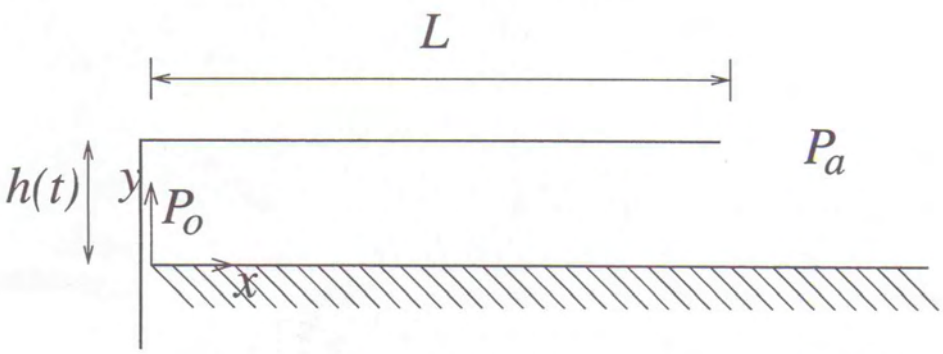
② $0 = P_\ell + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $P_\ell = -\frac{dp}{dx}$; $u(0) = -U$; $u(h) = 0$

$u = \frac{P_\ell h^2}{2\mu}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right) - U\left(1-\frac{y}{h}\right)$

③

M_F ... $= -\int_0 (p-p_a)(L-x)\,dx = -\frac{2\mu U L^3}{h^2}$

Problema 7



1) $0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left\{ u=0,\ y=0,h \right. \Rightarrow u = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{y(h-y)}{2\mu}\ ,\ q = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{h^3}{12\mu}$

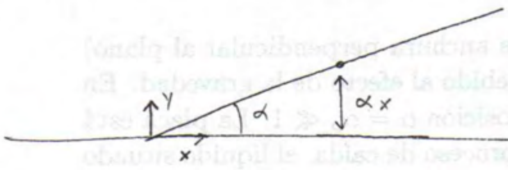
$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{h^3}{12\mu}\right) = \frac{dh}{dt}}$ (2) (1) $\xrightarrow{q=0,\ x=0} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{12\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}x \xrightarrow[x=L]{P=P_a} P - P_a = \frac{6\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}(x^2 - L^2)$ (1)

$\boxed{P_o(t) - P_a = -\frac{6\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}L^2}$ (1), $\boxed{u = -\frac{\cancel{2\mu}\,6}{h^3}\frac{dh}{dt}x\,\frac{y(h-y)}{\cancel{2\mu}}}$, $\boxed{q = -\frac{dh}{dt}x}$ (1)

2) $\boxed{F_y = \int_0^L (P - P_a)\,dx = -\frac{4\mu}{\ }\frac{dh}{\ }L^3}$, $\boxed{F_x = -(P_o - P_a)h - \int^L \mu\frac{du}{\ }dx = \frac{3\mu}{\ }\frac{dh}{\ }L^2}$

Problema 8

①



$$\frac{1}{3}ML^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mg\frac{L}{2} + \int_0^L x(P-P_a)\,dx$$

SI NO HUBIERA FUERZA DEL FLUIDO $t_c \sim \left(\frac{L\alpha_0}{g}\right)^{1/2}$

VELOCIDADES VERTICALES INDUCIDAS $V_c \sim \frac{\alpha_0 L}{t_c} \sim (gL\alpha_0)^{1/2}$

VELOCIDADES LONGITUDINALES INDUCIDAS $U_c \sim \frac{L}{t_c} \sim \left(\frac{gL}{\alpha_0}\right)^{1/2}$

②

$$\frac{\left|\rho u\frac{\partial u}{\partial x}\right|}{\left|\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|} = \frac{\rho U_c^2/L}{\mu U_c/(\alpha_0^2 L^2)} = \frac{\rho\,\alpha_0^{3/2}L^{3/2}g^{1/2}}{\mu} \ll 1$$

$$\frac{\left|\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right|}{\left|\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|} = \frac{\rho\,\alpha_0^{3/2}L^{3/2}g^{1/2}}{\mu} \ll 1$$

NOTESE QUE EL EFECTO DEL FLUIDO RALENTIZA LA CAIDA, DE MANERA QUE EN REALIDAD EL TIEMPO DE CAIDA SERA MAYOR Y LAS VELOCIDADES INDUCIDAS MENORES, CON LO QUE LOS CRITERIOS DADOS SON CONDICION SUFICIENTE PARA QUE EL MOV. ESTE DOMINADO POR LA VISCOSIDAD

③

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \Delta P_L \sim L\mu\frac{U_c}{\alpha_0^2 L^2}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y}(P+\rho g y) + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\Delta P_T}{\alpha_0 L} \qquad \rho g \qquad \frac{\mu(gL\alpha_0)^{1/2}}{(L\alpha_0)^2} \rightarrow \frac{|\rho g|}{\left|\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|} \sim \frac{\rho\,\alpha_0^{3/2}L^{3/2}g^{1/2}}{\mu} \ll 1$$

DE DONDE

$$\Delta P_T \sim \alpha_0 L\,\mu\frac{V_c}{\alpha_0^2 L^2}$$

COMO $\frac{\Delta P_T}{\Delta P_L} \sim \alpha_0^2 \ll 1 \rightarrow$ LA EC. CM. $y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = 0 \rightarrow \boxed{P = P(x,t)}$

④

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad u(y=0)=0 \\ u(y=h)=0 \end{array}\right\} \rightarrow u = +\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right) \rightarrow q = \int_0^h u\,dy = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

EC. REYNOLDS, O BIEN $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v(y=h) - 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\,dy = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \qquad x\frac{d\alpha}{dt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{2}\dot\alpha - \frac{\alpha^3 x^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = CTE = 0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = +\frac{6\mu}{x}\frac{\dot\alpha}{\alpha^3}$$

$\hookrightarrow q = 0$ EN $x=0$

ALTERNATIVAMENTE $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x\cdot\alpha x\right) + \int_0^{\alpha x} u\,dy = 0 \rightarrow \frac{x^2}{2}\frac{d\alpha}{dt} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = 0$

$$u = \frac{\alpha^2 x^2}{2\mu}\frac{6\mu}{x}\frac{\dot\alpha}{\alpha^3}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right) \Rightarrow \boxed{u = \frac{3x\dot\alpha}{\alpha}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right)}$$

$$P = +6\mu\frac{\dot\alpha}{\alpha^3}\ln(x) + CTE$$

$x=L,\ P=P_a \rightarrow \boxed{P - P_a = \frac{6\mu\dot\alpha}{\alpha^3}\ln\left(\frac{x}{L}\right)}$

