

14 Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal que cumple

$$f(1,0,0) = (1,1), f(0,1,0) = (2,-1), f(0,0,1) = (0,1)$$

Consideremos los e.v. \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2 y en ellos las siguientes bases :

$$\mathbf{D}_3 = \{(1,1,1), (1,1,0), (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\}, \mathbf{D}_2 = \{(1,1), (1,0)\}$$

$$E_3 = \{(1,2,-1), (0,1,1), (-2,0,3)\}, E_2 = \{(1,2), (1,3)\}$$

- i) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases canónicas.
- ii) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases D_3 y D_2 .
- iii) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases E_3 y E_2 .

$$f = i_{\mathbb{R}^2} \circ f \circ i_{\mathbb{R}^3} : \underbrace{\mathbb{R}^3 \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^2}} \mathbb{R}^2}_{\substack{P \quad A \quad Q^{-1} \\ B = Q^{-1}AP}}$$

i) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases canónicas.

La expresión matricial de f respecto a las bases canónicas

$$Y = AX; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{C_{\mathbb{R}^3}}$$

La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es

$$A = M_f(C_{\mathbb{R}^3}, C_{\mathbb{R}^2}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La aplicación } f: \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (C_{\mathbb{R}^3}) & & (C_{\mathbb{R}^2}) \end{matrix}$$

tiene por ecuaciones respecto a las base canónicas a: $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{pues } f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 f(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + x_2 f(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) + x_3 f(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \\ &= x_1(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + x_2(\mathbf{2}, -\mathbf{1}) + x_3(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \\ &= \left(\underbrace{x_1 + 2x_2}_{y_1}, \underbrace{x_1 - x_2 + x_3}_{y_2} \right) \end{aligned}$$

y deserrallando el producto

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

ii) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases D_3 y D_2 .

$$D_3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}, D_2 = \{(1, 1), (1, 0)\}$$

Si denotamos a $B = M_f(D_3, D_2)$ y a $A = M_f(C_{R^3}, C_{R^2})$

$$f = i_{R^2} \circ f \circ i_{R^3} : \underbrace{\mathbb{R}^3}_{(D_3)} \xrightarrow{i_{R^3}} \underbrace{\mathbb{R}^3}_{(C_{R^3})} \xrightarrow{f} \underbrace{\mathbb{R}^2}_{(C_{R^2})} \xrightarrow{i_{R^2}} \underbrace{\mathbb{R}^2}_{(D_2)}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_P \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_A \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{Q^{-1}}$$

$$\boxed{B = Q^{-1}AP} \text{ } A \text{ y } B \text{ son matrices equivalentes}$$

Donde $P = M_{i_{R^3}}(D_3, C_{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$Q = M_{i_{R^2}}(D_2, C_{R^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M_{i_{R^3}}(C_{R^2}, D_2)$

Se verifica $B = Q^{-1}AP$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{Q^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_P$$

Se dice que A y B son **matrices equivalentes**

Las ecuaciones matriciales de f respecto a las bases D_3 y D_2 son

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}_{D_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{D_3} \text{ donde } B = M_f(D_3, D_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

y (x'_1, x'_2, x'_3) son las coordenadas de un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ en la base D_3

e (y'_1, y'_2) son las de un vector $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$ en la base D_2



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

iii) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases D'_3 y D'_2 .

$$E_3 = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (-2, 0, 3)\}, E_2 = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

Si denotamos a $B' = M_f(E_3, E_2)$ y a $A = M_f(C_{R^3}, C_{R^2})$

$$f = i_{R^2} \circ f \circ i_{R^3} \quad : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{i_{R^3}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{i_{R^2}} & \mathbb{R}^2 \\ (E_3) & & (C_{R^3}) & & (C_{R^2}) & & (E_2) \end{matrix}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad P \quad \quad \quad A \quad \quad \quad Q^{-1} \quad \quad \quad}_{B' = Q^{-1}AP}$$

A y B' son matrices equivalentes

Donde ahora

$$P = M_{i_{R^3}}(E_3, C_{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$Q = M_{i_{R^2}}(E_2, C_{R^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = M_{i_{R^2}}(C_{R^2}, E_2)$$

