TURBORREACTOR PLANO HORIZONTAL:

* Vuelo simétrico horizontal rectilíneo no estacionario. Viraje simétrico horizontal estacionario
$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$ ⟶ 1
* Vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario. Ángulo ϵ. $T = f(E, \epsilon)$.
Cálculo de T_{min}. Gráfica $T - E$. ⟶ 2
* Vuelo simétrico horizontal circunferencial estacionario $\mu \neq 0$. $\mu = 0$. Sin viento ⟶ 3 $\boxed{6.1}$
* Vuelo simétrico horizontal circunferencial $\mu \neq 0$. Viento horizontal. CTE ⟶ 4
* Actuaciones integrales. Autonomía. Alcance. $\hat{\rho} = \hat{\rho}(W)$. ⟶ 5 y 6 y $\boxed{5.1}$ y $\boxed{5.2}$
* Circuito horizontal. Consumo de combustible. ℓ_{min}. ⟶ 7

* Vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario. Ida y vuelta. Viento horizontal en x-y Norte
Ángulo Ψ. ⟶ 8
* Vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario Ida y vuelta. Viento horizontal CTE.
Remolque de ángulo nulo con la vertical ⟶ 9
* Vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario. Remolque de ángulo δ con la vertical
$\delta = \delta(t)$ ⟶ 10 y $\boxed{7.1}$
* Vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario. Viento horizontal en x-y Oeste. Ángulo Ψ.
Lanzamiento de carga. Trayectoria del cuerpo lanzable. Trayectoria del avión ⟶ 11
* Vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario. Lanzamiento de carga. $C_{D_e} \neq 0$.
JUN/11 ⟶ 12

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 20.06.03

E. Final Junio

M37

PROBLEMA 1º

Con objeto de comparar actuaciones puntuales de aviones acrobáticos y de caza, se definen de forma cuantitativa los dos conceptos siguientes: "Maniobrabilidad", M, es el módulo de la derivada con respecto al tiempo (en un sistema inercial) del vector velocidad del centro de masas del avión, y "Agilidad", A, es el módulo de la derivada con respecto al tiempo (en un sistema inercial) del vector aceleración del centro de masas del avión.

Se supone además que son conocidas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el peso es constante, el régimen de vuelo es subsónico incompresible, la polar es parabólica de coeficientes constantes, la fuerza aerodinámica lateral es despreciable, etc.), que el avión siempre vuela con empuje máximo constante y conocido, T_{max}, dirigido según el eje x_w, que el sistema de ejes tierra es inercial, y que ρ y g son constantes conocidas.

Se pide:

1º) En vuelo simétrico horizontal rectilíneo, determinar M en función de la velocidad adimensional de vuelo, $\hat{V}$, e indicar cómo se determinaría M en función del tiempo. Determinar asimismo la maniobrabilidad máxima, M_{max}, y la(s) velocidad(es) adimensional(es) para la(s) que ésta se produce.

2º) En vuelo simétrico horizontal rectilíneo, determinar A en función de la velocidad adimensional de vuelo, $\hat{V}$, e indicar cómo se determinaría A en función del tiempo. Determinar asimismo la agilidad mínima, A_{min}, y la(s) velocidad(es) adimensional(es) para la(s) que ésta se produce.

3º) En viraje simétrico horizontal estacionario, determinar M en función de la velocidad adimensional de vuelo, $\hat{V}$. Determinar asimismo la maniobrabilidad máxima, M_{max}, y la(s) velocidad(es) adimensional(es) para la(s) que ésta se produce.

4º) En viraje simétrico horizontal estacionario, determinar A en función de la velocidad adimensional de vuelo, $\hat{V}$. Determinar asimismo la agilidad máxima, A_{max}, y la(s) velocidad(es) adimensional(es) para la(s) que ésta se produce.

