

# MATEMÁTICAS, GRUPO F (2019/2020)

## Problemas Tema 7: Integrales en R

1. Sin calcular las primitivas, decir en cada caso cuál es el valor correcto de la integral entre las tres opciones que se ofrecen:

(i)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 x dx$ : a)  $\frac{\pi}{4} - 1$ , b)  $\frac{35\pi}{128}$ , c)  $\pi$

(ii)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x dx$ : a)  $\frac{5\pi}{16}$ , b)  $\frac{\pi}{8}$ , c)  $0$

(iii)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3 - 8}$ : a)  $-\frac{\log 3}{24} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72}$ , b)  $\log \frac{9}{8}$ , c)  $\frac{33}{4}$

2. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor de  $f(x) = \int_0^x e^{-y^2} dy$  en  $x = 0$ . Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-y^2} dy}{\sin x}$ .

3. Sea  $f(x) = \frac{\sin(x^3) + 1}{\int_{-1}^x \sin(t^3) dt + x + 4}$ . Calcular, si existe,  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

4. ¿Posee función inversa la función  $f$  definida para todo  $x \geq 2$  por  $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t}$ ?

5. Sea  $f(x) = \int_1^x e^{4 \arctan t} dt$ . Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $x = 1$ . Probar que  $f$  posee inversa en todo  $\mathbf{R}$ .

6. Determinar en qué  $x$  del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

a)  $F(x) = \int_0^{x-x^3} \frac{dt}{\sqrt{2 - \sin^2 t}}$  en  $[0, 2]$ ;      b)  $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{36 + t^3}}$  en  $[-1, 6]$ ;

7. Sea  $F(x) = \int_{1-2x}^{x^2} f(t) dt$ , con  $f(t)$  continua e impar en su dominio. Demostrar que  $F(1) = F'(1) = 0$ .

8. Sea  $F(x) = \int_0^{x^3} \frac{2e^s}{1+s} ds - 1$ . (a) Hallar  $F'(2)$ . (b) Estudiar cuántas veces se anula  $F$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

10. Determinar la ecuación de la recta tangente a  $F(x) = \int_{-\pi/2}^{x^2} e^{-t^2} \sin t dt$  en  $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .  
¿Es la integral  $\int_{-\pi/2}^{\pi} e^{-t^2} \sin t dt$  mayor o menor que  $\frac{\pi}{2}$ ?
11. Sea  $F(x) = \int_{-1}^x t [e^t - e^{t^4}] dt$ . Hallar  $F'(-1)$  y  $F(1)$ . Determinar los valores máximo y mínimo de  $F$  en  $[-1, 1]$ , si existen.
12. Sea  $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ . Dibujar aproximadamente su gráfica. Hallar el área de la región limitada por los ejes y la gráfica de  $f$ .
13. Sea la función  $F(x) = \int_{x^2}^1 \frac{\log t}{t + t^3} dt$  definida en el intervalo  $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$
- Determina en qué valor de  $x$  toma la función su valor máximo en el intervalo  $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$ .
  - ¿Cuántas veces se anula la función en dicho intervalo?
  - Esboza la gráfica de  $F(x)$  en  $[\frac{1}{2}, \infty)$
14. Sea  $\int_x^{2x} u^2 e^{-u^2} du$ :
- Determina el signo de la integral según el valor de  $x$ .
  - Acota de la mejor forma que puedas  $\int_1^2 u^2 e^{-u^2} du$ .
  - Halla el valor de  $x$  que hace máximo el valor de la integral.
  - Prueba que el máximo valor de la integral es menor que  $1/2$ , es decir, que  $\int_x^{2x} u^2 e^{-u^2} du < \frac{1}{2}$  para cualquier  $x$  real.
15. La capacidad calorífica de un sólido según el modelo de Debye viene dada por

$$C_V = 9NK \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} dx.$$

Calcula su límite a alta temperatura.

16. Sea  $f(x) = \int_2^{x^2} s^3 e^{-s} ds$ .
- Hallar los valores  $x$  donde  $f$  toma sus valores extremos en  $[0, 2]$  y probar que el máximo es menor que 7.
  - ¿Alcanza  $f$  su máximo en  $[0, \infty)$ ?
  - Precisar cuántas veces se anula  $f$  en  $\mathbf{R}$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

19. ¿Es la integral  $\int_1^4 \arctan(\log x^2) dx$  mayor que 5? ¿Es mayor que  $\int_1^4 \arctan(\log x) dx$ ?

20. Calcular:

a)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx$       b)  $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$

c)  $\int_{-1}^0 x^3 \sin x^2 dx$       d)  $\int_1^{\sqrt{3}} \log\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

e)  $\int_4^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$       f)  $\int_{-\log 3}^{-\log 2} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$

21. Determinar, calculando la primitiva, si convergen o divergen las siguientes integrales impropias y, en caso de que converjan, calcular su valor:

a)  $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$       b)  $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$       c)  $\int_1^e \frac{dx}{x \log x}$       d)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4 + x^2}$       e)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

22. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen o divergen:

a)  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$       b)  $\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$       c)  $\int_3^\infty \frac{(\log x)^2}{x} dx$       d)  $\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}} dx$

e)  $\int_0^1 \frac{\sin^3 x}{e^{x^3} - 1} dx$       f)  $\int_0^{\pi/2} e^{-x} \tan x dx$       g)  $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx$       h)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{x}(1 - e^{-x})} dx$

i)  $\int_0^4 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$       j)  $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$       k)  $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^{5/2}} dx$       l)  $\int_5^\infty \frac{\sqrt{x+4}}{x-5} dx$

23. Precisar si converge la integral  $\int_2^\infty \frac{\arctan(2/x)}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}} dx$ .

24. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor en  $x = 0$  de  $f(x) = e^x \log(1 + 2x)$ . Precisar si converge la integral  $\int_0^1 \frac{e^x \log(1 + 2x)}{x^2} dx$ .

25. Sea  $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2}$ . Estudiar si convergen  $\int_1^\infty f(x) dx$  y  $\int_{-1}^1 f(x) dx$

26. Sea  $g(x) = e^{x-x^2}$ :

a) Si  $f(x) = \int^{2x+1} g(t) dt$ , hallar  $f'(1/2)$  y estudiar el crecimiento y decrecimiento

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99