Se verifica $B' = Q^{-1}AP$

$$\begin{pmatrix} 17 & 6 & -7 \\ -12 & -4 & 5 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}_{Q^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_P$$

Se dice que A y B' son matrices equivalentes

Las ecuaciones matriciales de f respecto a las bases E_3 y E_2 son

$$\begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \end{pmatrix}_{E_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17 & 6 & -7 \\ -12 & -4 & 5 \end{pmatrix}}_{M_f(E_3, E_2) = B'} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}_{E_3} \quad \text{donde } B' = M_f(E_3, E_2) = \begin{pmatrix} 17 & 6 & -7 \\ -12 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

y (x''_1, x''_2, x''_3) son las coordenadas de un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ en la base D'_3
e (y''_1, y''_2) las de un vector $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$ en la base D'_2

HOJA 3.3

15] Sea el endomorfismo de R^3 definido por las ecuaciones :

$$y_1 = x_1, y_2 = x_1 - x_2 - x_3, y_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

donde (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) son respectivamente las coordenadas de un vector y su transformado mediante f en la base canónica C_{R^3} .

a) Determinar la matriz asociada a f respecto de la base canónica

b) Una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de $\ker f, \text{Im} f$

c) Obtener una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de

c1_ $f(U)$ siendo $U = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

c2_ $f(V)$ siendo $V = L(\{(1, 1, -1), (2, 1, 0)\})$

c3_ $f(W)$ siendo W el s.v. de R^3 determinado por las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 2\alpha, x_2 = \alpha, x_3 = -\alpha$$

d) Determinar la matriz asociada a f respecto de la base $D = \{(2, 1, -1), (1, -2, 0), (-3, 0, 0)\}$

15_a] Hallar las ecuaciones de f respecto de la base canónica.

La aplicación $f: \begin{matrix} R^3 & \xrightarrow{f} & R^3 \\ (B) & & (B) \\ (x_1, x_2, x_3) & & (y_1, y_2, y_3) \end{matrix}$

Tiene por ecuaciones respecto de la base canónica

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

y puede expresarse en la forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

y en expresión matricial $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$M_f(C_{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

15_d Determinar la matriz asociada af respecto de la base

$$D = \{(2, 1, -1), (1, -2, 0), (-3, 0, 0)\}$$

Si denotamos $M_f(D) = B$ y $M_f(C_{R^3}) = A$

$$f = i_{R^3} \circ f \circ i_{R^3} \quad : \underset{(D)}{R^3} \xrightarrow{i_{R^3}} \underset{(C_{R^3})}{R^3} \xrightarrow{f} \underset{(C_{R^3})}{R^3} \xrightarrow{i_{R^3}} \underset{(D)}{R^3}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad P \qquad\qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad P^{-1} \qquad\qquad\qquad}_{B = P^{-1}AP}$$

$A = M_f(C_{R^3})$ y $B = M_f(D)$ son matrices semejantes

Donde, $M_{i_{R^3}}(D, C_{R^3}) = P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$

Se verifica $B = P^{-1}AP$, es decir,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_P$$

Se dice que A y B son matrices semejantes

$M_{i_{R^3}}(D, C_{R^3})$ es la matriz asociada a i_{R^3} respecto de las bases D y C_{R^3}

$P = M_{i_{R^3}}(D, C_{R^3})$ es la matriz del cambio de base C_{R^3} a D



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

15_b $\ker f$ **Núcleo de f**: $\ker f = f^{-1}(\bar{\mathbf{0}}) = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 / f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}\} \subset \mathbb{R}^3$

Ec. implícitas del núcleo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Hermite normal form: ()

o equivalentemente $\begin{cases} \text{Ecuación Ec}_1 & 0 = x_1 \\ \text{Ecuación Ec}_2 & 0 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{Ecuación Ec}_3 & 0 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \approx \begin{cases} 0 = x_1 & \text{Eca}_1 \\ 0 = x_2 + x_3 & \text{Eca}_2 \end{cases}$ Nuevas

pues $\begin{matrix} \text{Ec}_1 \\ \text{Ec}_2 \\ \text{Ec}_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_2 - 2F_1 \end{matrix}]{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Eca}_1 \\ \text{Eca}_2 \\ \text{Eca}_2 \end{matrix}$