1

1) $M = \left|\frac{dV}{dt}\right|$ $\quad \hat{V} = \frac{V}{V_B}$ $\quad V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}$ $\quad T_B = \frac{W}{E_M}$ $\quad E_M = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0}K}}$ $\quad \hat{T} = \frac{T}{T_B}$

$$T_{MAX} - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \quad (1)$$

$$L = W \quad (2)$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + \frac{4W^2K}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$\frac{T_{MAX}}{W} - \frac{D}{W} = \frac{1}{g}\cdot M \; ; \; \frac{T_{MAX}E_M}{W} - \frac{DE_M}{W} = \frac{E_M}{g}\cdot M \rightsquigarrow \hat{T}_{MAX} - \hat{D} = \frac{E_M}{g} M \quad (I)$$

$$\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right) \quad (II)$$

$$\boxed{M = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \frac{g}{E_M}\left[\hat{T}_{MAX} - \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)\right]}$$

$$\frac{dM}{d\hat{V}} = \frac{-g}{2E_M}\left(2\hat{V} - \frac{2}{\hat{V}^3}\right) = 0 \Rightarrow \cancel{2}\hat{V} = \frac{\cancel{2}}{\hat{V}^3} \longrightarrow \hat{V}^4 = 1 \rightsquigarrow \boxed{\hat{V}_{MIN} = 1}$$

$$\boxed{M_{MAX} = \frac{g}{E_M}\left[\hat{T}_{MAX} - 1\right]}$$

2) $$A = \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{d\hat{V}}\cdot\overset{\to M}{\frac{d\hat{V}}{dt}} = \frac{-g}{2E_M}\left(2\hat{V} - \frac{2}{\hat{V}^3}\right)\cdot\frac{g}{E_M}\left[\hat{T}_{MAX} - \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)\right]$$

$$A = \frac{-g^2}{2E_M^2}\cdot\left(2\hat{V} - \frac{2}{\hat{V}^3}\right)\left(\hat{T}_{MAX} - \frac{1}{2}\hat{V}^2 - \frac{1}{2\hat{V}^2}\right) = \frac{-g^2}{2E_M^2}\left[2\hat{T}_{MAX}\hat{V} - \hat{V}^3 - \cancel{\frac{1}{\hat{V}}} - \frac{2\hat{T}_{MAX}}{\hat{V}^3} + \cancel{\frac{1}{\hat{V}}} + \frac{1}{\hat{V}^5}\right]$$

$$\boxed{A = \frac{-g^2}{2E_M^2}\left[2\hat{T}_{MAX}\left(\hat{V} - \frac{1}{\hat{V}^3}\right) - \hat{V}^3 + \frac{1}{\hat{V}^5}\right]}$$

3) $T_{MAX} - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt}$; $\hat{T}_{MAX} - \hat{D} = \frac{E_m}{g}\cdot M$

$\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right)$

$L \operatorname{sen}\mu = \frac{W}{g} V \dot{X}$; $n \operatorname{sen}\mu - \hat{V}\frac{V_B \dot{X}}{g} = 0$; $n^2 \operatorname{sen}^2\mu = \frac{\hat{V}^2 V_B^2 \dot{X}^2}{g}$ (1)

$W - L\cos\mu$; $n\cos\mu - 1 = 0$; $n^2\cos^2\mu = 1$ (2)

$n^2\operatorname{sen}^2\mu + n^2\cos^2\mu = n^2(\cancel{\operatorname{sen}^2\mu + \cos^2\mu}^{\,1}) = \frac{\hat{V}^2 V_B^2 \cdot \dot{X}^2}{g} + 1 \rightarrow n^2 = \frac{\hat{V}^2 V_B^2 V^2}{R^2 g} + 1 = \frac{\hat{V}^4 V_B^4}{R^2 g} + 1$

$\hat{T}_{MAX} - \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{\left(\frac{\hat{V}^4 V_B^4}{R^2 g} + 1\right)}{\hat{V}^2}\right) = \frac{E_m}{g} M$

$$\boxed{M = \frac{g}{E_m}\left[\hat{T}_{MAX} - \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{\hat{V}^2 V_B^4}{g R^2} + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)\right]}$$

$\frac{dM}{d\hat{V}} = \frac{g}{E_m}\left[-\frac{1}{2}\left(2\hat{V} + \frac{2\hat{V} V_B^4}{g R^2} - \frac{2}{\hat{V}^3}\right)\right] = 0 \Rightarrow 2\hat{V}^4 + \frac{2\hat{V}^4 V_B^4}{g R^2} = \cancel{2}$

