HOJA DE EJERCICIOS 1
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial, y sea $\|\cdot\|$ su norma asociada. Prueba las dos identidades siguientes y da una interpretación:

a) Identidad del paralelogramo: $2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$.

b) Identidad de polarización: $4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$.

Problema 2. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a>0$ y $ac>b^2$. Se define $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ como

$$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}.$$

Prueba que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

Problema 3. Demuestra que en un espacio normado $(E,\|\cdot\|)$ se tiene que para cualesquiera $u,v\in E$,

$$\big|\,\|u\|-\|v\|\,\big|\leq\|u-v\|\,.$$

Problema 4. Demuestra que las siguientes funciones son normas en $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y)\|' \;=\; \max\left(2|x|,\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad,\quad \|(x,y)\|'' \;=\; \max\left(|x-y|,|y|\right)\,.$$

Haz un dibujo de la bola unidad de cada una de ellas.
Comprueba que la desigualdad triangular no es estricta (o sea, es una igualdad) para la norma $\|\cdot\|'$ y el par de vectores $v=(1,0), w=(1,1)$, a pesar de que son vectores linealmente independientes. Relaciona esto con la forma de la bola unidad de $\|\cdot\|'$.

Problema 5. Sean $1\leq p<q<\infty$. Demuestra que si $\|\omega\|_p=1$ entonces $\|\omega\|_q\leq 1$. Deduce que, fijado un vector v, el número $\|v\|_p$ es función decreciente de p.
Dado un vector $u\in\mathbb{R}^n$, demuestra que:

$$\lim_{p\to\infty}\|u\|_p=\|u\|_\infty.$$

Indicación: Pruébalo primero para $\|u\|_\infty=1$, distingue entre las componentes u_i con $|u_i|=1$ y $|u_i|<1$.

Problema 6. De las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, decide cuáles son homogéneas o positivamente homogéneas. Indica, en su caso, el grado:

a) $f(x,y,z)=x^2-3xy+\sqrt{y^4+z^4}$.

b) $f(x)=3$.

c) $f(x,y)=-x+y-2$.

d) $f(x,y,z)=\dfrac{xyz-x^2y}{x^2+y^2+2z^2}$ para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$; $f(0,0,0)=0$.

e) $f(x,y)=-x^3\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}$ para $x\neq 0$; $f(0,y)=0$.

f) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}$.

g) $f(x,y)=\sqrt{|x|^3+|y|^3}$.

Problema 8. Sea X un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y, z \in X$:

a) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

b) $d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y)$.

Demuestra que d es una distancia en X.

Problema 9. En un espacio métrico (X,d) se define, para $x \in X$ y $A \subset X$, $A \neq \varnothing$,

$$\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Demuestra que para todos $x, y \in X$,

$$|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leq d(x,y).$$

Problema 10. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} ,$$

halla su norma, como operadores lineales, en los siguientes casos:

a) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$,

b) $B : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$,

c) $B : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

Problema 11. Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y un número $1 < p < \infty$, halla la norma de C, como operador ineal, en los siguientes casos:

a) $C : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$,

b) $C : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$.

Indicación: en el caso b) considera sólo vectores $v = (x,y)$ con $x, y \geq 0$ y $x + y = 1$ ¿por qué es esto suficiente?

Problema 12. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$, demuestra los enunciados siguientes:

a) La norma de A, considerada como operador lineal $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$, es

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Es decir, la norma de A es el máximo de las normas-1 de las columnas de A.

b) La norma de A, considerada como operador lineal $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$, es

$$\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Es decir, la norma de A es el máximo de las normas-1 de las filas de A.