⑤

$$\boxed{\frac{1}{3}ML^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mg\frac{L}{2} + \frac{6\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2\int_0^1 \eta\ln(\eta)\,d\eta = -Mg\frac{L}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2}$$

$$\alpha(0) = \alpha_0$$

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = 0$$

$$\int \eta\ln\eta\,d\eta = \frac{\eta^2}{2}\left(\ln\eta - \frac{1}{2}\right)$$

⑥

$$\tau = \frac{t}{\left(\frac{L\alpha_0}{g}\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{\frac{d^2\bar\alpha}{d\tau^2} + \frac{9}{2}\Lambda\frac{1}{\bar\alpha^3}\frac{d\bar\alpha}{d\tau} = -\frac{3}{2}}$$

¡SINGULAR EN $x=0$!

$$\Lambda = \frac{\mu L^{1/2}}{M\alpha_0^{5/2}g^{1/2}}$$

$$\bar\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar\alpha(0) = 1 \\ \frac{d\bar\alpha}{d\tau}(0) = 0\end{array}}$$

⑦ PARA ENTENDER FISICAMENTE EL LIMITE $\Lambda \gg 1$, VOLVAMOS MOMENTANEAMENTE A LA ECUACION EN FORMA DIMENSIONAL

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot\alpha = -Mg\frac{L}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2$$

$$\frac{ML^2\alpha_0}{t_c^2} \qquad MgL \qquad \frac{\mu L^2}{\cdots}$$

SI $\frac{ML^2\alpha_0}{t_c^2} \sim MgL \rightarrow t_c \sim \left(\frac{L\alpha_0}{g}\right)^{1/2}$ $\quad \left|-\frac{3}{2}\frac{\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2\right|$

$$\frac{\dot\alpha}{\alpha^3} = -\frac{1}{3}\frac{Mg}{\mu L} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\frac{Mg\alpha_0^2 t}{\mu L}}}$$

• Ley $L(t)$ En un instante genérico el volumen total de fluido es $V(t) = \pi R^2 h(t) + 2\pi R h_o L(t)$

Este volumen tiene que ser igual al volumen inicial $V_o = \pi R^2 (3h_o)$

$$\underbrace{\pi R^2(\cancel{3h_o} - Vt) + 2\pi R h_o L(t)}_{V(t)} = \underbrace{\pi R^2(\cancel{3h_o})}_{V_o} \rightarrow \boxed{L(t) = \frac{V}{2}\frac{R}{h_o}t} \rightarrow \cancel{R} = \frac{V}{2}\frac{\cancel{R}}{h_o}t_p \rightarrow \boxed{t_p = \frac{2h_o}{V}}$$

Tiempo de llenado

• Criterio para que el movimiento esté dominado por la viscosidad

Problema 9

$[0] \rightarrow \frac{h_o}{R_o}, \frac{h_o}{L(t)} \ll 1$ (se cumple por enunciado)

$[1] \rightarrow \frac{\rho h_o^2}{\mu t_p} \ll 1 \rightarrow \frac{\rho h_o^{\cancel{2}} V}{\mu 2 \cancel{h_o}} \sim \boxed{\frac{\rho V h_o}{\mu} \ll 1}$ aceleración local despreciable

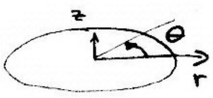
$[2] \rightarrow \frac{\rho U_c h_o}{\mu}\frac{h_o}{R} \ll 1$ donde $U_c \sim \frac{dL}{dt} \sim V\frac{R}{h_o} \rightarrow \frac{\rho(V\cancel{R}/\cancel{h_o})\cancel{h_o}}{\mu}\frac{h_o}{\cancel{R}} = \boxed{\frac{\rho V h_o}{\mu} \ll 1}$ Términos convectivos despreciables

Las condiciones [1] y [2] conducen en este caso al mismo criterio

Nótese que la velocidad longitudinal característica U_c puede obtenerse directamente de derivar la ley $L(t)$ del primer apartado

• Campo de presiones dentro del plástico (Trabajamos con presiones reducidas $P = p + \rho g z$ [0])

① Flujo bajo el vástago → Ecuación de Reynolds en coordenadas curvilíneas (r, θ)



$g_r = 1 \quad q_r = \int_0^h v_r dz = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial r} \qquad h(t) = 3h_o - Vt \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = -V$

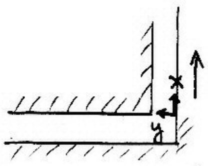
$g_\theta = r \quad q_\theta \equiv 0$ (mov. axilsimétrico) $\qquad \left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\partial(rh)}{\partial t} = -Vr \rightarrow \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial r} = -V\frac{r}{2} + \cancel{\frac{A}{r}} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{6\mu V}{h^3}r \\ \left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \quad \text{simetría} \\ P(r=R) = P^*(t) \text{ desconocida} \rightarrow \text{la calculamos más abajo} \end{cases}$$

$$\boxed{P = P^*(t) + \frac{3\mu V}{h^3(t)}(R^2 - r^2)} \quad [1]$$

② Flujo en la holgura lateral (aproximamos por flujo 2D)

Tomamos un sistema de referencia x-y que se desplaza con el pistón (véase figura)

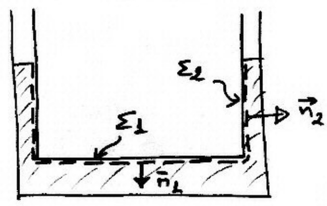


Ecuación de Reynolds 2D

$$\cancel{\frac{\partial h_o}{\partial t}} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \rightarrow q = \frac{Vh_o}{2} - \frac{h_o^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{\pi R^2 V}{2\pi R} = \frac{RV}{2} \equiv cte$$

$h_o \equiv cte$ caudal total que sale por la holgura

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{12\mu}{h_o^3}\left(\frac{Vh_o}{2} - \frac{RV}{2}\right) = -\frac{6\mu RV}{h_o^3}\left(1 - \underbrace{\cancel{\frac{h_o}{R}}}_{\ll 1}\right) \rightarrow \boxed{P = P^*(t) - \frac{6\mu RV}{h_o^3}x} \quad [2] \\ P(x = L(t)) = P_a \equiv p_a + \rho g L(t) \end{cases}$$