Las ecuaciones $\begin{cases} 0 = x_1 \\ 0 = x_2 + x_3 \end{cases}$ son unas **ecuaciones implícitas** del núcleo

Resolviendo el sistema se obtienen las siguientes **ec. paramétricas** del núcleo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = -\alpha \end{cases} \text{ y por tanto: } \ker f = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Como $\dim \ker f = 1$, la aplicación f **no es inyectiva**

$\text{Im} f$ **Imagen de f**: $\text{Im} f = f(\mathbb{R}^3) = \{f(\bar{\mathbf{x}}) / \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3\}$

Las columnas de la matriz $M_f(B, B)$ forman un sistema generador de $\text{Im} f$

Por tanto $\text{Im} f = L(\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}) = L(\{(1,1,0), (0,-1,1), (0,-1,1)\})$

$\{\bar{v}_1 = (1,1,1), \bar{v}_2 = (0,-1,1)\}$ es un **sistema generador** de $\text{Im} f$

Buscamos una base

$$\begin{matrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_2 - 2F_1 \end{matrix}]{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base de $\text{Im} f$ es $B_{\text{Im} f} = \{(1,1,1), (0,-1,1)\}$

O bien, también es base $\text{Im} f$ es $B'_{\text{Im} f} = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

$$\text{Im} f = L(\{(1,1,1), (0,-1,1)\}) = L(\{(1,0,0), (0,1,0)\}) = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Luego unas **ec. paramétricas** de $\text{Im} f$ son $\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \beta \end{cases} \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

15_c Obtener una base , unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de

c1_ $f(U)$ siendo $U = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

c2_ $f(V)$ siendo $V = L(\{(1, 1, -1), (2, 1, 0)\})$

c3_ $f(W)$ siendo W el s.v. de \mathbb{R}^3 determinado por las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 2\alpha, x_2 = \alpha, x_3 = -\alpha$$

d) Determinar la matriz asociada a f respecto de la base $D = \{(2, 1, -1), (1, -2, 0), (-3, 0, 0)\}$

15_c_c1 Obtener una base , unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de

c1_ $f(U)$ siendo $U = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

U $U = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

Las ecuaciones implícitas del s.v. U son

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema se obtienen unas **ecuaciones paramétricas** de U

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 3\alpha \end{cases} \text{ y una base para } U: \mathbf{B}_U = \{(1, 1, 3)\}$$

y podemos expresar $U = L(\{(1, 1, 3)\})$

$f(U)$: $f(U) = \{f(\bar{x}) / \bar{x} \in U\} = L(\{f(1, 1, 3)\}) = L\{(1, -3, 5)\}$

Pues $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Luego unas **ec. paramétricas** de $f(U)$ son $\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = -3\alpha \\ y_3 = 5\alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}$,

y de aquí se obtienen unas **ecuaciones implícitas** del s.v. $f(U) \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} y_2 + 3y_1 = 0 \\ y_3 - 5y_1 = 0 \end{cases}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

15_c_c2 Obtener una base , unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de V

c2 $f(V)$ siendo $V = L(\{(1,1,-1), (2,1,0)\})$

$$V = \{\alpha(1,1,-1) + \beta(2,1,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, \alpha, -\alpha) + (2\beta, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$f(V) : f(V) = \{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in V\} = L(\{f(1,1,-1), f(2,1,0)\})$$

Teniendo en cuenta que

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(V) = L(\{f(1,1,-1), f(2,1,0)\}) = L(\{(1,1,1), (2,1,3)\})$$

Luego unas **ecuaciones paramétricas** de $f(V)$ son

$$\begin{cases} y_1 = \alpha + 2\beta \\ y_2 = \alpha + \beta \\ y_3 = \alpha + 3\beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad ,$$

