

## TEORÍA DE GALOIS

Anexo Hoja 3. El Teorema del Elemento Primitivo.

**Teorema del Elemento Primitivo.** *Sea  $E/K$  una extensión de cuerpos finita y separable. Entonces la extensión  $E/K$  es simple, i.e., existe  $\Theta \in E$  tal que  $E = K(\Theta)$ .*

1. El objetivo de este ejercicio es dar una demostración de este teorema cuando  $K$  es infinito (el caso en el que  $K$  es finito lo veremos en clase).

a) Demuestra que basta probar el teorema en el caso en el que  $E = K(\alpha, \beta)$  con  $\alpha, \beta \in E$  separables sobre  $K$ .

b) Sean  $p_\alpha(x), p_\beta(x) \in K[x]$  los polinomios mínimos de  $\alpha$  y  $\beta$  sobre  $K$  (respectivamente). Sea  $L$  el cuerpo de descomposición de  $p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$  sobre  $K$ . Entonces en  $L[x]$ ,

$$p_\alpha(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n), \quad p_\beta(x) = (x - b_1) \cdots (x - b_m) \quad (1)$$

con  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in L$  y  $a_i \neq a_j$  para  $i \neq j$ ;  $b_i \neq b_j$  para  $i \neq j$ . Supongamos que  $a_1 = \alpha$  y  $b_1 = \beta$ . Demuestra que existe un elemento  $c \in K$  tal que:

$$c \neq \frac{a_i - \alpha}{\beta - b_j} \quad (2)$$

para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 2, \dots, m$ .

c) Definimos

$$\Theta := \alpha + c\beta. \quad (3)$$

Prueba que para concluir la demostración del teorema basta ver que  $\beta \in K(\Theta)$ .

d) Demuestra que  $\beta$  es una raíz común de los polinomios:

$$p_\alpha(\Theta - cx), p_\beta(x) \in K(\Theta)[x]. \quad (4)$$

e) Definimos:

$$d(x) := \text{m.c.d}_{K(\Theta)[x]}(p_\alpha(\Theta - cx), p_\beta(x)) \in K(\Theta)[x]. \quad (5)$$

Usando el apartado anterior demuestra que el grado de  $d(x)$  es mayor o igual que 1. Usando la factorización en (1) y la definición de  $c$  en (2) concluye que el grado de  $d(x)$  es exactamente uno.

f) Deduce del apartado anterior que  $\beta \in K(\Theta)$ .

2. Revisa la demostración del ejercicio 1. Responde de manera razonada a las siguientes preguntas:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

3. Encuentra elementos primitivos en el caso de las siguientes extensiones:

a)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$ ;

b)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$ ;

c)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(i)$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue background that resembles a stylized map of the city of Cartagena. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70