Imponiendo $P(x = L(t)) = P_a$ obtenemos

$$P^*(t) = P_a + \frac{3\mu R^2 V^2}{h_o^4}t = p_a + \rho g L(t) + \frac{3\mu R^2 V^2}{h_o^4}t = p_a + \left(\rho g\frac{VR}{2h_o} + \frac{3\mu R^2 V^2}{h_o^4}\right)t \quad [3]$$

que junto con [0] [1] y [2] determina la distribución de presiones

despreciable

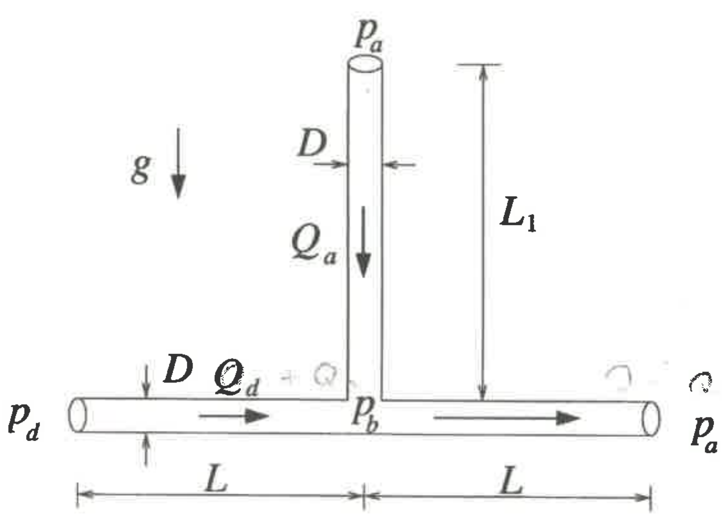
$$\bullet\ F_z = \vec{F}_{fluido\ s/vástago} \cdot \vec{e}_z = \left[-\int(p - p_a)\vec{n}\,d\sigma + \int \bar{\bar{\tau}}'\cdot\vec{n}\,d\sigma\right]\cdot\vec{e}_z = \int^R (p - p_a)2\pi r dr + \int \cancel{\bar{\bar{\tau}}'}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

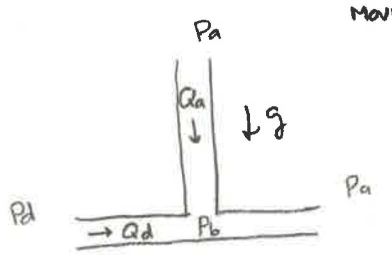
$\sim R$

$\sim \frac{VR}{h_o^2}$ por tanto se puede despreciar

Nota: en la resolución del problema se han despreciado términos de orden h_o ... e ignoramos el detalle del flujo en la esquina, donde suponemos que la presión vale p^*

Problema 10





MOVIMIENTO DOMINADO POR LA VISCOSIDAD SI $\boxed{\frac{\rho D^4}{\mu^2 L^2}(P_d - P_a) \ll 1 \quad y \quad \frac{\rho^2 D^4 g}{\mu^2 L} \ll 1}$ (2)

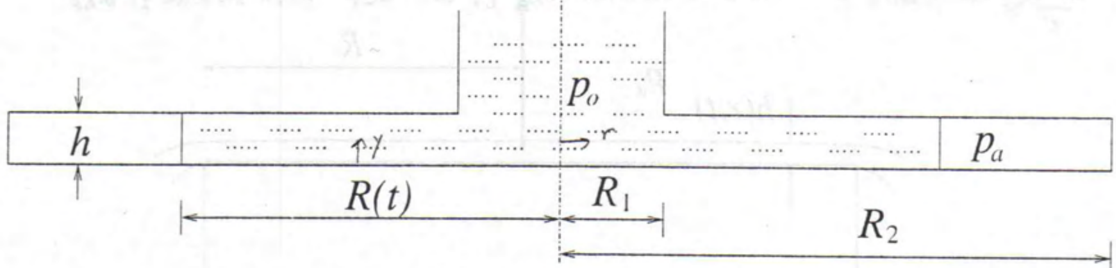
FLUJO DE POISEUILLE: $Q = \frac{\pi D^4}{128\mu} P_\ell$, $P_\ell = -\frac{\partial}{\partial \ell}(p + \rho g z)$

TRAMO VERTICAL $\boxed{\frac{128\mu Q_a}{\pi D^4} = \left(\frac{P_a - P_b}{L_1} + \rho g\right)}$ (3)

1er TRAMO HORIZONTAL

$P_b = P_a + \rho g L_1 - \frac{128\mu Q_a L_1}{\pi D^4}$ (3)

Problema 13



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \rightarrow v = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dr}\, y(h-y) \quad ; \quad \int_0^h v\,dy = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dr}$$

CONTINUIDAD

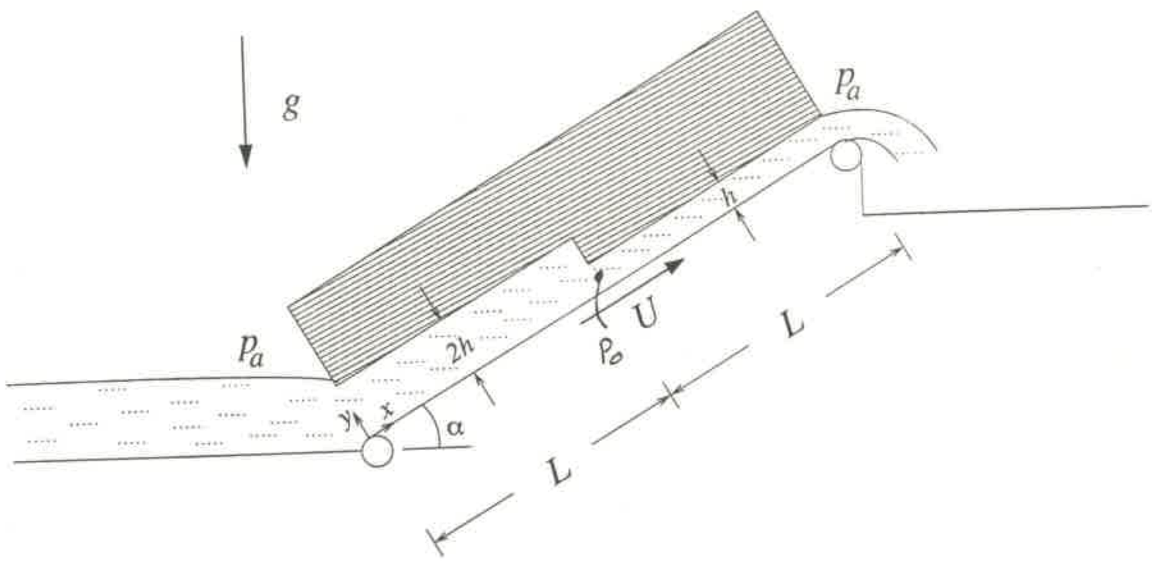
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \int_0^h v\,dy \right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dr}\left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0 \qquad p = A \ln r + B \quad \begin{cases} r = R_1, & p = p_o \\ r = R & p = p_a \end{cases}$$