$\hat{V}^4 = \frac{1}{\left(1 + \frac{V_B^4}{g R^2}\right)}$; $\boxed{\hat{V}_{Mi} = \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \frac{V_B^4}{g R^2}}}}$

$$\boxed{M_{MAX} = \frac{g}{E_m}\cdot\left\{\hat{T}_{MAX} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{V_B^4}{g R^2}}} + \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{V_B^4}{g R^2}}}\cdot\frac{2 V_B^4}{g R^2} - \sqrt{1 + \frac{V_B^4}{g R^2}}\right]\right\}}$$

4) $A = \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{d\hat{V}}\cdot\frac{d\hat{V}}{dt} = M\cdot\frac{dM}{d\hat{V}}$

$$\boxed{A = \frac{g^2}{E_m}\left[\hat{T}_{MAX} - \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{\hat{V}^2 V_B^4}{g R^2} + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)\right]\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(2\hat{V} + \frac{2\hat{V} V_B^4}{g R^2} - \frac{2}{\hat{V}^3}\right)\right]}$$

PROBLEMA $\boxed{1^{\circ}\ \text{Ex - Junio 03}}$

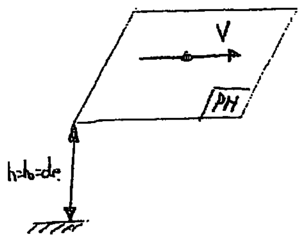
Con objeto de comparar actuaciones puntuales de aviones acrobáticos y de caza, se definen de forma cuantitativa los 2 conceptos siguientes:

- "Maniobrabilidad", M : es el módulo de la derivada con respecto al tiempo (en un sist. inercial) del vector velocidad del centro de masas del avión. $\Rightarrow M = \left|\frac{d\vec{V}_g}{dt}\right|$
- "Agilidad", A : es el módulo de la derivada con respecto al tiempo (en un sist. inercial) del vector aceleración del centro de masas del avión. $\Rightarrow A = \left|\frac{d\vec{a}_g}{dt}\right|$

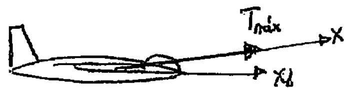
Se pide:

1º) En VSHR, determinar M en función de la velocidad adimensional de vuelo ($\hat{V}$) e indicar cómo se determinaría M en función del tiempo.
Determinar asimismo la maniobrabilidad máxima, $M_{máx}$, y la(s) velocidad(es) adimensional(es) para la(s) que ésta se produce.

VSHR
- Plano horizontal $h = h_0 = cte \xrightarrow{(\dot{h} = V \operatorname{sen}\gamma = 0)} \gamma = 0$
- Vuelo simétrico : $\beta = \nu = 0 \longrightarrow Q = 0$



No nos dicen nada del viento $\Rightarrow \vec{V}_g = \vec{V}$



$$M = \left|\frac{d\vec{V}}{dt}\right|$$

Definimos la velocidad adimensional $\hat{V} = \frac{V}{V_E}$ con $V_E = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \cdot \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}$

$$\vec{V} = V \cdot \vec{i}_w = \hat{V} \cdot V_E \cdot \vec{i}_w$$

$$M = \left|\frac{d\vec{V}}{dt}\right| = \left|\frac{d(\hat{V} \cdot V_E \cdot \vec{i}_w)}{dt}\right|$$

VSHR

$$L = W \longrightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = W \longrightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$T - D = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \longrightarrow T_{máx} - \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2) = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \ ; \quad T_{máx} - \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D_0} + K \cdot \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt}$$

$$H = \left| \frac{g}{W} T_{máx} - g\sqrt{C_{D0} k} \cdot \hat{V}^2 \left(1+\frac{1}{\hat{V}^4}\right) \right| \; ; \; \frac{dH}{d\hat{V}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \; -g\sqrt{C_{D0} k}\, 2\hat{V}\left(1+\frac{1}{\hat{V}^4}\right) - g\sqrt{C_{D0} k}\, \hat{V}^2 \left(-4\frac{1}{\hat{V}^5}\right)$$

