

FÍSICA DEL ESTADO SÓLIDO I (Licenciatura)
Problemas resueltos del Bloque B
(Curso 2013-14)

Problema 4.1

Determine los modos de vibración de una cadena compuesta por N átomos, cuyos extremos están fijos.

Solución

Se numeran los átomos de 0 a $(N - 1)$, de manera que se tiene $N - 2$ átomos móviles. Si se denota por γ a la constante recuperadora, la ecuación de fuerzas del átomo n -ésimo se escribe,

$$m\ddot{x}_n = -\gamma(x_n - x_{n-1}) - \gamma(x_n - x_{n+1}) = \gamma(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n) \quad (1)$$

Se busca una solución con la forma,

$$x_n(t) = (A_1 e^{ikna+i\beta_1} + A_2 e^{-ikna+i\beta_2}) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

donde A_i son las amplitudes y β_i las fases.

Aplicando las condiciones de contorno $x_0(t) = 0$; $x_{N-1}(t) = 0$, para todo t , la primera condición implica que,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -A_2 \\ \beta_1 &= \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

y dado que las fases son iguales, se puede hacer $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Sustituyendo (3) en (2) y reorganizando términos se obtiene como solución una onda, cuya parte real se puede escribir

$$x_n(t) = 2A_1 \text{sen}(kna) \text{sen}\omega t \quad (4)$$

que es una onda estacionaria.

Sustituyendo la expresión (4) en la ecuación de movimiento (1), tras operar y simplificar, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} -m\omega^2 &= \gamma 2(\cos ka - 1) \\ m\omega^2 &= 4\gamma \text{sen}^2 \frac{ka}{2} \end{aligned}$$

con los valores de k limitados a, $0 < k < \pi/a$.

La segunda condición de contorno proporciona

$$\text{sen}[(N-1)ka] = 0$$

de donde se deduce que,

$$k = \frac{n\pi}{(N-1)a}, \quad \text{con } n \text{ entero positivo.}$$

Pero $n = 0$ se debe excluir porque, para $k = 0$ todas las partículas están en reposo. Por otra parte, el valor máximo de k , $k_{\max} = \pi/a$, sucede para $n = N - 1$, pero este valor también se debe excluir por la misma razón.

Luego, $n = 1, 2, \dots (N - 2)$.

Es decir, hay tantos modos de vibración como átomos capaces de moverse.

Problema 4.2

Una cadena lineal monoatómica constituida por átomos de masa $m=6,81 \times 10^{-26}$ kg, con una separación de equilibrio de 4,85 Å, tiene una velocidad de propagación para las ondas sonoras de $1,08 \times 10^4$ m/s. Asumiendo un modelo clásico con interacción entre vecinos más próximos, determine el valor de la constante recuperadora y de la máxima frecuencia de los modos.

Solución

Las ondas sonoras tienen lugar para valores de frecuencia correspondientes a la parte lineal de la curva de dispersión. Y la velocidad del sonido es la pendiente de la relación de dispersión $\omega(k)$ para $k \rightarrow 0$.

De la teoría clásica se sabe que la relación de dispersión de la cadena monoatómica es

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4\beta}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$$

y si $k \rightarrow 0$, se puede aproximar, $\sin \frac{ka}{2} \rightarrow \frac{1}{2}ka$,

de manera que la relación de dispersión para valores pequeños de k , se escribe

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4\beta}{m}} \cdot \frac{1}{2}ka = k \sqrt{\frac{\beta a^2}{m}}$$

De aquí, la velocidad del sonido resulta

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\beta a^2}{m}}$$

Y despejando β se obtiene

$$\beta = \frac{v_s^2 m}{a^2} = \frac{(1,08 \times 10^4)^2 \times 6,81 \times 10^{-26}}{(4,85 \times 10^{-10})^2} = 33,8 \text{ J.m}^{-2}$$

Para k muy grande, $k \rightarrow \pi/a$ y se tiene el valor

$$\omega_{\max} = (4\beta/m)^{1/2},$$

por lo que,

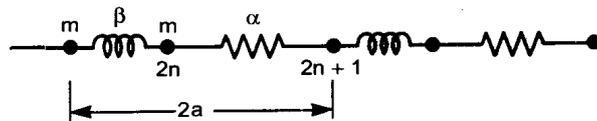
$$\omega_{\max} = \left(\frac{4 \times 33,8}{6,81 \times 10^{-26}} \right)^{1/2} = 4,46 \times 10^{13} \text{ rad/s.}$$