$$p = -\frac{(p_o - p_a)}{\ln(R/R_1)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + p_o$$

$$Q = 2\pi r \int_0^h v\,dy = \boxed{\frac{2\pi h^3}{12\mu}\frac{(p_o - p_a)}{\ln(R/R_1)} = 2\pi h R \frac{dR}{dt}}$$

$$\boxed{\int_1^{R/R_1} \frac{R}{R_1} \ln\left(\frac{R}{R_1}\right) d\left(\frac{R}{R_1}\right) = \frac{(p_o - p_a)}{12\mu}\left(\frac{h}{R_1}\right)^2 t}$$

Problema 14



• $\frac{Uh}{\nu}\frac{h}{L} \ll 1$ (1)

$$0 = -\frac{d}{dx}P + \mu\frac{d^2u}{dy^2} \Rightarrow Q = \frac{U\,2h}{2} - \frac{8h^3}{12\mu}\frac{(P_0 + \rho g L\sin\alpha - P_a)}{L}$$

$$= \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{(P_a + 2\rho g L\sin\alpha - P_0 - \rho g L\sin\alpha)}{L}$$

$P_1 = -\frac{dP}{dx} = -\frac{P_0-P_a}{L} - \rho g\sin\alpha$

2h

$$\boxed{W = UL(\tau_1+\tau_2) = UL\left(-\frac{3}{2}\frac{\mu U}{h} - \frac{3}{3}\rho g\sin\alpha\, h - \frac{1}{2}\frac{P_0-P_a}{L}h\right)}$$

SOLUCIÓN:

1.- Ecuación de cantidad de movimiento (fuerzas másicas despreciables):

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}\qquad+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\sim\rho\frac{U_c^2}{a}\quad\sim\rho\frac{U_c^2}{a}\quad\sim\underbrace{\frac{p_0-p_\infty}{a}}\quad\sim\mu\frac{U_c}{a^2}\quad\sim\underbrace{\mu\frac{U_c}{h^2}}$$

Si los términos viscosos son dominantes, la velocidad característica en la película es

$$\frac{p_0-p_\infty}{a}\sim\mu\frac{U_c}{h_\infty^2}\quad\Rightarrow\quad U_c\sim\frac{h_\infty^2(p_0-p_\infty)}{a\mu}$$

Para que los términos convectivos sean despreciables debe ser

$$\rho\frac{U_c^2}{a}\ll\mu\frac{U_c}{h_\infty^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\rho h_\infty^4(p_0-p_\infty)}{a^2\mu^2}\ll 1$$

2.- Flujo dominado por la viscosidad con paredes fijas $\Rightarrow$ Poiseuille

$$u(x,y)=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial(p-p_\infty)}{\partial x}y(y-h(x))$$

El gradiente de presión debe variar con x para garantizar que el flujo volumétrico, q, que atraviesa cualquier sección transversal a la película sea constante:

$$q=\int_0^{h(x)}u(x,y)\,dy=-\frac{h(x)^3}{12\mu}\frac{\partial(p-p_\infty)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{h^3(x)}{12\mu}\frac{\partial(p-p_\infty)}{\partial x}\right)=0\tag{1}$$

Las condiciones de contorno son $p-p_\infty=p_0-p_\infty$ en $x=b$ y $p-p_\infty=0$ en $x=a+b$.

3.- Integrando una vez la Ecuación (1)

$$-\frac{h^3(x)}{12\mu}\frac{\partial(p-p_\infty)}{\partial x}=q\quad\Rightarrow\quad\frac{p-p_\infty}{p_0-p_\infty}=1-\frac{12\mu q}{p_0-p_\infty}\int_b^x h^{-3}(x)dx\tag{2}$$

El gasto volumétrico se obtiene particularizando este resultado en la sección de salida, $x=a+b$, donde $p=p_\infty$:

$$q=\frac{p_0-p_\infty}{12\mu\int_b^{a+b}h^{-3}(x)dx}\quad\Rightarrow\quad\frac{p-p_\infty}{p_0-p_\infty}=1-\frac{\int_b^x h^{-3}(x)dx}{\int_b^{a+b}h^{-3}(x)dx}=\frac{\int_x^{b+a}h^{-3}dx}{\int_b^{a+b}h^{-3}dx}$$

Escribiendo $h(x)=h_0[1-(1-\beta)(x-b)/a]$, con $h_0=h_\infty+\alpha a$ y $\beta=h_\infty/h_0$, e integrando de nuevo se obtiene la distribución de presiones

$$\frac{p-p_\infty}{p_0-p_\infty}=1-\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\left\{\frac{1}{[1-(1-\beta)(x-b)/a]^2}-1\right\}$$

$$\left(a \quad \beta+1\right) \qquad h_\infty+\alpha a \qquad \left[2a(p_0-p_\infty) \quad a\right]$$

Problema 16

1. velocidad en la ranura (U_L): por continuidad el fluido que ocupa el área barrida por el pistón debe salir por la ranura

$$\cancel{\pi} R^2 U_0 \sim 2\cancel{\pi} R h U_L \longrightarrow \boxed{U_L \sim \frac{R}{h} U_0}$$

criterio para movimiento dominado por viscosidad:

$$[1]\quad \boxed{\frac{\rho h^2/\mu}{t_0} \ll 1} \qquad [2]\quad \frac{\rho U_L h}{\mu}\frac{h}{L} \ll 1 \longrightarrow \boxed{\frac{\rho U_0 R}{\mu}\frac{h}{L} \ll 1}$$