$$-2g\sqrt{kC_{D0}}\, \hat{V}\left(1+\frac{1}{\hat{V}^4}\right) + 4g\sqrt{kC_{D0}}\, \frac{1}{\hat{V}^3} = 0$$

$$2\frac{1}{\hat{V}^3} = \hat{V} + \frac{1}{\hat{V}^3} \; ; \; \hat{V} = \frac{1}{\hat{V}^3} \qquad \hat{V}^4 = 1 \rightarrow \hat{V}_{Hmáx} = \pm 1$$

$$H_{máx} = H(\hat{V}_{Hmáx}) = \left| \frac{g}{W} T_{máx} - 2g\sqrt{C_{D0} k} \right|$$

2°)

$$A = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \left|\frac{d^2V}{dt^2}\right| = \left| \frac{d\left(\frac{dV}{dt}\right)}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} \right| = \left| \frac{dH}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} \right|$$

$$A = \left| \frac{1}{V_B} \cdot 2g\sqrt{C_{D0} k}\, \hat{V} \left(\frac{1}{\hat{V}^4} - 1\right) \right| \left| \frac{g}{W} T_{máx} - g\sqrt{C_{D0} k} \cdot \hat{V}^2 \cdot \left(1+\frac{1}{\hat{V}^4}\right) \right| \Rightarrow$$

$$\underline{A = \left| \frac{g}{W} T_{máx} \frac{1}{V_B} 2g\sqrt{C_{D0} k}\, \hat{V}\left(\frac{1}{\hat{V}^4} - 1\right) - \frac{2g^2}{V_B} C_{D0} k\, \hat{V}^3 \left(\frac{1}{\hat{V}^8} - 1\right) \right|}$$

$$\frac{dA}{d\hat{V}} = 0.$$

1º Ex-Junio 03 (Continuación)

Repetir el problema pero para viraje simétrico horizontal estacionario

3º) En viraje simétrico horizontal estacionario, determinar M en función de la velocidad adimensional de vuelo $\hat{V}$. Determinar asimismo la maniobrabilidad máxima, $M_{máx}$, y la(s) velocidad(es) adimensional(es) para la(s) que ésta se produce

Es igual que antes, pero ahora se parte de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} L = n\cdot W \rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S\cdot C_L = W\cdot n \rightarrow C_L = \frac{2\cdot W\cdot n}{\rho S V^2} \\ T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \rightarrow T_{máx} - \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D_0}+K\cdot C_L^2) = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \; ; \; T_{máx} - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + K\cdot\frac{4W^2 n^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{W}\cdot T_{máx} - g\cdot V^2\cdot\underbrace{\left(\frac{\rho S}{2W}\right)}_{=\frac{\sqrt{K/C_{D_0}}}{V_B^2}}\cdot\left(C_{D_0} + K\cdot\underbrace{\left(\frac{2W}{\rho S}\right)^2}_{=\frac{V_B^4}{K/C_{D_0}}}\cdot\frac{n^2}{V^4}\right) = \frac{g}{W}\cdot T_{máx} - g\cdot\left(\frac{V}{V_B}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{K}{C_{D_0}}}\cdot\left(C_{D_0} + C_{D_0}\cdot\left(\frac{V_B}{V}\right)^4\cdot n^2\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{W}\cdot T_{máx} - g\cdot\sqrt{K\cdot C_{D_0}}\cdot\hat{V}^2\cdot\left(1 + \frac{n^2}{\hat{V}^4}\right)$$

$$\boxed{M = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \left|\frac{g}{W}\cdot T_{máx} - g\cdot\sqrt{K\cdot C_{D_0}}\cdot\hat{V}^2\left(1+\frac{n^2}{\hat{V}^4}\right)\right|}$$

$$\frac{dM}{d\hat{V}} = 0 \; ; \; -g\cdot\sqrt{K\cdot C_{D_0}}\cdot 2\hat{V}\left(1+\frac{n^2}{\hat{V}^4}\right) - g\sqrt{K\cdot C_{D_0}}\cdot\hat{V}^2\left(-4\cdot\frac{n^2}{\hat{V}^5}\right)$$

$$-\hat{V}\left(1+\frac{n^2}{\hat{V}^4}\right) + 2\cdot\frac{n^2}{\hat{V}^3} = 0 \; ; \; \hat{V} = \frac{n^2}{\hat{V}^3} \; ; \; \boxed{\hat{V}^4 = n^2} \Longrightarrow \boxed{\hat{V}_{M_{máx}} = \pm\sqrt{n}}$$

$$\boxed{M_{máx} = M(\hat{V}_{M_{máx}}) = \left|\frac{g}{W}\cdot T_{máx} - 2g\cdot\sqrt{K\cdot C_{D_0}}\cdot n\right|}$$

