

Conjuntos y Números

LISTA 4

CURSO 2019-20

- 1) Fijado un entero positivo n , definimos $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ y consideramos la relación sobre \mathbb{Z} dada por:

$$m\mathcal{R}k \iff m - k \in n\mathbb{Z}.$$

- a) Demostrar que es una relación de equivalencia.
b) Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente. Al conjunto cociente de esta relación lo denotamos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- 2) Considerar la relación definida sobre el plano \mathbb{R}^2 por:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff xy = x'y'.$$

Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

- 3) Sea $X = \cup_{i \in I} A_i$ una **partición** de X ; es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Demostrar que la relación

$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo } A_i,$$

es una relación de equivalencia X . Recíprocamente, probar que dada una relación de equivalencia sobre un conjunto X , las clases de equivalencia definen una partición de X .

En definitiva, podemos pensar siempre una relación de equivalencia como una partición.

- 4) Si $f : X \rightarrow V$ es una **función**, probar que

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

define una relación de equivalencia en X , y que cada una de sus clases de equivalencia es la imagen inversa de un $z \in V$. Establecer una biyección entre el conjunto cociente X/\mathcal{R} e $Im(f)$.

- 5) Es habitual y más cómodo utilizar la notación \mathbb{Z}_n para referirse a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.

- a) $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(\bar{m}) = m$ (donde $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$ denota la clase del entero m).
b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $g(m) = \bar{m}$.
c) $G : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $G((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{m + k}$.
d) $H : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $H((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{mk}$.

- 6) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación

$$(n, m)\mathcal{R}(n', m') \iff \max\{n, m\} = \max\{n', m'\}.$$

- a) Demuestra que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
b) Describe la clase de equivalencia del elemento $(2, 2)$.
c) Describe el conjunto cociente.
d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?
- 7) Sea F el conjunto de todas las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . En F se define la siguiente relación:

$$f\mathcal{R}g \iff \text{existe } r \in \mathbb{R}, r > 0 \text{ tal que } f(x) = g(x) \text{ para } |x| < r.$$

Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia sobre F .

8) Considerar las relaciones en \mathbb{Z} definidas por:

$$\begin{aligned}m\mathcal{R}_1n &\iff 5|(m+2n) \\ m\mathcal{R}_2n &\iff 4|(9m+3n)\end{aligned}$$

donde $k|\ell$ significa “ k divide a ℓ ”.

- Decidir si \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son relaciones de equivalencia.
- En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

9) Sea B un subconjunto finito de un conjunto A . En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación:

$$X\mathcal{R}Y \iff \text{Card}(X \cap B) = \text{Card}(Y \cap B).$$

- Demstrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente?

10) En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ se define la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y \iff \min X = \min Y$.

- Demstrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
- ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

11) Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y A equipotente a C (i.e. $\text{Card}(A) = \text{Card}(C)$). Utilizando los resultados del curso, demostrar que los tres conjuntos son equipotentes (i.e. $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = \text{Card}(C)$).

12) Definimos la siguiente relación en \mathbb{R} : $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Es numerable el conjunto cociente?

13) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.

14) Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \dots, a_n \in A$ son elementos de A , el conjunto $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ es equipotente a A .
(Sugerencia: quitarles a A y a $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ subconjuntos numerables apropiados.)

15) Determinar el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
- $(-\pi/2, \pi/2)$ (Usar una función trigonométrica para establecer una biyección con \mathbb{R})
- El intervalo $I = (0, 1)$ y más generalmente el intervalo (a, b)
- $I \times I$ (Usar la escritura decimal para inyectar $I \times I$ en I)
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- El conjunto \mathbb{C} de los números complejos.
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Usar la escritura decimal para comparar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e I)
- $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (Usar parte d))
- Los intervalos $[a, b]$ y (a, b) en \mathbb{R} (usar el ejercicio 14).
- El conjunto de todas las raíces reales (rationales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama “conjunto de los números algebraicos”).
- El conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} que tienen dos elementos.
- El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.