2. campo de velocidades (lo tomo directamente de los apuntes: "El efecto cuña")

$$\boxed{u = \frac{P_\ell}{2\mu} y(h-y) + U_p \frac{h-y}{h}} \qquad P_\ell = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

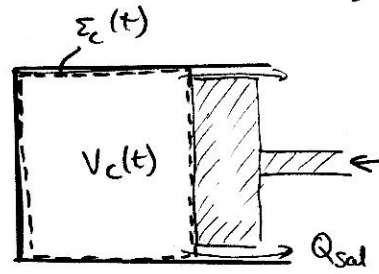
$$\boxed{q = \int_0^h u\, dy = \frac{P_\ell h^3}{12\mu} + \frac{U_p h}{2}}$$ caudal por unidad de longitud $\perp$ al flujo

3. distribución de presiones

Eq. Reynolds: $\frac{\partial q}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial h}{\partial t}} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_\ell h^3}{12\mu} + \frac{U_p h}{2}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \\ P(x=0) = P_0 \\ P(x=L) = P_a \end{cases}$

$h \equiv cte$

$h \equiv cte$, $U_p = U_p(t)$



$$\hookrightarrow P = P_a + \frac{P_0 - P_a}{L}(L-x)$$

Integramos 2 veces e imponemos las c.contorno

$$P_\ell = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_0 - P_a}{L} \equiv cte$$

Para calcular P_0 (o equivalentemente P_ℓ) aplicamos continuidad en forma integral al fluido que queda a la izquierda del pistón

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left[V_c(t)\right]}_{-\Pi R^2 U_p(t)} + \underbrace{\int_{\Sigma_c} \vec v \cdot \vec n\, ds}_{Q_{sal}} = 0$$

El caudal que sale por la rendija Q_{sal} es igual al caudal por unidad de longitud q multiplicado por la longitud de rendija

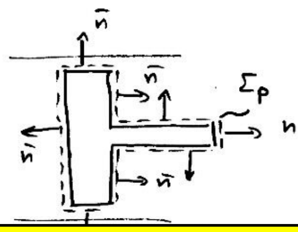
$$Q_{sal} = 2\Pi R \cdot q$$

$$Q_{sal} = \cancel{\pi} R^2 U_p(t) = 2\cancel{\pi} R\left(\frac{P_0(t) - P_a}{L}\frac{h^3}{12\mu} + \frac{U_p(t) h}{2}\right)$$

$h \ll R$

$$\boxed{P_0(t) - P_a = \frac{12\mu L}{h^3}\left(\frac{R U_p(t)}{2} - \frac{U_p(t) h}{2}\right) = \frac{12\mu L}{h^3}\left(\frac{R}{2} - \frac{h}{2}\right) U_p(t) \simeq \frac{6\mu L R}{h^3} U_p(t)}$$

4. $F_{fluido\to piston,x} = \left[-\int_{\Sigma_p} (P - P_a)\,\bar n\, d\sigma + \int_{\Sigma_p} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \bar n\, d\sigma\right] \cdot \bar e_x$



$$= \left[-(P_0 - P_a)(-\bar e_x)\,\Pi (R-h)^2 - \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|\, 2\Pi (R-h) \ldots \bar e_x\right] \cdot \bar e_x$$

$h \ll R$ $\ldots U_p(t) + 2\Pi R \ldots \frac{}{h^2} U_p(t) \ldots \left(\frac{}{h} \ldots\right) \ldots \frac{}{h^2} U_p(t)$

$$\boxed{F_x\big|_{fluido\to piston,x} = -\Pi R^2 \frac{6\mu L R}{h^3} U_p(t)\,\vec e_x}$$ coincide con la fuerza para mover el pistón

Problema 17

1. Flujo casi-unidireccional (esbelto) : $\dfrac{b(x)}{L} \ll 1$ [1]

Flujo dominado por la viscosidad : $\dfrac{\rho U_L b(x)}{\mu}\dfrac{b(x)}{L} \ll 1$ [2]

Pero tanto U_L como $b(x)$ son incógnitas del problema que deben expresarse en función de los datos: ρ, μ, g, a, L, Q estimando órdenes de magnitud:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \end{array}\right\} \rightarrow \underline{p = p(x) = p_a \equiv cte}$$ (evaluamos $p(x)$ en $r = b(x)$ sup. libre)

$$0 = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \rho g$$

$$\sim \mu \frac{U_L}{(b-a)^2} \sim \rho g \longrightarrow U_L \sim \frac{\rho g}{\mu}(b-a)^2 \quad [3]$$

Por otro lado $Q \sim \pi(b^2-a^2)U_L \sim (b^2-a^2)\dfrac{\rho g}{\mu}(b-a)^2 = (b-a)^3(b+a)\dfrac{\rho g}{\mu}$

de donde resulta $(b-a)^3(b+a) \sim \dfrac{Q\mu}{\rho g}$ [4]

Se deben cumplir las condiciones [1] y [2] con U_L dado por [3] y con b dado en función de Q por [4]

2. Como vimos más arriba $p = p_a \equiv cte$ en todo el campo fluido y el campo de velocidades vendrá dado por el problema:

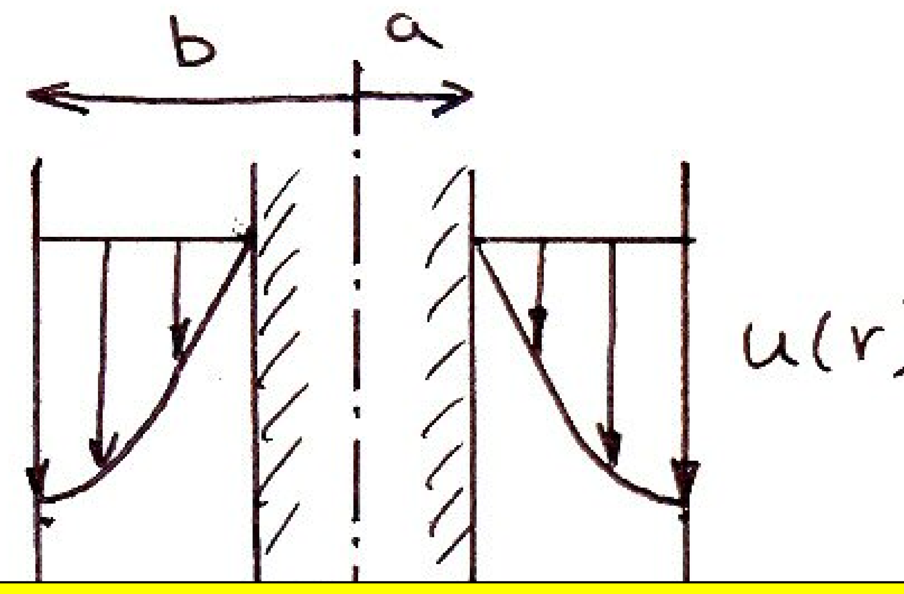
$$0 = \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) + \rho g \qquad r = a:\ u = 0 \qquad r = b:\ \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$ (esfuerzo nulo)

