

Semántica Operacional

Yolanda Ortega Mallén

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación

Universidad Complutense de Madrid

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sumario

- Semántica de paso largo.
- Semántica de paso corto.
- Equivalencia.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sistema de transiciones

- Configuraciones:

$\langle S, s \rangle$ la sentencia S se ejecutará desde el estado s
 s estado **terminal**

- Transiciones: $\langle S, s \rangle \rightarrow s'$

$$[\text{ass}_{\text{bs}}] \quad \langle x := a, s \rangle \rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[[a]]s]$$

$$[\text{skip}_{\text{bs}}] \quad \langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$$

$$[\text{comp}_{\text{bs}}] \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \rightarrow s', \langle S_2, s' \rangle \rightarrow s''}{\langle S_1 ; S_2, s \rangle \rightarrow s''}$$

$$[\text{if}_{\text{bs}}^{\text{tt}}] \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \rightarrow s'}{\langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s \rangle \rightarrow s'} \text{ si } \mathcal{B}[[b]]s = \text{tt}$$

$$[\text{if}_{\text{bs}}^{\text{ff}}] \quad \frac{\langle S_2, s \rangle \rightarrow s'}{\langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s \rangle \rightarrow s'} \text{ si } \mathcal{B}[[b]]s = \text{ff}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sistema de transiciones

La ejecución de una sentencia S en un estado s

- **termina** si y solo si existe un estado s' tal que $\langle S, s \rangle \rightarrow s'$,
- **cicla** si y solo si no existe **ningún** estado s' tal que $\langle S, s \rangle \rightarrow s'$.

Ejercicio 2.4

Determinar si las sentencias terminan \ cicl原因 (o no) **siempre**:

- `while $\neg(x = 1)$ do ($y := y \times x$; $x := x - 1$)`
- `while $1 \leq x$ do ($y := y \times x$; $x := x - 1$)`
- `while true do skip`

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades

Equivalencia semántica $\forall s \in \mathbf{State}. \langle S_1, s \rangle \rightarrow s' \iff \langle S_2, s \rangle \rightarrow s'$

Lema 2:

`while b do S` es semánticamente equivalente a
`if b then (S; while b do S) else skip.`

Ejercicio 2.6

- Demostrar que $S_1; (S_2; S_3)$ y $(S_1; S_2); S_3$ son semánticamente equivalentes.
- Demostrar que $S_1; S_2$ en general no es semánticamente equivalente a $S_2; S_1$.

Ejercicio 2.7

Extender el lenguaje **While** con la sentencia `repeat S until b.`

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades

Inducción sobre el árbol de derivación (inducción por reglas)

- ① Demostrar que la propiedad se verifica para los **axiomas**.
- ② Para cada regla, asumiendo que la propiedad es cierta para todas las **premisas** (hipótesis de inducción), demostrar que la propiedad se verifica para la **conclusión**, siempre y cuando se satisfagan las condiciones de la regla.

Teorema 3:

La semántica de paso largo es **determinista**:

$$\langle S, s \rangle \rightarrow s' \wedge \langle S, s \rangle \rightarrow s'' \implies s' = s''.$$

Ejercicio 2.10

Demostrar que $\text{rePEAT}(S)$ es semánticamente equivalente a

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Función semántica

Significado de una sentencia:

$$\mathcal{S}_{bs} : \mathbf{Stm} \longrightarrow (\mathbf{State} \leftrightarrow \mathbf{State})$$

$$\mathcal{S}_{bs}[[S]]s = \begin{cases} s' & \text{si } \langle S, s \rangle \rightarrow s' \\ \text{INDEFINIDO} & \text{e.c.c.} \end{cases}$$

Ejercicio 2.11

- Definir una semántica operacional de paso largo para las expresiones aritméticas, con una relación de transición: $\langle a, s \rangle \rightarrow_{Aexp} z$.
- Demostrar que el significado de a según esta relación coincide con el definido por \mathcal{A} .

Ejercicio 2.12

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sistema de transiciones

Pasos de ejecución **individuales**.

- Transiciones: $\langle S, s \rangle \Rightarrow \gamma$
Primer paso de la ejecución de S desde el estado s :
 - **configuración intermedia** $\langle S', s' \rangle$, ejecución de S no completada;
 - **estado final** s' , ejecución de S terminada.
- $\langle S, s \rangle$ está **bloqueada** si no existe γ tal que $\langle S, s \rangle \Rightarrow \gamma$.

$$[\text{ass}_{\text{SS}}] \quad \langle x := a, s \rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[[a]]s]$$

$$[\text{skip}_{\text{SS}}] \quad \langle \text{skip}, s \rangle \Rightarrow s$$

$$[\text{comp}_{\text{SS}}^1] \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \Rightarrow \langle S'_1, s' \rangle}{\langle S_1 ; S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S'_1 ; S_2, s' \rangle}$$

$$[\text{comp}_{\text{SS}}^2] \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1 ; S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_2, s' \rangle}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Secuencias de derivación

Secuencia finita $\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \gamma_k$,

con $\gamma_0 = \langle S, s \rangle$ y $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ para $0 \leq i < k$,

donde $k \geq 0$ y γ_k es o un estado final o una configuración bloqueada.