Problema 4.3

Para estudiar las vibraciones reticulares del poliacetileno ($-\text{CH}=\text{CH}-\text{CH}=\text{CH}-$) se le ha asimilado a una cadena lineal de masas iguales, conectadas con muelles de distinta fuerza restauradora, y con espaciado a entre masas. Determine las frecuencias características de la cadena y dibuje las correspondientes curvas de dispersión.

Solución

La cadena se puede representar como el conjunto de átomos enlazados por muelles de la figura adjunta,



La celda unidad tiene una longitud de $2a$ y una base de dos átomos. Las distintas constantes recuperadora entre átomos se denotan por α y β respectivamente.

Para la celda n -ésima, las ecuaciones de movimiento se expresan en este caso,

$$m\ddot{u}_{2n} = \alpha u_{2n+1} + \beta u_{2n-1} - (\alpha + \beta)u_{2n}$$

$$m\ddot{u}_{2n+1} = \alpha u_{2n} + \beta u_{2n+2} - (\alpha + \beta)u_{2n+1}$$

Se buscan soluciones de la forma,

$$u_{2n} = A \cdot \exp[i(2nka - \omega t)]$$

$$u_{2n+1} = B \cdot \exp[i(2n+1)ka - i\omega t],$$

puesto que la posición de los átomos equivalentes en la celda se ha expresado por,

$$x_{2n}(0) = 2na$$

$$x_{2n+1}(0) = (2n+1)a$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento las expresiones correspondientes a las soluciones, operando y simplificando, mediante un proceso análogo al desarrollado en el capítulo 4, se llega a la siguiente relación de dispersión

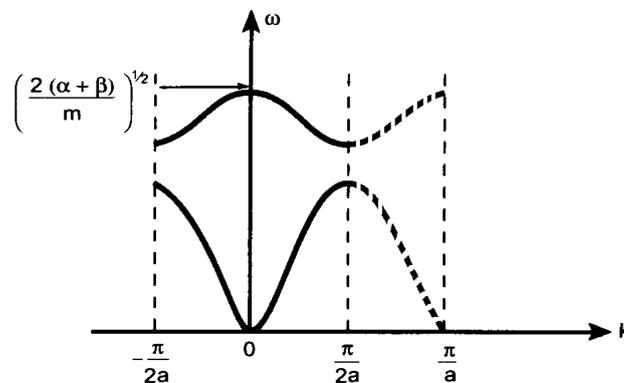
$$\omega^2 = \frac{\alpha + \beta}{m} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \sin^2 ka \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

de donde se pueden obtener los correspondientes valores de ω , para $k=0$ y para $k=\pi/a$, para las ramas acústica y óptica. Estos valores resultan:

$$\text{-- para } k=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_+ = \sqrt{\frac{2(\alpha + \beta)}{m}} \\ \omega_- = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{-- para } k = \pi/2a \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_+ = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \\ \omega_- = \sqrt{\frac{2\beta}{m}} \end{array} \right.$$

Las curvas de dispersión que se obtienen se han representado en la figura adjunta, y muestran dos ramas, una rama acústica y otra óptica. El tamaño de la celda de Brillouin es de $2\pi/2a = \pi/a$.



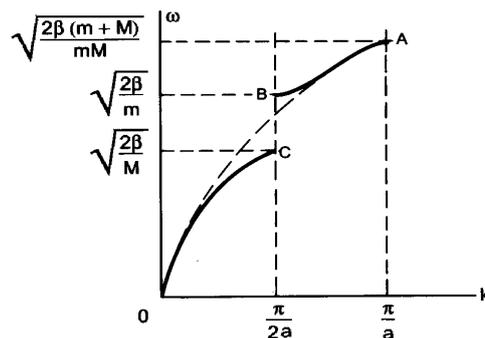
Problema 4.4

Analice el modelo de la cadena lineal biatómica y compare sus resultados con el modelo de una cadena lineal cuando:

- 1) el valor de $M \rightarrow m$,
- 2) cuando las dos masas son iguales, $M = m$

Solución

1) Para el caso en que $m \neq M$, la celda primitiva tiene una dimensión $2a$ (el doble que en la cadena monoatómica) por lo que la zona de Brillouin tiene dimensión mitad, $2\pi/2a$. Sin embargo, en la cadena biatómica existen dos ramas en la zona de Brillouin. Se puede representar (ver figura) la rama inferior entre 0 y $\pi/2a$, y la superior entre $\pi/2a$ y π/a , de esta manera la comparación entre el caso monoatómico y biatómico se facilita; cuando $M \rightarrow m$, los puntos C y B se aproximan y se tendría el caso monodimensional.



Esta forma de representar la relación de dispersión, ω versus k , en la que para cada k sólo hay una frecuencia ω en el rango $-\pi/a < k \leq \pi/a$, se denomina esquema zonal extendido. Aquí se ha escogido porque facilita la comparación entre red monoatómica y biatómica.

2) En el caso $m = M$ el vano existente entre la rama acústica y la rama óptica desaparece y se recobra los resultados de la cadena monoatómica, con la zona de Brillouin definida entre $]-\pi/a, +\pi/a]$. Es fácil ver que la ecuación

$$\omega^2 = \frac{\beta(m+M)}{mM} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mM \sin^2 ka}{(m+M)^2}} \right]$$

se transforma en la relación correspondiente a la cadena monoatómica, y que la zona de Brillouin tiene de tamaño $2\pi/a$.

Problema 4.5

Determine los posibles valores de k , en la primera zona de Brillouin, de un cristal en forma de cubo de lado 1 cm , con estructura cúbica simple con parámetro de red $a = 3 \text{ \AA}$, suponiendo condiciones periódicas o de Born-Kármán. ¿Qué volumen de espacio recíproco se puede asociar a cada k ?

Solución

Al tener el cristal estructura cúbica simple, los vectores base de la celda primitiva \mathbf{a}_i tienen el mismo módulo, a , de manera que el vector de onda \mathbf{k} con condiciones de Born-Kármán se expresa

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{N_1 a} n_1, \frac{2\pi}{N_2 a} n_2, \frac{2\pi}{N_3 a} n_3 \right)$$

con n_i enteros; N_i el número de celdas unidad en cada dirección \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} ; $N_i a = L_i =$ dimensión del cristal en cada dirección.

Así que se puede escribir

$$\mathbf{k} = \frac{n_1}{N_1} \mathbf{a}_1^* + \frac{n_2}{N_2} \mathbf{a}_2^* + \frac{n_3}{N_3} \mathbf{a}_3^*$$

con \mathbf{a}_i^* ($i=1,2,3$) el conjunto de vectores primitivos de la red recíproca con $|\mathbf{a}_i^*| = \frac{2\pi}{a}$.

El volumen de la zona de Brillouin es el volumen de la celda primitiva de la red recíproca, y contienen el mismo número de valores de \mathbf{k} . Para que \mathbf{k} esté dentro de la celda primitiva

$$n_i \leq N_i$$

Luego el número total de valores distintos de \mathbf{k} en ese volumen será,

$$n = N_1 \times N_2 \times N_3$$

En este caso, al tener el cristal forma de cubo, $L_1 = L_2 = L_3$, lo que implica que $N_1 = N_2 = N_3$ y, puesto que $L_i = L = 1$ cm, se tiene $N_i = \frac{10^8}{3}$ y

$$n = \left(\frac{10^8}{3} \right)^3 \cong 3,7 \times 10^{22}$$

valor que coincide con el número de celdas primitivas del cristal.

En cuanto al volumen que ocupa cada \mathbf{k} , dado que el volumen de la celda primitiva de la red recíproca es para este cristal $(2\pi/a)^3$ se tiene,

$$v_k = \frac{\left(\frac{2\pi}{a} \right)^3}{n} = \frac{8\pi^3}{a^3 N_1 N_2 N_3} = \frac{8\pi^3}{V}$$

con V el volumen de la muestra.