Observamos que

$$\begin{cases} y_1 = \alpha + 2\beta \\ y_2 = \alpha + \beta \\ y_3 = \alpha + 3\beta \end{cases} \approx \begin{cases} y_1 = \alpha + 2\beta \\ y_2 - y_1 = -\beta \\ y_3 - y_1 = \beta \end{cases} \approx \begin{cases} y_1 = \alpha + 2\beta \\ y_2 - y_1 = -\beta \\ (y_3 - y_1) + (y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

y de aqui se obtienen unas **ecuaciones implícitas** del s.v. $f(V) \subset \mathbb{R}^3$

$$2y_1 - y_2 - y_3 = 0$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

15_c_c3 Obtener una base , unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de

c3 $f(W)$ siendo W el s.v. de R^3 determinado por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} y_1 = 2\alpha \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = -\alpha \end{cases}$$

$W = \{(2\alpha, \alpha, -\alpha) \mid \alpha \in R\} = L(\{(2, 1, -1)\})$

Una base del s.v W es . $B_W = \{(2, 1, -1)\}$

y de aqui se obtienen unas **ecuaciones implícitas** del s.v. W

$$\begin{cases} 2y_2 - y_1 = 0 \\ 2y_3 + y_1 = 0 \end{cases}$$

$f(W) : f(W) = \{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in W\} = L(\{f(2, 1, -1)\})$

Teniendo en cuenta que

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$f(W) = L(\{f(2, 1, -1)\}) = L(\{(2, 2, 2)\}) = L(\{(1, 1, 1)\})$

Luego unas **ecuaciones paramétricas** de $f(W)$ son

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in R ,$$

Observamos que

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = \alpha \end{cases} \approx \begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 - y_1 = 0 \\ y_3 - y_1 = 0 \end{cases}$$

y de aqui se obtienen unas **ecuaciones implícitas** del s.v. $f(W) \subset R^3$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 0 \\ y_3 - y_1 = 0 \end{cases}$$

HOJA 3.2 | 16 Se define la aplicación lineal $f: V_3 \rightarrow V_4$ de forma que

$f(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) = \bar{u}_1$, $f(\bar{e}_2 - \bar{e}_3) = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$, $f(2\bar{e}_3) = 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_3$, donde $C_3 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es una base del e.v. V_3 y $C_4 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ es una base del e.v. V_4

- Hallar la asociada a f respecto de las bases C_3 y C_4
- Hallar una base, unas ecuaciones implícitas y paramétricas de los subespacios vectoriales $\ker f, \text{Im} f$
- Obtener $f(U)$ siendo $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$
- Obtener $M_f(D_3, C_4)$. donde $D_3 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ es una base de V_3 donde $\bar{w}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{w}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{w}_3 = \bar{e}_2$
- Obtener $M_f(D_3, D_4)$ donde $D_4 = \{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4\}$ es una base de V_4 donde $\bar{m}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{m}_2 = \bar{u}_1 - \bar{u}_3, \bar{m}_3 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_4, \bar{m}_4 = \bar{u}_3 - \bar{u}_4$
- Obtener $M_f(C_3, E_4)$. donde $E_4 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es una base de V_4 donde $\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{u}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_3, \bar{u}_3 = \bar{v}_3 + \bar{v}_4, \bar{u}_4 = \bar{v}_4$

16_i) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases C_3 y C_4

$$\begin{array}{ccc} \text{La aplicación } f: & V_3 & \xrightarrow{f} & V_4 \\ & (C_3) & & (C_4) \\ & (x_1, x_2, x_3)_{C_3} & & (y_1, y_2, y_3, y_4)_{C_4} \end{array}$$

Trabajando con coordenadas en las bases $C_3 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $C_4 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$
 Observamos que $\bar{e}_1 - \bar{e}_3 = (1, 0, 1)_{C_3}$, $\bar{e}_1 - \bar{e}_2 = (0, 1, -1)_{C_3}$, $2\bar{e}_3 = (0, 0, 2)_{C_3}$
 $\bar{u}_1 = (1, 0, 0, 0)_{C_4}$, $\bar{u}_2 = (0, 1, 0, 0)_{C_4}$, $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = (1, -1, 0, 0)_{C_4}$, $2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_3 = (2, 0, 2, 0)_{C_4}$

