

- Demuestra que la función diagonal $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto f(x) = (x, x)$ es continua.
- Sea $X = [0, 1]$ con la topología usual e $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico. Estudia si las siguientes funciones son continuas.
 - $f: X \rightarrow Y: t \mapsto f(t) = (t, t)$;
 - $g: X \rightarrow Y: t \mapsto g(t) = (1/2, (2t + 1)/4)$, y
 - $h: X \rightarrow Y: t \mapsto h(t) = (t, 1)$.
- Prueba que existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\lfloor})$ en \mathbb{N} con la topología discreta que son sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\lfloor})$ en \mathbb{R} con la topología discreta que tengan tales propiedades. (*Indicación: la imagen inversa de \mathbb{R} sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a, b)$ contiene siempre un número racional.*)
- Estudia si \mathbb{R} con la topología \mathcal{T}_{\lfloor} es homeomorfo a \mathbb{R} con la topología \mathcal{T}_{\lceil} . ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?
- Demuestra que los espacios $X = [0, 2) \cup [4, 5]$ e $Y = [0, 3]$ son homeomorfos con la topología del orden.
- Halla una función continua y biyectiva del intervalo $(-1, 1)$ en el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\},$$

ambos con la topología usual. (*Más adelante sabremos demostrar que estos espacios no son homeomorfos.*)

- Sea $A = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Demuestra que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que sólo es un homeomorfismo con la del orden.

- Demuestra que $[0, \infty) \times [0, \infty)$, con la topología usual es homeomorfo a

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

- Da un ejemplo de una función continua $f: X \rightarrow Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea. (*Indicación: Piensa en la identidad de \mathbb{R} en \mathbb{R} poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.*)

- En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\lfloor}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\lfloor})$ describe la topología inducida en los subconjuntos

$$X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \quad e \quad Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

- Sean X e Y espacios topológicos. Sea $A \subset X \times Y$. Sean



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

sean el punto (x, y) . $\mathcal{B} = \{B((x, y), r) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$.) ¿Existen en \mathbb{R} sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$? (*Indicación: Prueba que ambas topologías deben ser menos finas que la*

13. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Sea \mathcal{T} la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías \mathcal{T}_1 de X y \mathcal{T}_2 de Y . Prueba que si \mathcal{B} es una base de \mathcal{T} (no necesariamente la “base producto”) entonces $p_1(\mathcal{B}) = \{p_1(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de \mathcal{T}_1 y $p_2(\mathcal{B}) = \{p_2(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de \mathcal{T}_2 . ¿Se puede usar este hecho para resolver el ejercicio anterior?

14. Demuestra que todo espacio métrico es un espacio topológico Hausdorff.

15. Demuestra que (X, T_X) es un espacio topológico con la propiedad de separación de Hausdorff si y sólo si

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$$

es un cerrado en el espacio producto $X \times X$, cuya topología viene generada por la base $\mathcal{B} := \{U \times V : U, V \in T_X\}$. De modo más general, se puede probar lo siguiente: si $f : X \rightarrow Y$ es continua e Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$.

16. Siguiendo con el ejercicio anterior, demostrar que el recíproco de la última afirmación no es cierto en general. Sin embargo, si $f : X \rightarrow Y$ es una función abierta y sobre, y el conjunto $K = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$ entonces Y es Hausdorff.

17. Demostrar que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y siendo Y un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X .

18. Demostrar que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y , siendo Y un espacio de Hausdorff, que coinciden en un subconjunto denso de X , entonces $f = g$.

19. Estudia la convergencia de la sucesión $(-n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ en \mathbb{R} con la topología \mathcal{T}_\leftarrow (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$) y concluye que el límite de una sucesión no tiene por qué ser único cuando el espacio no es Hausdorff. Por otro lado, aunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\leftarrow)$ no es Hausdorff, sí que posee cierta propiedad de separación que el lector puede tratar de descubrir y enunciar.

20. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico de Hausdorff. Demuestra que:

(i) Si X es finito, \mathcal{T} es la topología discreta.

(ii) Si A es un subconjunto finito de X , A no tiene puntos de acumulación, es decir $A' = \emptyset$.

21. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección en el primer factor.

(i) Sea X el subespacio $(0 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times 0)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea g la restricción de p_1 a X . Demuestra que g es una aplicación cerrada pero que no es una aplicación abierta.

(ii) Sea Y el subespacio $(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times 0)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea h la restricción de p_1 a Y . Demuestra que la aplicación h no es ni abierta ni cerrada, pero sí es una aplicación cociente.

(Indicación: $h^{-1}(U) \cap (\mathbb{R} \times 0) = U \times 0$.)

22. Sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación y sea A un subespacio de X .

(i) Demuestra que si A es abierto en X y p es una aplicación abierta, entonces la restricción de p a A es una aplicación abierta

(ii) Concluye del apartado anterior que $p' : A \rightarrow p(A) : x \mapsto p'(x) := p(x)$ es una aplicación abierta.

(iii) Demuestra que si A y p son cerradas, la restricción de p a A es cerrada, luego la aplicación p' (del apartado (ii)) lo es.

23. Se considera el plano $X = \mathbb{R}^2$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$x \neq 0$, y $g(0, y) = (0, y)$.

(i) Estudia si g es una aplicación continua, si es abierta, y si es cerrada.