Y como $V = 1$ cm³, el volumen de espacio- \mathbf{k} asociado a cada \mathbf{k} en este cristal es,

$$v_k = 8\pi^3 \text{ cm}^{-3}.$$

Problema 4.6

Densidad de modos para una cadena de átomos con extremos fijos.

Solución

Al igual que en el problema P.4.1, se considera una cadena con N átomos, de longitud $L = (N-1)a$, estando fijos los átomos extremos ($u_0 = 0$, $u_{N-1} = 0$). Como se dedujo en ese ejercicio, la solución para el desplazamiento es una onda estacionaria, y las condiciones de contorno proporcionan para k los valores

$$k = \frac{\pi}{L}n \quad \text{con } n = 1, \dots, (N - 2)$$

siendo el intervalo en el que k toma valores el $0 < k < \pi/a$.

Los valores permitidos de k se distribuyen de manera uniforme en el espacio- k , existiendo un intervalo $\Delta k = \frac{\pi}{L}$ entre los valores sucesivos de k .

La densidad o número de modos (o estados) por unidad de intervalo- k es

$$\frac{1}{\Delta k} = \frac{1}{\frac{\pi}{L}} = \frac{L}{\pi}.$$

Y el número de estados por elemento diferencial dk de espacio- k , se expresa para esta cadena

$$g(k)dk = \frac{L}{\pi} dk, \quad 0 < k < \pi/a$$

Problema 4.7

Densidad de estados para un cristal tridimensional, en forma de cubo de arista L , con N^3 celdas primitivas.

Solución

Aplicando condiciones de contorno periódicas, los valores permitidos de \mathbf{k} son:

$$k_x, k_y, k_z = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots, \pm \frac{N\pi}{L}$$

De manera que un valor de \mathbf{k} ocupa un volumen

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \text{ en el espacio-}\mathbf{k}.$$

Por tanto, los valores permitidos de \mathbf{k} por unidad de volumen del espacio- \mathbf{k} son

$$\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} = \frac{V}{8\pi^3} \quad (\text{A})$$

con $V = L^3$, el volumen de la muestra.

Este valor es para cada polarización. (Recuerden que existen tres polarizaciones para cada \mathbf{k} , que en direcciones privilegiadas son del tipo: dos transversales y una longitudinal.)

Considerando (A), el número total de modos con vector de onda menor que un cierto k , para cada polarización, será el que está contenido en una esfera de radio k , es decir

$$N = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{4}{3}\pi k^3$$

Y el número de modos en un intervalo diferencial de volumen será

$$dn = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi k^2 dk$$

Y como,

$$dn = g(k)dk = g(\omega)d\omega$$

se tiene

$$g(\omega)d\omega = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk$$

En consecuencia, la densidad de estados o modos de frecuencia para cada polarización resulta

$$g(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \frac{dk}{d\omega}$$

Expresión a falta de conocer la relación de dispersión para el cristal.

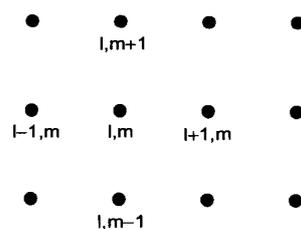
Problema 4.8

Considere un cristal bidimensional en forma de cuadrado de lado L , al que se le puede asociar una red cuadrada constituida por átomos idénticos de masa m separados una distancia a entre ellos. Los átomos se mueven en el plano del cristal y las interacciones entre átomos se limitan a vecinos más próximos, con un valor β para la constante de interacción.

- Determine la relación de dispersión fonónica del cristal.
- Indique la región del espacio- k para la que existen soluciones independientes.
- Calcule la densidad de modos de vibración $g(k)$
- Determine la función densidad de modos de frecuencia para longitudes de onda grandes.

Solución

a) Se busca la ecuación general de movimiento. Como las interacciones son entre vecinos más próximos, de acuerdo con la figura adjunta, esto implica a los átomos (l, m) , $(\pm 1, m)$, $(l, m \pm 1)$.