↓ integrando 2 veces

$$u = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{r^2}{4} + A\log r + B \xrightarrow{c.c.} \left| \begin{array}{l} A = \dfrac{\rho g}{\mu}\dfrac{b^2}{2} \\ B = \dfrac{\rho g}{\mu}\dfrac{a^2 - 2b^2\log a}{4} \end{array}\right.$$

↓

$$u = \frac{\rho g}{4\mu}\left[2b^2\log\frac{r}{a} - r^2 + a^2\right] \quad [5]$$



3.

4. $\left.\dfrac{du}{\cdot}\right| = \dfrac{\rho g}{\cdot}\, r\left(\dfrac{b^2}{\cdot} - 1\right)\Big|\Big| = \dfrac{\rho g}{\cdot}\, a\left(\dfrac{b^2}{\cdot} - 1\right)$

5. $$Q = \int_{a(x)} 2\pi r u(r)\,dr = \frac{\pi\rho g a(x)}{2\mu}\left(\beta^4\log\beta - \frac{3\beta^4}{4} + \beta^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \text{con } \beta = \frac{b(x)}{a(x)} \quad [7]$$

↑ [5]

Problema 18

1.- y 2.- Ambos apartados se hacen más rápidamente juntos.

Si $h \ll R$, $r \simeq R$. Despreciando términos $\mathcal{O}(h/R)$:

$$\underbrace{\rho\left(\frac{u}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u^2}{R}\right)}_{\rho \frac{U_c^2}{R}} = \underbrace{-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial \theta}}_{\frac{\rho g (H+R)}{R}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial y^2}}_{\mu \frac{U_c}{h^2}}$$

La U_c se estima igualando gradiente de presión motriz y término viscoso:

$$U_c \sim \frac{\rho g (H+R)}{R}\frac{h^2}{\mu} \underset{R \sim H}{\sim} \frac{\rho g h^2}{\mu} \sim \frac{g h^2}{\nu}$$

Lubricación: términos convectivos despreciables:

$$\frac{\rho \frac{U_c^2}{R}}{\mu \frac{U_c}{h^2}} \ll 1 \Rightarrow \overbrace{\boxed{\frac{\rho U_c h}{\mu}}}^{Re} \cdot \frac{h}{R} = \frac{g h^3}{\nu^2}\cdot\frac{h}{R} \ll 1 \qquad \text{(Aptdo. 1)}$$

Cerca de $\theta = 0$, los términos convectivos son del orden: $\rho \frac{U_c^2}{\ell}$, con $\ell \ll R$

$$\frac{\rho \frac{U_c^2}{\ell}}{\mu \frac{U_c}{h^2}} = \frac{U_c h^2}{\nu \, \ell} \sim 1 \Rightarrow \ell \sim \frac{g h^4}{\nu^2}. \quad \text{En efecto } \frac{\ell}{R} = Re \cdot \frac{h}{R} \ll 1$$

Se tiene entonces: $\theta_0 = \frac{\ell}{R} \sim \frac{g h^3}{\nu^2}$ (Aptdo. 2)

(Nótese que, estrictamente hablando, esta estimación sólo es válida si $Re \gtrsim 1$. Si $Re \ll 1$, entonces como poco $\ell \sim h$, luego $\theta_0 \sim \frac{h}{R}$.)

3.- En coordenadas cilíndricas, $g_\theta = R$, $g_x = 1$: (x coordenada según el eje, no se usa aquí)

13/04/10

5.- Finalmente:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{12\mu R}{h^3} q \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\pi/2} (\,\cdot\,)\, d\theta \Rightarrow P(\pi/2) - P(\theta_0) = -\frac{12\mu R}{h^3} q \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)$$

$$\cancel{P_a} - \cancel{P_a} - \rho g (H+R) = -\frac{12\mu R}{h^3} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{g h^3 (H+R)}{12 \nu R \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)}}$$

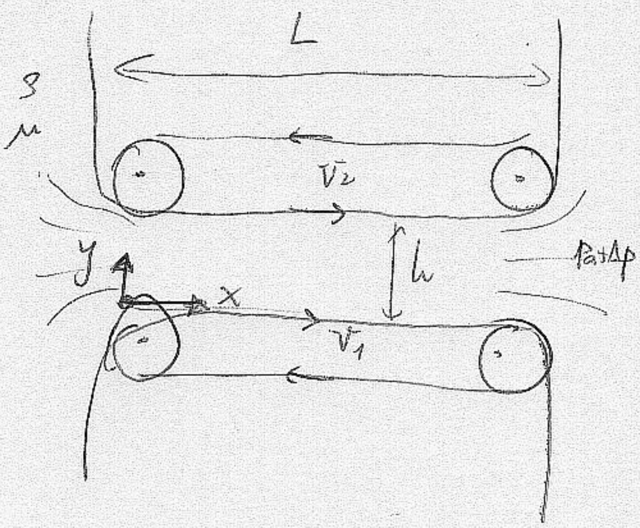
NOTA: Llegados aquí, también se puede hacer $\theta_0 \ll \frac{\pi}{2}$ y obtener

$$\boxed{q = \frac{g h^3}{6 \pi \nu} \left(1 + \frac{H}{R}\right)}$$

Problema 20

① Para que domine la viscosidad,

$$\frac{\rho u_c h^2}{\mu L} << 1$$, donde u_c es la velocidad característica en el canal.



La sobrepresión Δp en $x=L$ tiene asociada una velocidad característica $u_{c\Delta p}$ dada por el balance $\frac{\Delta p}{L} \sim \mu \frac{u_{c\Delta p}}{h^2} \Rightarrow u_{c\Delta p} \sim \frac{h^2 \Delta p}{\mu L}$.

