

## HOJA 8: ANILLOS (POLINOMIOS)

---

1. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles en los anillos  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$ ,  $\mathbb{C}[x]$ ,  $\mathbb{Z}_2[x]$  y  $\mathbb{Z}_3[x]$ :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad 5x^3 - 35x^2 + 5x - 35, \quad (x^2 - 3)(x^2 + 2x + 2)$$

2. Sea  $K$  un cuerpo y  $f \in K[x]$  un polinomio de grado 1. Demuestra que  $f$  tiene una única raíz en  $K$ .
3. Calcula en  $\mathbb{R}[x]$  el máximo común divisor de  $x^2 + 2x + 1$  y  $x^2 - 1$  usando el algoritmo de Euclides. Calcula una identidad de Bezout para estos polinomios.
4. Calcula en  $\mathbb{R}[x]$  el máximo común divisor de  $x^2 - 4$  y  $x^2 - 5x + 6$  sin utilizar el algoritmo de Euclides.
5. Determina todos los polinomios irreducibles de grados 1, 2, 3 y 4 en  $\mathbb{Z}_2[x]$ .
6. Estudia la reducibilidad de todos los polinomios de  $\mathbb{Z}_3[x]$  de grado menor o igual que 3.
7. Sean  $K$  un cuerpo infinito y  $f(x), g(x) \in K[x]$ . Demuestra que si las funciones  $f, g : K \rightarrow K$  inducidas por esos polinomios son iguales, entonces  $f(x) = g(x)$ .

Pista: Usa el resultado de teoría que dice que un polinomio no constante de grado  $n$  tiene a lo sumo  $n$  raíces.

8. Demuestra que el resultado anterior no es cierto si  $K$  es finito.

Pista: Encuentra dos polinomios distintos que induzcan la misma función. Por ejemplo, prueba que los polinomios  $x^4 + x + 1$  y  $x^3 + x^2 + 1$  en  $\mathbb{Z}_3[x]$  inducen la misma función sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}_3$ . También es interesante que trates de encontrar dos polinomios más sencillos de grados 1 y 2 respectivamente que induzcan la misma función sobre  $\mathbb{Z}_2$ .



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70