Puesto que los desplazamientos atómicos tienen lugar en el plano del cristal, se puede escribir la siguiente ecuación de movimiento

$$m\ddot{u} = \beta(u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{l,m}) + \beta(u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{l,m})$$

o bien,

$$m\ddot{u} = \beta(u_{l+1,m} + u_{l-1,m} + u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 4u_{l,m})$$

Se busca una solución en forma de onda plana tipo

$$u_{lm} = A.e^{(ik_x la + ik_y ma - i\omega t)}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento, y operando, se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = 4 \frac{\beta}{m} \left[\text{sen}^2 \frac{k_x a}{2} + \text{sen}^2 \frac{k_y a}{2} \right] \quad (1)$$

b) La ecuación de dispersión es periódica en $ak_x/2$ y $ak_y/2$, con periodo π . Luego,

$$-\frac{\pi}{a} \leq k_x \leq \frac{\pi}{a}; \quad -\frac{\pi}{a} \leq k_y \leq \frac{\pi}{a}$$

Es decir, k_x y k_y toman valores dentro de un cuadrado de lado $2\pi/a$, que es la primera zona de Brillouin de la red cuadrada.

c) Las condiciones de contorno periódicas (las más adecuadas a la solución de onda progresiva utilizada) conducen a que el área que ocupa cada modo sea $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$. De manera que el número de modos que existe por unidad de área de espacio- \mathbf{k} es

$$\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} = \frac{A}{4\pi^2},$$

con A el tamaño del cristal.

El número total de modos con vector de onda inferior a k estarán contenidos en un círculo de radio k , así que

$$n = \frac{\pi k^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2}$$

De donde se deduce que el número de modos contenidos en una corona circular de espesor dk es

$$dn = \frac{L^2}{(2\pi)^2} 2\pi k dk$$

y este valor es $g(k)dk$.

Luego la densidad de modos de vibración es

$$g(k) = \frac{L^2}{(2\pi)^2} 2\pi k$$

d) La densidad espectral de modos de frecuencia, $g(\nu)$, se obtiene de la relación

$$g(\nu) = g(k)(dk/d\nu)$$

Para longitudes de onda grandes, es decir, para k pequeños, haciendo la aproximación $\sin^2 x \approx x^2$ en la expresión de la relación de dispersión (1), y sustituyendo valores se obtiene

$$\omega^2 = 4\pi^2 \nu^2 \approx \frac{\beta}{m} k^2 a^2$$

de donde

$$g(\nu) = \frac{L^2}{(2\pi)^2} 2\pi k \cdot \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{m}{\beta}}$$

Luego,

$$g(\nu) = 2\pi \frac{m}{\beta} \left(\frac{L}{a}\right)^2 \nu$$

o

$$g(\omega) = \frac{m}{\beta} \left(\frac{L}{a}\right)^2 \omega$$

Problema 4.9

Considere un cristal bidimensional de tamaño $L_x \times L_y$, con estructura rectangular centrada, de constantes de red $a = 2 \text{ \AA}$ y $b = 4 \text{ \AA}$.

Determine:

- 1) el espacio- k asociado a cada k ,
- 2) el valor del vector de onda de Debye, k_D .

Solución

1) Si se suponen condiciones periódicas, cíclicas o de Born-Kármán, la celda del espacio- k asociada a un valor de k es un rectángulo de lados $2\pi/L_x$, $2\pi/L_y$.

2) El número de átomos en el cristal es el doble del número de celdas primitivas, y cada celda ocupa un espacio, $\frac{2\pi}{L_x} \cdot \frac{2\pi}{L_y}$.

Puesto que $L_x = N_x \cdot a$ y $L_y = N_y \cdot b$, el número de celdas es de $N_x \cdot N_y$. Todos los osciladores ocuparán una superficie de radio k_D , luego

$$2 \times \left(\frac{L_x}{a} \times \frac{L_y}{b} \right) \times \left(\frac{2\pi}{L_x} \times \frac{2\pi}{L_y} \right) = \pi k_D^2$$

de donde

$$k_D = \sqrt{\frac{8\pi}{a \cdot b}}$$

Problema 4.10

Considere una cadena lineal de N átomos con espaciado a entre ellos y extremos fijos. Sabiendo que la relación de dispersión de la cadena es lineal, determine:

- 1) la energía interna de las vibraciones reticulares,
- 2) la capacidad calorífica, a temperaturas elevadas y bajas.

