

Temas 3: Límites y continuidad de funciones reales de una variable

1. Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x-3}$$

$$(Sol: \frac{1}{2\sqrt{3}})$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+4}}{x^2+4x+3}$$

$$(Sol: -\frac{1}{2\sqrt{3}})$$

$$(c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+5h} - \sqrt{5x}}{h}$$

$$(Sol: \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}})$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-7x+6}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+4}}$$

$$(Sol: -10\sqrt{5})$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3+3x+1)^2(x^2-5)^3}{(3x^4+5)(x^2-5)^4}$$

$$(Sol: \frac{4}{3})$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^6 + 5x} + x^3)$$

$$(Sol: 0)$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+7}{2x-6} \right)^{\sqrt{4x^2+x-3}}$$

$$(Sol: \frac{1}{e^{13}})$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^{-x}-3^{-x}}{4^{-x}+3^{-x}}$$

$$(Sol: 1)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x-7^x}{e^x+7^x}$$

$$(Sol: -1)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sqrt{2x-3} + 7}{x^3 \sqrt[3]{x^3+5}}$$

$$(Sol: \infty)$$

2. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \right|^3 + x^8 - 1 \right)$$

$$(Sol: \frac{1}{27})$$

3. Calcular los límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

(Sol: No existe)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(Sol: 0)

4. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^3+8}}\right)$

(Sol: ∞)

(b) $\lim_{x \rightarrow 7} \log\left(\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{7}}{x-7}\right)$

(Sol: $-\frac{\log(7)}{2}$)

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x} - \sqrt{x}}$

(Sol: 1)

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x} + \sqrt{4x} - \sqrt{9x}}$

(Sol: $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

5. Calcular:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-7x+6}\right)$

(Sol: 0)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left((1+x^2)^{-\frac{7}{x^3}}\right)$

(Sol: 1)

6. Hallar el valor o conjunto de valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + \lambda}$$

sea continua en \mathbb{R} .

(Sol: $\lambda > 1$)

7. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \cos\left(\frac{e^x}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(Sol: Continua en \mathbb{R})

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \arctan(x), & x < 0 \\ \cos(3x^2 - 5x) + 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

(Sol: Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$(c) g(x) = \begin{cases} -|\sin(x)| - 4, & x < \pi \\ |\cos(x)| - 5, & x \geq \pi \end{cases}$$

(Sol: Continua en \mathbb{R})

$$(d) h(x) = \begin{cases} \arctan(x), & x \leq 0 \\ \cos(\pi x), & 0 < x < 1 \\ |x^2 - 5x + 4|, & x \geq 1 \end{cases}$$

(Sol: Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$)