Mat II (GIB) - 10/6/2015 Prueba 2 (EC). 45 puntos (= 45 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 135 minutos**

TEST. (10 puntos) Tiempo 30 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +2.0 **Error -0.5** En blanco 0.

---

1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{R}$. Entonces,

- [ ] a) Si $\{a_n\}$ es acotada, entonces es convergente
- [x] b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, entonces, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
- [ ] c) ni a) ni b)

2. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real convergente y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L \in \mathbb{R}$. Entonces,

- [ ] a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+1} = 3L$
- [x] b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
- [ ] c) ni a) ni b)

3. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie divergente de términos positivos. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5a_n}{3+n^3a_n}$ es

- [ ] a) siempre divergente
- [x] b) siempre convergente
- [ ] c) ni a) ni b)

4. Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existen $\partial_x f(a,b)$ y $\partial_y f(a,b)$. Entonces,

- [ ] a) $f(x,y)$ es continua en (a,b)
- [ ] b) $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b)
- [x] c) ni a) ni b)

5. Si el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)$ en $(0,-1)$ es $P_2(x,y) = 1 - x + x(y+1) - (y+1)^2$, entonces el gradiente de f en $(0,-1)$ es igual a

- [ ] a) $(0,0)$
- [x] b) $(-1,0)$
- [ ] c) $(-1,1)$

Mat II (GIB) - 10/6/2015 **Prueba 2 (EC) Problema 1. (10 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 30 minutos**

Por favor, comience su respuesta en esta hoja.

Sea $\alpha \geq 0$ y considere la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} e^{-n\alpha}.$$

a) **(5 puntos)** Estudie para qué valores de α converge la serie dada.

b) **(5 puntos)** Para estos valores, súmela.

SOLUCION:

a) Puesto que para $\alpha \geq 0$, $\alpha^{2n}e^{-n\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la serie puede converger para todo $\alpha \in [0, +\infty)$. También, para los valores de α considerados, se trata de una serie de términos positivos. Podemos así, por ejemplo, emplear el criterio raíz de Cauchy. Se tendrá entonces que

$$\sqrt[n]{\alpha^{2n}e^{-n\alpha}} = \alpha^2 e^{-\alpha},$$

valor que es independiente de n. Por tanto, el criterio raíz implica que cuando $\alpha^2 e^{-\alpha} < 1$ la serie convergerá, es decir, cuando $\alpha^2 < e^{\alpha}$, lo cual para $\alpha \in [0, +\infty)$ es siempre cierto, pues para $\alpha = 0$ es evidente, y para el resto de valores basta estudiar la función $\dfrac{e^{\alpha}}{\alpha^2}$ y ver que para $\alpha > 0$, es siempre positiva y tiene un mínimo absoluto en 2, donde toma el valor $e^2/4 > 1$.

Por tanto, la serie converge para todo $\alpha \in [0, +\infty)$.

También podríamos haber llegado a la misma conclusión símplemente observando que se trata de una serie geométrica de razón $q = \alpha^2 e^{-\alpha}$ y planteando la condición necesaria y suficiente para su convergencia: $|q| < 1$.

b) Reescribiendo la serie original como una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} e^{-n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^2 e^{-\alpha}\right)^n =: \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

con $q = \alpha^2 e^{-\alpha}$, y observando que la razón verifica $0 \leq q < 1$, se tiene que su suma es $\frac{1}{1-q}$, es decir :

$$\frac{1}{1-\alpha^2 e^{-\alpha}} = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - \alpha^2}, \quad \alpha \geq 0.$$

Mat II (GIB) - 10/6/2015 Prueba 2 (EC) Problema 2. (20 puntos)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 45 minutos**

Por favor, comience su respuesta en esta hoja.

Sea la función
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + x\ln(1+y^2).$$

1. **(5 puntos)** Estudie su diferenciabilidad.
2. **(5 puntos)** Halle sus puntos críticos y clasifíquelos.
3. **(5 puntos)** Halle el polinomio de Taylor de orden 5 en torno al origen. (Nota: no es necesario calcular las parciales)
4. **(5 puntos)** Estudie el límite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x+y^2}\,.$$

SOLUCION:

1. La función es suma, producto y composición de funciones diferenciables en sus dominios de definición. Es, por tanto, diferenciable en su dominio de definición. Dado que el argumento del logaritmo es siempre positivo (y, de hecho, mayor o igual a 1), el dominio de definición es todo $\mathbb{R}^2$.

2. La matriz Jacobiana viene dada por:
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + \ln(1+y^2) & -2y + \dfrac{2xy}{1+y^2}. \end{pmatrix}$$
Los puntos críticos son las soluciones del sistema:
$$\begin{cases} 2x + \ln(1+y^2) = 0 \\ -2y + \dfrac{2xy}{1+y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + \ln(1+y^2) = 0 \\ 2y\left(\dfrac{x}{1+y^2} - 1\right) = 0 \end{cases}$$
La segunda ecuación tiene dos soluciones: $y = 0$, x arbitrario, o bien $y \neq 0$, $x = 1 + y^2$. Sustituyendo $y = 0$ en la primera ecuación, obtenemos $x = 0$. Por lo tanto $(0,0)$ es un punto crítico.
Si sustituimos la otra solución, tenemos:
$$2(1+y^2) + \ln(1+y^2) = 0\,, \quad y \neq 0.$$
Esta ecuación no tiene soluciones, ya que el miembro izquierdo es suma de dos términos estríctamente positivos. Por tanto, el único punto crítico es el origen.
La matriz Hessiana viene dada por:
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{2y}{1+y^2} \\ \dfrac{2y}{1+y^2} & -2 + \dfrac{2x(1-y^2)}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix},$$
que en el origen es:
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Así la forma cuadrática correspondiente al incremento de la función en un entorno del origen es $2h_x^2 - 2h_y^2$, que obviamente toma tanto valores positivos (tome $h_y = 0$) como negativos (tome $h_x = 0$), por lo que el origen es un punto silla.

3. Para obtener el polinomio de Taylor pedido sólo necesitamos el polinomio de Taylor de $\ln(1+y^2)$ en torno a $y=0$, ya que el resto de términos son polinómicos. Puesto que $\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2), t\to 0$, el polinomio referido es $y^2-y^4/2$, con lo que tenemos que el polinomio pedido es:

$$x^2-y^2+x(y^2-y^4/2)=x^2-y^2+xy^2-\frac{xy^4}{2}.$$

4. Para estudiar el límite pedido consideramos límites direccionales. En primer lugar, nos acercamos al origen en la dirección $y=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x\ln(1)}{x}=0\,,$$

en segundo, en la dirección $x=0$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1\,.$$

Por ser finitos y distintos, no existe el límite de la expresión.

Mat II (GIB) - 10/6/2015 **Prueba 2 (EC) Problema 3. (5 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 30 minutos**

Por favor, comience su respuesta en esta hoja.

(5 puntos) Sea A el sector en el primer cuadrante ($x \geq 0,\ y \geq 0$) del anillo delimitado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$. Calcule la integral de la función $f(x, y) = x\, y$ sobre la región A.

SOLUCION:

La integral pedida puede calcularse de diversas formas. Una de ellas se desarrolla a continuación.
Observemos que el conjunto A puede escribirse como

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq \sqrt{2},\ 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\right\},$$

que es un compacto. Aplicando el teorema de Fubini a la función continua f, se tendrá:

$$\int\int_A xy\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} xy\, dy\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} xy\, dy\right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{x^3}{2}\right) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$