Solución

- 1) La energía interna viene dada por,

$$U = \int_0^{\omega_D} E(\omega) g(\omega) d\omega$$

Como

$$E(\omega) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega,$$

si no se considera el valor del punto cero, la energía es

$$U = \int_0^{\omega_D} n(\omega) \hbar \omega g(\omega) d\omega$$

con

$$n(\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}$$

Para una cadena lineal con extremos fijos, se sabe que, $g(k) = \frac{L}{\pi}$.

Se indica en el enunciado que la relación de dispersión es lineal, es decir, de la forma $\omega = v_s k$, con v_s la velocidad del sonido. Y teniendo en cuenta que $g(\omega) = g(k) \frac{dk}{d\omega}$, la densidad de modos de frecuencia resulta,

$$g(\omega) = \frac{L}{\pi v_s} = \frac{Na}{\pi v_s}$$

Sustituyendo las expresiones para n y g en la expresión de la energía interna,

$$U = \int_0^{\omega_D} \frac{Na}{\pi v_s} \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} d\omega$$

El valor de ω_D se puede determinar de la relación de normalización

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega = N$$

de donde, tras sustituir y operar se tiene

$$\omega_D = \frac{\pi v_s}{a}$$

2. A) Para temperaturas elevadas, $k_B T \gg \hbar \omega_D$, y se puede hacer la aproximación

$$\exp(\hbar \omega_D / k_B T) \cong 1 + \hbar \omega_D / k_B T + \dots$$

de manera que la energía interna resulta

$$U \cong \frac{Na}{\pi v_s} \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar \omega}{\hbar \omega} k_B T d\omega = \frac{Na}{\pi v_s} k_B T \omega_D = N k_B T$$

La capacidad calorífica se define por,

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$$

por lo que,

$$C_v = N k_B$$

2.B) Para temperaturas bajas, $k_B T \ll \hbar \omega_D$, y en la integral de la energía interna se pueden alterar los límites (0, ω_D) a (0, ∞). Y si se hace $\hbar \omega / k_B T = x$, tras sustituir y algo de manipulación algebraica se puede escribir para la energía

$$U = \frac{Na}{v_s \pi} \frac{(k_B T)^2}{\hbar} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} \frac{2Na (k_B T)^2}{v_s \hbar}$$

(para escribir la última igualdad se ha tenido en cuenta el valor $\pi^2/6$ de la integral).

De la expresión anterior se deduce con facilidad,

$$C_v = \frac{2\pi^2}{3} \frac{Na}{v_s} \frac{k_B^2}{h} T$$

Es interesante comparar esta dependencia con la correspondiente a un sólido tridimensional (véase texto).

Problema 4.11

Determinación del número total de modos, en el modelo de Debye, de un cristal monoatómico isótropo que propaga una onda longitudinal y dos transversales, estas últimas de igual desplazamiento atómico.

Solución

Cada desplazamiento u se puede descomponer en $u = u_l + u_t$, y tanto u_l como u_t deben satisfacer una ecuación de onda que defina la propagación de cada onda con velocidades v_l y v_t , respectivamente.

El número de modos longitudinales en el intervalo de frecuencias $(\omega, \omega + d\omega)$, que se corresponde con un vector de onda de valor comprendido entre k_l y $k_l + dk_l$, se puede expresar (véase capítulo 5 de Kittel) por

$$g_l(\omega)d\omega = \frac{V}{2\pi^2 v_l^3} \omega^2 d\omega$$

De manera análoga, si se considera que los desplazamientos transversales son iguales, se tiene

$$g_t(\omega)d\omega = 2 \times \frac{V}{2\pi^2 v_t^3} \omega^2 d\omega$$

En consecuencia, el número total de modos en el sólido se puede expresar

$$g_T(\omega)d\omega = [g_l(\omega) + g_t(\omega)]d\omega = 3 \frac{V}{2\pi^2 v_{ef}^3} \omega^2 d\omega$$

donde se ha introducido una velocidad efectiva, v_{ef} , que para el caso de un sólido isótropo adopta el valor

$$\frac{3}{v_{ef}^3} = \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}$$

En el caso particular en que la velocidad de los modos longitudinales y transversales sea la misma, $v_l = v_t$, y $v_{ef} = v_s$, con v_s la velocidad del sonido.