

Problemas Tema 4

1. Probar que cuando una fuerza es conservativa, se cumple $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$, $\partial F_y/\partial z = \partial F_z/\partial y$, $\partial F_x/\partial z = \partial F_z/\partial x$. Se puede demostrar que la inversa también es cierta. Usando este resultado determinar cuáles de las siguientes fuerzas son conservativas: a) $(x^n, 0, 0)$, b) $(y^n, 0, 0)$, c) $(x^2 - y^2, 3xy, 0)$, d) $(2xy, x^2, 0)$, e) (yz, zx, xy) , f) (x, y, z) .
2. Un resorte de masa despreciable ejerce una fuerza recuperadora de la forma

$$F(x) = -k_1x + k_2x^2.$$

- a) Calcular la energía potencial almacenada por el resorte para una deformación arbitraria Δx .
 - b) Si la energía potencial en el punto $x = -b$ es el doble que en $x = b$, obtener k_2 en función de k_1 y de la distancia b .
 - c) El resorte se encuentra sobre una superficie horizontal, con un extremo fijo y el otro unido a una partícula de masa m . Si cuando está en $x = 0$ se le da una velocidad en sentido positivo, y tal que en ese momento su energía cinética vale $k_1b^2/2$, determinar su velocidad para $x = +b$.
3. Una masa de 10 kg se mueve bajo la acción de una fuerza

$$\vec{F} = 5t\vec{i} + (3t^2 - 1)\vec{j}\text{N}.$$

Cuando $t = 0$ s la masa está en reposo en el origen.

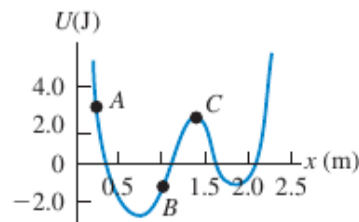
- a) Obtener el momento lineal y la energía cinética cuando $t = 10$ s.
 - b) Calcular el trabajo efectuado por la fuerza entre $t = 0$ y $t = 10$ s.
4. Dos bloques con diferente masa están unidos a cada uno de los extremos de una cuerda ligera, que pasa por una polea ligera sin fricción que está suspendida del techo. Los bloques se sueltan desde el reposo y el más pesado comienza a descender. Una vez que este bloque ha descendido 1.20 m, su velocidad es de 3.00 m/s. Si la masa total de los dos bloques es de 15.0 kg, ¿qué masa tiene cada bloque?
 5. Cierta resorte no obedece la ley de Hooke; ejerce una fuerza de restauración $F_x(x) = -\alpha x - \beta x^2$ si se estira o comprime, donde $\alpha = 60.0$ N/m y $\beta = 18.0$ N/m². Se desprecia la masa del resorte. a) Calcule la función de energía potencial $U(x)$ del resorte. Sea $U = 0$ cuando $x = 0$. b) Un objeto con masa de 0.900 kg en una superficie horizontal sin fricción se une a este resorte, se tira de él hasta desplazarlo 1.00 m a la derecha (dirección $+x$) para estirar el resorte, y se suelta. ¿Qué velocidad tiene el objeto cuando está 0.50 m a la derecha de la posición de equilibrio $x = 0$?

6. Una partícula de masa m se mueve sometida a una fuerza central atractiva, dada por

$$F = -\frac{k}{r^2}$$

La trayectoria es una circunferencia de radio R . Demostrar que la energía total es $E = -k/2R$, que la velocidad es $v = \sqrt{k/mR}$ y que el momento angular es $L = \sqrt{mkR}$

7. Una partícula se mueve en el eje x y sobre ella actúa una sola fuerza conservativa paralela al eje x . Tal fuerza corresponde a la función de energía potencial adjunta. La partícula se suelta del reposo en el punto A . a) ¿Qué dirección tiene la fuerza sobre la partícula en A ? b) ¿Y en B ? c) ¿En qué valor de x es máxima la energía cinética de la partícula? d) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula en C ? e) ¿Qué valor máximo de x alcanza la partícula durante su movimiento? f) ¿Qué valor o valores de x corresponden a puntos de equilibrio estable? g) ¿Y de equilibrio inestable?



8. ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\vec{j}$, donde C es una constante negativa dada en N/m^2 , es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta. ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\vec{i}$, donde C es una constante negativa dada en N/m^2 , es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta.
9. Una fuerza de ley de Hooke $-kx$ y una fuerza conservativa constante F en la dirección $+x$ actúan sobre un ion atómico. a) Demuestre que una posible función de energía potencial para esta combinación de fuerzas es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - Fx - F^2/2k$. ¿Es ésta la única función posible? Explique su respuesta. b) Encuentre la posición de equilibrio estable. c) Dibuje $U(x)$ (en unidades de F^2/k) como función de x (en unidades de F/k) para valores de x entre $-5F/k$ y $5F/k$. d) ¿Hay posiciones de equilibrio inestable? e) Si la energía total es $E = F^2/k$, ¿qué valores máximos y mínimos de x alcanza el ion en su movimiento? f) Si el ion tiene masa m , calcule su velocidad máxima si la energía total es $E = F^2/k$. ¿En qué valor de x es máxima la velocidad?