Secuencia infinita $\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \dots$,

con $\gamma_0 = \langle S, s \rangle$ y $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ para $0 \leq i$.

La ejecución de una sentencia S en un estado s

- **termina** si y solo si existe una secuencia de derivación finita comenzando en $\langle S, s \rangle$,
- **termina con éxito** si $\langle S_1, s \rangle \Rightarrow^* s'$ para algún estado s' ,
- **cicla** si y solo si existe una secuencia de derivación infinita comenzando en $\langle S, s \rangle$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades

Inducción sobre la longitud de la secuencia de derivación

- 1 Demostrar que la propiedad se verifica para todas las secuencias de longitud 0.
- 2 Asumiendo que la propiedad es cierta para todas las secuencias de derivación con longitud máxima k (hipótesis de inducción), demostrar que la propiedad se verifica para secuencias de derivación con longitud $k + 1$.

Lema 4:

$\langle S_1; S_2, s \rangle \Rightarrow^k s'' \implies \exists s' \in \mathbf{State} \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}. \langle S_1, s \rangle \Rightarrow^{k_1} s' \wedge \langle S_2, s' \rangle \Rightarrow^{k_2} s''$,
con $k = k_1 + k_2$.

Ejercicio 2.20 + 2.21

- Demostrar que la ejecución de una sentencia es independiente de las

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades

Ejercicio 2.22

Demostrar que la semántica de paso corto es **determinista**:

$$\langle S, s \rangle \Rightarrow \gamma \wedge \langle S, s \rangle \Rightarrow \gamma' \implies \gamma = \gamma'$$

Existe exactamente una secuencia de derivación comenzando en $\langle S, s \rangle$.

Equivalencia semántica para todo estado $s \in \text{State}$

- $\langle S_1, s \rangle \Rightarrow^* \gamma \iff \langle S_2, s \rangle \Rightarrow^* \gamma$, cuando γ es terminal o bloqueada;
- la secuencia de derivación comenzando en $\langle S_1, s \rangle$ es infinita sii lo es comenzando en $\langle S_2, s \rangle$.

Ejercicio 2.23

Demostrar que las siguientes sentencias son semánticamente equivalentes:

- S ; skip y S
- while b do S y if b then $(S$; while b do S) else skip
- S_1 ; $(S_2$; $S_3)$ y $(S_1$; $S_2)$; S_3

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

S ; while $\neg b$ do S

Función semántica

Significado de una sentencia:

$$\mathcal{S}_{ss} : \mathbf{Stm} \longrightarrow (\mathbf{State} \leftrightarrow \mathbf{State})$$

$$\mathcal{S}_{ss}[[S]]s = \begin{cases} s' & \text{si } \langle S, s \rangle \Rightarrow^* s' \\ \text{INDEFINIDO} & \text{e.c.c.} \end{cases}$$

Ejercicio 2.25

Determinar si la equivalencia semántica de S_1 y S_2 es lo mismo que $\mathcal{S}_{ss}[[S_1]] = \mathcal{S}_{ss}[[S_2]]$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Equivalencia de las semánticas de paso largo y paso corto

Teorema 5:

$$\forall S \in \mathbf{Stm}. \mathcal{S}_{\text{bs}}[[S]] = \mathcal{S}_{\text{ss}}[[S]]$$

- 1 Si la ejecución de S desde un estado termina en una de las semánticas, entonces también termina en la otra, y los estados finales son el mismo.
- 2 Si la ejecución de S desde un estado cicla en una de las semánticas, entonces también cicla en la otra.

Lema 6: $\forall S \in \mathbf{Stm} \forall s, s' \in \mathbf{State}. \langle S, s \rangle \rightarrow s' \implies \langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$

Lema 7: $\forall S \in \mathbf{Stm} \forall s, s' \in \mathbf{State} \forall k \in \mathbb{N}. \langle S, s \rangle \Rightarrow^k s' \implies \langle S, s \rangle \rightarrow s'$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Equivalencia de las semánticas de paso largo y paso corto

Resumen demostración equivalencia

1 Inducción sobre el árbol de derivación

Para cada árbol de derivación en la semántica de paso largo existe la correspondiente secuencia de derivación finita en la semántica de paso corto.

2 Inducción sobre la longitud de la secuencia de derivación

Para cada secuencia de derivación finita en la semántica de paso corto existe el correspondiente árbol de derivación en la semántica de paso largo.

Ejercicio 2.29

Extender la demostración del Teorema 5 para incluir la sentencia

`repeat S until b.`

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70