Universidad Rey Juan Carlos

Estructuras Algebraicas
Grados con Matemáticas
Curso 2015-16

Hoja 7: Anillos (Teoremas de isomorfía)

1. *a*) Demuestra que el conjunto

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subanillo de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Demuestra que el conjunto

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

es un ideal de T.

c) Demuestra que I no es un ideal de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

d) Demuestra que en el cociente T/I cada clase tiene un representante de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

e) Demuestra que T/I es isomorfo a $\mathbb{R}$.

2. **Segundo teorema de isomorfía.** Sean I, J ideales de un anillo A. Entonces:

a) $I \cap J$ es ideal de I.

b) J es ideal de $I + J$.

c) Los anillos $I/(I \cap J)$ y $(I + J)/J$ son isomorfos.

<u>Pista</u>: Demuestra que la aplicación $f : I \longrightarrow (I + J)/J$ definida como $f(i) := i + J$ es un homomorfismo suprayectivo y aplica el primer teorema de isomorfía.

3. **Tercer teorema de isomorfía.** Sean I, K ideales de un anillo A tales que $I \subseteq K$. Entonces $(A/I)/(K/I)$ y A/K son anillos isomorfos.

<u>Pista</u>: Demuestra que la aplicación $f : A/I \longrightarrow A/K$ definida como $f(a + I) := a + K$ está bien definida y es un homomorfismo suprayectivo; aplica el primer teorema de isomorfía.