

MATEMÁTICAS, GRUPO F (2019/2020)

Problemas Tema 7: Integrales en R

1. Sin calcular las primitivas, decir en cada caso cuál es el valor correcto de la integral entre las tres opciones que se ofrecen:

(i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 x dx$: a) $\frac{\pi}{4} - 1$, b) $\frac{35\pi}{128}$, c) π

(ii) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x dx$: a) $\frac{5\pi}{16}$, b) $\frac{\pi}{8}$, c) 0

(iii) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3 - 8}$: a) $-\frac{\log 3}{24} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72}$, b) $\log \frac{9}{8}$, c) $\frac{33}{4}$

2. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor de $f(x) = \int_0^x e^{-y^2} dy$ en $x = 0$. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-y^2} dy}{\sin x}$.

3. Sea $f(x) = \frac{\sin(x^3) + 1}{\int_{-1}^x \sin(t^3) dt + x + 4}$. Calcular, si existe, $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

4. ¿Posee función inversa la función f definida para todo $x \geq 2$ por $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t}$?

5. Sea $f(x) = \int_1^x e^{4 \arctan t} dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$. Probar que f posee inversa en todo \mathbf{R} .

6. Determinar en qué x del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

a) $F(x) = \int_0^{x-x^3} \frac{dt}{\sqrt{2 - \sin^2 t}}$ en $[0, 2]$; b) $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{36 + t^3}}$ en $[-1, 6]$;

7. Sea $F(x) = \int_{1-2x}^{x^2} f(t) dt$, con $f(t)$ continua e impar en su dominio. Demostrar que $F(1) = F'(1) = 0$.

8. Sea $F(x) = \int_0^{x^3} \frac{2e^s}{1+s} ds - 1$. (a) Hallar $F'(2)$. (b) Estudiar cuántas veces se anula F en el intervalo $[0, 1]$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

10. Determinar la ecuación de la recta tangente a $F(x) = \int_{-\pi/2}^{x^2} e^{-t^2} \sin t dt$ en $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
¿Es la integral $\int_{-\pi/2}^{\pi} e^{-t^2} \sin t dt$ mayor o menor que $\frac{\pi}{2}$?
11. Sea $F(x) = \int_{-1}^x t [e^t - e^{t^4}] dt$. Hallar $F'(-1)$ y $F(1)$. Determinar los valores máximo y mínimo de F en $[-1, 1]$, si existen.
12. Sea $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$. Dibujar aproximadamente su gráfica. Hallar el área de la región limitada por los ejes y la gráfica de f .
13. Sea la función $F(x) = \int_{x^2}^1 \frac{\log t}{t + t^3} dt$ definida en el intervalo $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$
- Determina en qué valor de x toma la función su valor máximo en el intervalo $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$.
 - ¿Cuántas veces se anula la función en dicho intervalo?
 - Esboza la gráfica de $F(x)$ en $[\frac{1}{2}, \infty)$
14. Sea $\int_x^{2x} u^2 e^{-u^2} du$:
- Determina el signo de la integral según el valor de x .
 - Acota de la mejor forma que puedas $\int_1^2 u^2 e^{-u^2} du$.
 - Halla el valor de x que hace máximo el valor de la integral.
 - Prueba que el máximo valor de la integral es menor que $1/2$, es decir, que $\int_x^{2x} u^2 e^{-u^2} du < \frac{1}{2}$ para cualquier x real.
15. La capacidad calorífica de un sólido según el modelo de Debye viene dada por

$$C_V = 9NK \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} dx.$$

Calcula su límite a alta temperatura.

16. Sea $f(x) = \int_2^{x^2} s^3 e^{-s} ds$.
- Hallar los valores x donde f toma sus valores extremos en $[0, 2]$ y probar que el máximo es menor que 7.
 - ¿Alcanza f su máximo en $[0, \infty)$?
 - Precisar cuántas veces se anula f en \mathbf{R}

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

19. ¿Es la integral $\int_1^4 \arctan(\log x^2) dx$ mayor que 5? ¿Es mayor que $\int_1^4 \arctan(\log x) dx$?

20. Calcular:

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx$ b) $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$
 c) $\int_{-1}^0 x^3 \sin x^2 dx$ d) $\int_1^{\sqrt{3}} \log\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$
 e) $\int_4^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ f) $\int_{-\log 3}^{-\log 2} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$

21. Determinar, calculando la primitiva, si convergen o divergen las siguientes integrales impropias y, en caso de que converjan, calcular su valor:

a) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$ c) $\int_1^e \frac{dx}{x \log x}$ d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4 + x^2}$ e) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

22. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen o divergen:

a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ b) $\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$ c) $\int_3^\infty \frac{(\log x)^2}{x} dx$ d) $\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}} dx$
 e) $\int_0^1 \frac{\sin^3 x}{e^{x^3} - 1} dx$ f) $\int_0^{\pi/2} e^{-x} \tan x dx$ g) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx$ h) $\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{x}(1 - e^{-x})} dx$
 i) $\int_0^4 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ j) $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$ k) $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^{5/2}} dx$ l) $\int_5^\infty \frac{\sqrt{x+4}}{x-5} dx$

23. Precisar si converge la integral $\int_2^\infty \frac{\arctan(2/x)}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}} dx$.

24. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor en $x = 0$ de $f(x) = e^x \log(1 + 2x)$. Precisar si converge la integral $\int_0^1 \frac{e^x \log(1 + 2x)}{x^2} dx$.

25. Sea $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2}$. Estudiar si convergen $\int_1^\infty f(x) dx$ y $\int_{-1}^1 f(x) dx$

26. Sea $g(x) = e^{x-x^2}$:

a) Si $f(x) = \int^{2x+1} g(t) dt$, hallar $f'(1/2)$ y estudiar el crecimiento y decrecimiento

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99