[redacted]

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

CÁTEDRA DE MECÁNICA DEL VUELO — 22.09.03

E. Final Septiembre

H38 X

PROBLEMA 1º

Un avión de caza provisto de un turborreactor con empuje orientable, efectúa un vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con las alas a nivel. La orientación del empuje la puede controlar el piloto mediante el ángulo de ataque del empuje, ε $(0 \leq \varepsilon \leq \pi/2)$.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso W es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación sólo depende del ángulo de ataque y su valor máximo es C_{Lmax}, etc.).

b) La altitud de vuelo, h, y la densidad, ρ, son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas de fuerzas en ejes viento y de ecuaciones cinemáticas lineales, y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Determinar el empuje en función de datos del problema y de los grados de libertad matemáticos del sistema, tomando como grados de libertad la eficiencia aerodinámica, E, el ángulo de ataque del empuje, ε, y en caso de que sea necesario algún otro que se considere adecuado.

3º) Para un valor fijado de E, determinar el ángulo de ataque del empuje que minimiza el empuje, así como ese empuje mínimo, T_{min}. Representar esquemáticamente el empuje en función del ángulo de ataque del empuje, para E fijado.

4º) Determinar el mínimo valor posible de T_{min} y compararlo con el correspondiente valor para un avión sin empuje orientable. A la vista del resultado, discutir si la instalación en los cazas del empuje orientable se efectúa por motivos de T_{min}.

5º) Determinar la velocidad de vuelo a la que se vuela con el empuje determinado en el apartado anterior y compararla con la velocidad de mínimo empuje para un avión sin empuje orientable.

(2)

1) $T\cos\varepsilon - D = 0 \quad (1)$

$\cancel{W\sin\gamma}^{\,0} - \frac{W}{g}\dot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = 0$

$-T\sin\varepsilon - L + W = 0 \quad (2)$

$\frac{dx_e}{dt} = V\cos\cancel{\chi}^{\,1\,(\text{rectilíneo})} \quad (3)$

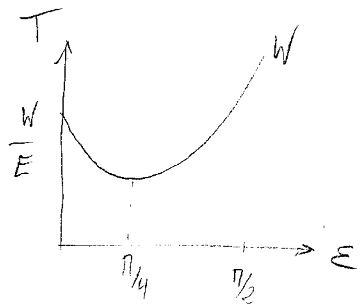
$\frac{dy_e}{dt} = V\sin\cancel{\chi}^{\,0\,(\text{rectilíneo})} \quad (4)$

$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \quad (5) \quad ; \quad C_L = C_{L\alpha}\,\alpha \quad (7)$

$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) \quad (6)$

Nº incógnitas: $T, \varepsilon, D, L, x_e, V, C_L, \alpha = 8$

Nº ecs: 6 $\rightarrow$ $\boxed{NGDL = 2}$



2) $(2) \rightarrow -\frac{T\sin\varepsilon}{D} - E + \frac{W}{D} = 0$

$(1) \rightarrow D = T\cos\varepsilon$

$\rightarrow -\tan\varepsilon - E + \frac{W}{T\cos\varepsilon} = 0 \;; \; -\tan\varepsilon - E = \frac{-W}{T\cos\varepsilon}$

$T\cos\varepsilon = \frac{W}{\tan\varepsilon + E} \rightarrow \boxed{T = \frac{W}{\sin\varepsilon + E\cos\varepsilon}}$

3) $\frac{dT}{d\varepsilon} = \frac{-W(\cos\varepsilon - E\sin\varepsilon)}{(\sin\varepsilon + E\cos\varepsilon)^2} = 0 \Rightarrow \cos\varepsilon = E\sin\varepsilon \;; \; 1 = E\tan\varepsilon = E\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}$