Si consideramos que $V_1 \sim V_2 \sim V$ (o bien sólo una de ellas si la otra es cero o mucho menor), hay dos posibilidades dependiendo del valor del parámetro

$$\lambda = \frac{h^2 \Delta p}{\mu L V}$$

(a) $\lambda >> 1$ ($u_{c\Delta p} >> V$): CRITERIO $\frac{\rho \Delta p h^4}{\mu^2 L^2} << 1$

(b) $\lambda << 1$ ($u_{c\Delta p} << V$): CRITERIO $\frac{\rho V h^2}{\mu L} << 1$

(SI $\lambda \sim O(1)$ AMBOS SON EQUIVALENTES)

Para que el sistema bombee en la dirección de las cintas, $\lambda \lesssim O(1)$, de modo que el criterio relevante en este caso es el (b)

---

② $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{P_\ell}{\mu} \Rightarrow u = -\frac{P_\ell y^2}{2\mu} + Ay + B$

$y=0: u = V_1 \Rightarrow B = V_1$

$y=h: u = V_2 \Rightarrow V_2 = -\frac{P_\ell h^2}{2\mu} + Ah + V_1$

Luego se tiene que $\boxed{u(y) = V_1 + \frac{(V_2 - V_1)y}{h} + \frac{P_\ell}{2\mu} y(h-y)}$ $\Longrightarrow A = \frac{V_2 - V_1}{h} + \frac{P_\ell h}{2\mu}$

El caudal p.u. de envergadura es: $q = \int_0^h u(y)\,dy \Rightarrow \boxed{q = \frac{P_\ell h^3}{12\mu} + \frac{(V_1+V_2)h}{2}}$

---

③ $\frac{\partial q}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial h}{\partial t}} = 0 \Rightarrow q = \text{CONSTANTE} \xrightarrow{h=\text{CTE.}} \frac{\partial P_\ell}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ $\begin{cases} x=0: p = p_a \\ x=L: p = p_a + \Delta p \end{cases}$

$F_{1,Fs} = -\int_0^L p(x)\,\vec{e}_y\,dx + \int_0^L \bar{\bar{\tau}}' \cdot \vec{e}_y\,dx$; $\bar{\bar{\tau}}' \cdot \vec{e}_y = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_x$

Como sólo nos importan las fuerzas en dirección x, queda:

$$\vec{F}_{1,FS} = \mu \int_0^L \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} dx\, \vec{e}_x \quad y \quad \vec{F}_{2,FS} = -\mu \int_0^L \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=h} dx\, \vec{e}_x$$

Como $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V_2 - V_1}{h} - \frac{\Delta p}{2\mu L}(h - 2y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{V_2 - V_1}{h} - \frac{\Delta p h}{2\mu L}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=h} = \frac{V_2 - V_1}{h} + \frac{\Delta p h}{2\mu L}$$

Luego

$$\vec{F}_{1,FS} = \left[\frac{\mu(V_2 - V_1)}{h} - \frac{\Delta p h}{2L}\right] L\, \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{2,FS} = \left[\frac{\mu(V_1 - V_2)}{h} - \frac{\Delta p h}{2L}\right] L\, \vec{e}_x$$

Las fuerzas pedidas son las que hemos de aplicar a las cintas para que se muevan a velocidad constante, luego son las reacciones de las que el fluido ejerce sobre las cintas:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -\vec{F}_{1,FS} = \left[\dfrac{\Delta p h}{2} - \dfrac{\mu(V_2 - V_1)L}{h}\right] \vec{e}_x \\[2ex] \vec{F}_2 = -\vec{F}_{2,FS} = \left[\dfrac{\Delta p h}{2} + \dfrac{\mu(V_2 - V_1)L}{h}\right] \vec{e}_x \end{cases}$$

Mientras que las potencias invertidas en mover las cintas son:

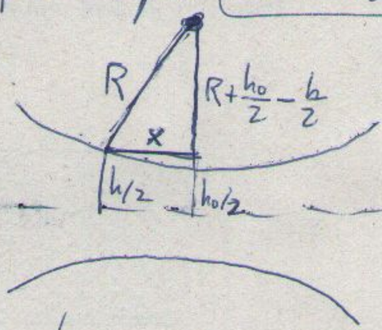
$$\begin{cases} \dot{W}_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{V}_1 = \dfrac{\Delta p h V_1}{2} - \dfrac{\mu V_1 (V_2 - V_1)L}{h} \\[2ex] \dot{W}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_2 = \dfrac{\Delta p h V_2}{2} + \dfrac{\mu V_2 (V_2 - V_1)L}{h} \end{cases}$$

Siendo la potencia necesaria para accionar la bomba:

$$\dot{W} = \dot{W}_1 + \dot{W}_2 \Rightarrow \boxed{\dot{W} = \frac{(V_1 + V_2) h \Delta p}{2} + \frac{(V_2 - V_1)^2 \mu L}{h}}$$

$$\eta = \frac{1 - \lambda/6}{1 + 2/\lambda} \Rightarrow \eta = \frac{\lambda(1 - \lambda/6)}{2 + \lambda} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{(2+\lambda)(1 - \lambda/3) - \lambda(1 - \lambda/6)}{(2+\lambda)^2} \Rightarrow$$

(1) VISCOSIDAD DOMINANTE: $\frac{\rho v_c h_0}{\mu}\frac{h_0}{L_c} \ll 1$ donde hemos usado que $h_c \sim h_0$ y L_c es la longitud característica en dirección x. Para determinar v_c usamos el balance $\frac{\Delta_L p}{L_c} \sim \mu \frac{v_c}{h_0^2} \Rightarrow v_c \sim \frac{(p_1-p_2)h_0^2}{\mu L_c}$ donde se ha usado que $\Delta_L p \sim (p_1-p_2)$. Falta determinar L_c, que sale de la geometría de la ranura en la región donde las velocidades y diferencias de presión son importantes, esto es, la región que cumple $\boxed{h \sim h_0}$. Usando el triángulo rectángulo de la figura, se tiene