Por tanto, trabajando con coordenadas en C_3 y C_4 se tiene

$$\begin{array}{ll} f(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) = \bar{u}_1, & f(1, 0, -1)_{C_3} = (1, 0, 0, 0)_{C_4} \\ f(\bar{e}_2 - \bar{e}_3) = \bar{u}_1 - \bar{u}_2, & f(0, 1, -1)_{C_3} = (1, -1, 0, 0)_{C_4} \\ f(2\bar{e}_3) = 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_3, & f(0, 0, 2)_{C_3} = (2, 0, 0, 2)_{C_4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} E_1 \quad (1, 0, 0, 0)_{C_4} = f(1, 0, -1)_{C_3} = f(1, 0, 0)_{C_3} - f(0, 0, 1)_{C_3} \\ \text{Y de aquí } E_2 \quad (1, -1, 0, 0)_{C_4} = f(0, 1, -1)_{C_3} = f(0, 1, 0)_{C_3} - f(0, 0, 1)_{C_3} \\ E_3 \quad (2, 0, 2, 0)_{C_4} = f(0, 0, 2)_{C_3} = 2f(0, 0, 1)_{C_3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ E_3 \rightarrow \frac{1}{2}E_3 \\ E_1 \rightarrow E_1 + E_3 \\ E_2 \rightarrow E_2 + E_3 \end{array} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1, 0, 0)_{C_3} = (1, 0, 0, 0)_{C_4} + f(0, 0, 1)_{C_3} \\ f(0, 1, 0)_{C_3} = (1, -1, 0, 0)_{C_4} + f(0, 0, 1)_{C_3} \\ f(0, 0, 1)_{C_3} = (1, 0, 1, 0)_{C_4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(1, 0, 0)_{C_3} = (1, 0, 0, 0)_{C_4} + (1, 0, 1, 0)_{C_4} = (2, 0, 1, 0)_{C_4} \\ f(0, 1, 0)_{C_3} = (1, -1, 0, 0)_{C_4} + (1, 0, 1, 0)_{C_4} = (2, -1, 1, 0)_{C_4} \\ f(0, 0, 1)_{C_3} = (1, 0, 1, 0)_{C_4} \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Las ecuaciones de f en las bases C_3 y C_4 son

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_{C_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_f(C_3, C_4)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{C_3} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = -x_2 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

16_ii) $\ker f$ **Nucleo de f** : $\ker f = f^{-1}(\bar{\mathbf{0}}) = \{\bar{\mathbf{x}} \in V_3 / f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}\} \subset V_2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{C_4} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{C_3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 0 = -x_2 \\ 0 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Resolviendo el sistema se tiene $0 = x_1 = x_2 = x_3$.

Luego $\ker f = \{\bar{\mathbf{0}}\} = \{(0, 0, 0)\}$

$\text{Im} f$ **Imagen de f** :

$\text{Im} f = f(V_3) = \{f(\bar{\mathbf{x}}) / \bar{\mathbf{x}} \in V_3\} = L(\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_3)\})$

$$= L\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Una base de $B_{\text{Im} f} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$

Unas ecuaciones implícitas : $\text{Im} f$: $y_4 = 0$

16_iii) Obtener $f(U)$ siendo $U = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} = L(\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\})$$

Una base de U es $B_U = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

$$f(U) = L(\{f((1, 1, 0)), f((1, 0, 1))\})$$

Calculando la imagen de los elemento de una base de U

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(U) = L(\{f((1, 1, 0)), f((1, 0, 1))\}) = L(\{(4, -1, 2, 0), (3, 0, 2, 0)\})$$

Una base de $f(U)$: $B_{f(U)} = \{(4, -1, 2, 0), (3, 0, 2, 0)\}$

$$\text{Unas ecuaciones implícitas de } f(U) : \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

