

Problema 1. Demostrar las siguientes propiedades de las congruencias:

- a) $a \equiv b \pmod{n}$ y $d \mid n \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$
 b) $ka \equiv kb \pmod{n}$ y $k \neq 0 \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{n}{\text{mcd}(n,k)}}$
 c) $a \equiv b \pmod{n}$ y $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{\text{mcm}(m,n)}$

Problema 2. Encontrar todos los números naturales n que verifiquen

$$97 \equiv 287 \pmod{n}.$$

Problema 3. Demostrar que si p es primo y $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$, se tiene que $p \mid (a + b)$ o $p \mid (a - b)$. ¿Puede decirse lo mismo si p no es primo?

Problema 4. Demostrar que si $n \equiv 3 \pmod{4}$, entonces n no puede ser suma de cuadrados de dos enteros.

Problema 5. Estudiar la existencia de solución de las ecuaciones que siguen y, en el caso de que tengan solución, calcular todas las soluciones enteras.

- (a) $24X \equiv 7 \pmod{40}$ (b) $13X \equiv 7 \pmod{10}$ (c) $525X \equiv 237 \pmod{423}$
 (d) $1215X \equiv 560 \pmod{2755}$ (e) $2X \equiv 1 \pmod{3}$ (f) $234X \equiv 3 \pmod{244}$
 (g) $20X \equiv 30 \pmod{4}$ (h) $20X \equiv 4 \pmod{30}$ (i) $3X \equiv 2 \pmod{7}$

Problema 6. Encontrar las soluciones enteras de los sistemas siguientes:

- a) $\begin{cases} 3x + 6y \equiv 2 \pmod{8} \\ 5x + 3y \equiv 0 \pmod{8} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 11x + 3y \equiv 5 \pmod{7} \\ 3x + 7y \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$

Problema 7. Estudiar la existencia de soluciones y, en su caso, resolver:

- (a) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 0 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
 (c) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{8} \\ x \equiv 1 \pmod{20} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{10} \\ x \equiv 38 \pmod{47} \end{cases}$
 (e) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 0 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{27} \\ x \equiv 6 \pmod{1233} \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{8} \\ x \equiv 2 \pmod{14} \\ x \equiv 14 \pmod{15} \end{cases}$

Problema 8. Estudiar para qué números enteros positivos a el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{54} \\ x \equiv a \pmod{189} \end{cases}$$

Tiene solución y resuélvelo para el menor de todos ellos.

Problema 9. Encontrar un múltiplo de 11 que deja resto 1 dividido por 2, 3, 5 y 7.

Problema 10. Sea n número entero positivo:

- a) Demostrar por inducción que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Problema 12. Demostrar, usando únicamente congruencias, que para todo natural n , el número

$$3^{2n+5} + 2^{4n+1}$$

es múltiplo de 7.

Problema 13. Sea n un número entero, demostrar:

- a) Si a es par, se verifica $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$
- b) Si a es impar, se verifica $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$
- c) Si a es impar, se verifica $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$

Problema 14. Un barco pirata naufraga y doce de sus tripulantes consiguen llegar a una isla desierta. Su primera tarea es la de dedicarse a recoger cocos que acumulan en una pila para repartírselos equitativamente a la mañana siguiente. Aunque ninguno dice nada, todos los piratas se dan cuenta de que si se hace el reparto equitativo sobrarían 3 cocos, así que a lo largo de la noche se levantan todos ellos y se comen 3 cocos sin que el resto se entere. Esa misma noche mueren dos piratas y el resto decide repartirse los cocos, descubriendo que esta vez sobran cinco. Explicar por qué se desencadena una trifulca entre los piratas sobrevivientes y encontrar el mínimo número de cocos recogidos por los piratas sabiendo que eran más de quinientos.

Problema 15. Una anciana va al mercado y un caballo pisa su bolsa y rompe los huevos que llevaba en ella. El jinete se ofrece a repararle los daños y le pregunta a la anciana cuántos huevos llevaba. Ella no recuerda el número exacto, pero sí que si los sacaba de dos en dos, finalmente le quedaba uno en la bolsa y lo mismo le ocurría si los sacaba de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco y de seis en seis. Sin embargo, si los sacaba de siete en siete, la bolsa quedaba vacía. ¿Cuál es el menor número de huevos que llevaba la anciana en su bolsa?

Problema 16. Tres agricultores se dividen una cierta cantidad de arroz en partes iguales obteniendo cada uno una cantidad natural de kilos. Cada uno de los agricultores vende su propio arroz en mercados distintos que utilizan pesos de 100 kilos, 45 kilos y 31 kilos y sólo compran múltiplos enteros de estos pesos. ¿Cuál es la menor cantidad de arroz que se han dividido los agricultores si regresan a casa con 60, 25 y 15 kilos de arroz respectivamente?

Problema 17.

Problema 18. Dados números naturales n y b , denotemos por $(a_k, \dots, a_1, a_0)_b$ la representación de n en base b ($n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$). Demostrar que se verifica:

Si d es un divisor de b y, j y k son enteros positivos con $j < k$, $(a_k, \dots, a_1, a_0)_b$ es divisible por d^j si, y sólo si, $(a_{j-1}, \dots, a_1, a_0)_b$ es divisible por d^j .

Problema 19. Encontrar todos los números enteros positivos x que verifican las siguientes condiciones:

- a) $6x \equiv 4 \pmod{10}$
- b) El resto de dividir x por 8 es igual a $y + 5$, con $y \equiv (1843)^{138648568243871569} \pmod{11}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Problema 21. Un sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{b_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{b_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{b_n} \end{cases}$$

con los módulos b_i distintos y mayores que uno, se dice completo si todo número entero satisface, al menos, una de las congruencias.

Demostrar que son completos los sistemas de congruencias

$$\text{a) } \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 8 \pmod{12} \\ x \equiv 4 \pmod{8} \\ x \equiv 0 \pmod{24} \end{cases}, \text{ c) } \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{12} \\ x \equiv 2 \pmod{8} \\ x \equiv 22 \pmod{24} \end{cases}$$

Problema 22. Deducir los criterios de divisibilidad del 9, del 11, del 5 y del 8.

Problema 23. Sean a y b enteros positivos, demostrar que:

- el menor resto no negativo de $2^a - 1$ módulo $2^b - 1$ es $2^r - 1$, donde r es el menor resto no negativo de a módulo b .
- El máximo común divisor de $2^a - 1$ y $2^b - 1$ es $2^{\text{mcd}(a,b)} - 1$.
- $2^a - 1$ y $2^b - 1$ son coprimos si, y sólo si, a y b son coprimos.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70