$R^2 = x^2 + \left(R+\frac{h_0-h}{2}\right)^2 \Rightarrow h(x) \simeq h_0 + \frac{x^2}{R}$ donde se ha usado que h y h_0 son $\ll R$. Por tanto, L_c viene dado por $\frac{L_c^2}{R} \sim h_0 \Rightarrow \boxed{L_c \sim \sqrt{R h_0}}$ y se tiene

$\boxed{v_c \sim \frac{(p_1-p_2)h_0^{3/2}}{\mu R^{1/2}}}$ y el criterio de viscosidad dominante $\boxed{\frac{\rho(p_1-p_2)h_0^3}{\mu^2 R} \ll 1}$

(2) $Q \sim qE \sim u_c h_0 E \sim \frac{(p_1-p_2)h_0^{5/2}}{\mu R^{1/2}} E$ donde q es por unidad de anchura

(3) $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\begin{cases} y=0: \frac{\partial u}{\partial y}=0 \ [\Rightarrow \text{O BIEN } y=-\frac{h}{2}: u=0] \\ y=\frac{h}{2}: u=0 \end{cases}$ INTEGRANDO $\Rightarrow \boxed{u = \frac{-1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}$

(4) ~~q~~ $\alpha = x \to g_\alpha = 1$, $\beta = z \to g_\beta = 1$ FLUJO 2D: $q_\beta = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{\partial h}{\partial t}} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial q}{\partial x} = 0}$ $\boxed{q_\alpha = q}$ ESTACIONARIO

$q = \int_{-h/2}^{h/2} u\,dy = 2\int_0^{h/2} u\,dy = -\frac{h^3(x)}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$ = CONSTANTE $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-12\mu q}{h^3} = -\frac{12\mu q}{h_0^3}\left(1+\frac{x^2}{R h_0}\right)^{-3} \Rightarrow p(x) - p_1 = \frac{-12\mu q}{h_0^3}\int^x \left(1+\frac{x^2}{R h_0}\right)^{-3} dx$

(5) El caudal sale de imponer que $p(\xi) \to p_2$ cuando $\xi \to \infty \Rightarrow$

Problema 22

Nota: $\int \mathrm{sen}^{-1}\theta \cos^{-3}\theta\, d\theta = \boxed{\frac{1}{2}\cos^{-2}\theta + \ln(\tan\theta) = I(\theta)}$

1)

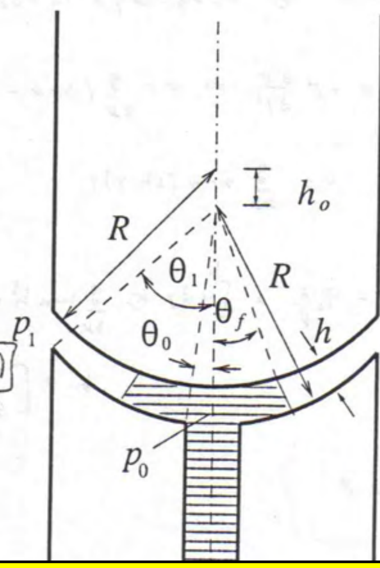
$$q_\theta = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(g_\phi\, q_\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h^3 \sin\theta}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\cos^3\theta \sin\theta \frac{\partial P}{\partial\theta} = -A$$

$$P_0 - P = A\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos^3\theta\sin\theta} = A\left[I(\theta) - I(\theta_0)\right]$$

$$A = \frac{P_0 - P_1}{I(\theta_f) - I(\theta_0)}$$



$$\boxed{h = h_0 \cos\theta}$$

MOV. DOMINADO POR VISCOSIDAD SI

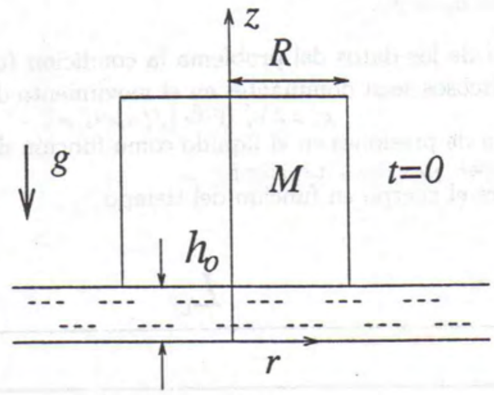
$$\frac{\rho U_c h_0}{\mu}\frac{h_0}{R} \sim \boxed{\frac{\rho (P_0 - P_1) h_0^4}{\mu^2 R^2} \ll 1}$$ (1)

$P - P_1$ $\quad I(\theta_f) - I(\theta)$ (1)

$$\int_{\theta_0}\left[I(\theta_f) - I(\theta_0)\right]\sin\theta_f\cos\theta_f\, d\theta_f = \frac{h_0^2}{12\mu R^2}(P_0 - P_1)\,t$$ (1)

$\pi R^2 \sin^2\theta_0\, P_0 + \pi R^2\left[\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_0\right] P_1$ (2)

Problema 23



1) $$M\frac{d^2h}{dt^2} = -Mg + F_p$$

$\downarrow Mg$; p

$t_o \sim \sqrt{h_o/g}$, $u_c = R/\sqrt{h_o/g}$ — LAS PARTICULAS FLUIDAS DEBEN RECORRER UNA DISTANCIA R EN t_o

$\rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{O TB} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rq) + \frac{dh}{dt} = 0 \\ \frac{u_c h_o}{R} \sim \frac{h_o}{t_o} \end{array} \right)$, SI DOMINA VISCOSIDAD

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta P \sim \frac{\mu R^2}{\sqrt{h_o/g}\, h_o^2} \sim \frac{\mu R^2}{h_o^{5/2}}}$$

CRITERIO PARA QUE DOMINE VISCOSIDAD

$$\underbrace{\rho\frac{du}{dt}}_{\rho\frac{u_c}{t_o}} + \underbrace{\rho u\frac{du}{dr} + \rho v\frac{du}{dz}}_{\rho\frac{u_c^2}{R}} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\frac{\mu u_c}{h_o^2}} + \text{TERMINOS PEQUEÑOS} \rightarrow \boxed{\frac{h_o^{3/2} g^{1/2}}{\nu} \ll 1}$$

2) $$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial r}\, y(y-h) \rightarrow q = \int_0^h u\,dz = \frac{-h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(qr) + \frac{dh}{dt} = 0$$

INTEGRANDO SE OBTIENE $$\boxed{P - P_a = \frac{3\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}(r^2 - R^2)}$$

3) $$F_p = \int^R (p-p_a)$$