16_iv) Obtener $M_f(D_3, C_4)$.donde $D_3 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ es una base de V_3 donde

$$\bar{w}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{w}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{w}_3 = \bar{e}_2$$

$$A = M_f(C_3, C_4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = M_f(D_3, C_4)$$

$$f = f \circ i_{\mathbb{R}^3} : \underbrace{V_3}_{(D_3)} \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^3}} \underbrace{V_3}_{(C_3)} \xrightarrow{f} \underbrace{V_4}_{(C_4)}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_P \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_A$$

$$B = AP$$

La nueva base $D_3 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$

$$\begin{cases} \bar{w}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{w}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{w}_3 = \bar{e}_2 \end{cases} \text{ Con coord en } C_3 \begin{cases} \bar{w}_1 = (1, -1, 0)_{C_3} \\ \bar{w}_2 = (0, 1, 1)_{C_3} \\ \bar{w}_3 = (0, 1, 0)_{C_3} \end{cases} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

16v) Obtener $M_f(D_3, D_4)$ donde $D_4 = \{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4\}$ es una base de V_4 donde

$$\bar{m}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{m}_2 = \bar{u}_1 - \bar{u}_3, \bar{m}_3 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_4, \bar{m}_4 = \bar{u}_3 - \bar{u}_4$$

$$V_3 \xrightarrow{f} V_4; \begin{matrix} (C_3) & & (C_4) \end{matrix} A = M_f(C_3, C_4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Buscamos } B = M_f(D_3, D_4)$$

Nueva base de V_3 , $D_3 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$. Del apartado anterior

$$\begin{cases} \bar{w}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{w}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{w}_3 = \bar{e}_2 \end{cases} \text{ Con coordenadas en } C_3 \begin{cases} \bar{w}_1 = (1, -1, 0)_{C_3} \\ \bar{w}_2 = (0, 1, 1)_{C_3} \\ \bar{w}_3 = (0, 1, 0)_{C_3} \end{cases}$$

Del apartado anterior conocemos $: V_3 \xrightarrow{i_{R^3}} V_3 \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La nueva base de V_4 , $D_4 = \{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4\}$ esta definida por

$$\begin{cases} \bar{m}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \\ \bar{m}_2 = \bar{u}_1 - \bar{u}_3 \\ \bar{m}_3 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_4 \\ \bar{m}_4 = \bar{u}_3 - \bar{u}_4 \end{cases} \text{ Coordenadas en } C_4 \begin{cases} \bar{m}_1 = (1, 1, 0, 0)_{C_4} \\ \bar{m}_2 = (1, 0, -1, 0)_{C_4} \\ \bar{m}_3 = (1, 1, 0, 1)_{C_4} \\ \bar{m}_4 = (0, 0, 1, -1)_{C_4} \end{cases}$$

Conocemos

$$V_4 \xrightarrow{i_{R^4}} V_4 \quad Q = M_f(D_4, C_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = i_{R^4} \circ f \circ i_{R^3} : V_3 \xrightarrow{i_{R^3}} V_3 \xrightarrow{f} V_4 \xrightarrow{i_{R^4}} V_4$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{P \quad A \quad Q^{-1}} \quad B = Q^{-1}AP$

$$B = M_f(D_3, D_4) = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

16vi v) Obtener $M_f(C_3, E_4)$.donde $E_4 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es una base de V_4 donde

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{u}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_3, \bar{u}_3 = \bar{v}_3 + \bar{v}_4, \bar{u}_4 = \bar{v}_4$$

$C_3 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es una base del e.v. V_3 y

$C_4 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ es una base del e.v. V_4

$$\begin{array}{ccc}
 V_3 & \xrightarrow{f} & V_4 & \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^4}} & V_4 \\
 (C_3) & & (C_4) & & (E_4)
 \end{array}$$

$Q = M_f(E_4, C_4); Q^{-1} = M_f(C_4, E_4)$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 : (1, -1, 0, 0)_{E_4} \\
 \bar{u}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_3 : (0, 1, 1, 0)_{E_4} \\
 \bar{u}_3 = \bar{v}_3 + \bar{v}_4 : (0, 0, 1, 1)_{E_4} \\
 \bar{u}_4 = \bar{v}_4 : (0, 0, 0, 1)_{E_4}
 \end{array} \right. \quad Q^{-1} = M(C_4, E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
 V_3 & \xrightarrow{f} & V_4 & \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^4}} & V_4 \\
 (C_3) & & (C_4) & & (E_4)
 \end{array}$$

$$\underbrace{\quad A \quad}_{B=Q^{-1}A} \quad Q^{-1}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70