$\boxed{\varepsilon = \arctan\frac{1}{E}}$

$\boxed{T_{MIN} = \frac{W}{\frac{\cos\varepsilon}{E} + E\cos\varepsilon} = \frac{W}{\cos\varepsilon\left(E + \frac{1}{E}\right)} = \frac{W}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{E}{1+E^2} = \frac{W}{\cos\left(\arctan\frac{1}{E}\right)}\cdot\frac{E}{1+E^2} = \frac{W}{\sqrt{1+E^2}}}$

4)

5) $T_{min}\Big|_{min} = \dfrac{W}{\sqrt{1+E_{MAX}^2}}$

$$\frac{W}{\sqrt{1+E_{MAX}^2}}\, G_\epsilon\, \mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(G_0 + K G_{MAX}^2\right)$$

$$V^2 = \frac{2W}{\sqrt{1+E_{MAX}^2}} \cdot \frac{G_\epsilon\, \mathcal{E}}{\rho S\left(G_0 + K G_{OPT}^2\right)} \quad ; \quad \boxed{V_{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{2W}{\sqrt{1+E_{MAX}^2}} \cdot \frac{\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{E}\right)}{\rho S\left(G_0 + K G_{OPT}\right)}}}$$

$$T_{min} = D = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(G_0 + K G_L^2\right)$$

$$V^2 = \frac{2W}{E_{MAX}} \cdot \frac{1}{\rho S\left(G_0 + K G_{OPT}^2\right)} \quad ; \quad \boxed{V = \sqrt{\frac{2W}{E_{MAX}} \cdot \frac{1}{\rho S\left(G_0 + K G_{OPT}\right)}}}$$

$$\underline{V > V_{\mathcal{E}}}$$

6) $V_{\mathcal{E}_{MIN}} = \cancel{\sqrt{\dfrac{2W}{\sqrt{1+E_{MAX}^2}} \cdot \dfrac{G_\epsilon\, \mathcal{E}}{\rho S\left(G_0 + K G_{MAX}\right)}}}^{\,0} \Rightarrow \mathcal{E} = \dfrac{\pi}{2} \rightsquigarrow V_{\mathcal{E}_{MIN}} = 0$

Por que sea posible T según la línea de sustentación L más L debe ser mayor que W

(1) $\Rightarrow D = 0$

(2) $\Rightarrow T + L > W$

PROBLEMA $\boxed{1^{\circ}\ \text{Ex - Sept 03}}$

Un avión de caza provisto de un turborreactor con empuje orientable, efectúa un vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con alas a nivel. La orientación del empuje la puede controlar el piloto mediante el ángulo de ataque del empuje, ε $(0 \le \varepsilon \le \frac{\pi}{2})$

Se pide:

1º) Plantear el sist. de ecs. dinámicas de fuerzas en ejes viento y de ecs. cinemáticas lineales, y determinar el nº de gdl matemáticos del sistema.

VHSRE (Vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario)

- Vuelo horizontal $\rightarrow$ $\gamma = 0$
- Vuelo simétrico $\rightarrow$ $\beta = \nu = 0$ $\rightarrow Q = 0$
- Vuelo rectilíneo $\rightarrow$ $\chi = cte = 0$
- Vuelo estacionario $\rightarrow$ $\dot{V} = 0$
- Alas a nivel $\rightarrow$ $\phi = 0$

3ess

Ecs. generales $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} = V \\ &(h = h_i = cte) \\ &T \cdot \cos\varepsilon - D = 0 \\ &T \cdot \operatorname{sen}\varepsilon + L - W = 0 \end{aligned}}$$

~~3 ecs.~~

~~5 Incógnitas~~ : x, V, T, ε, m $\Rightarrow$ $5 - 3 = 2gdl$

D, L

ε y ε

incógnitas

$x, V, T, \varepsilon, D, L, C_D, C_L,$

3ecs + 3ess

$8 - 6 = \underline{2gdl}$

$$\begin{cases} C_D = C_{D0} + k C_L^2 & C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \\ \cancel{C_L = C_{L0} + \alpha C_{L\alpha}} & C_L = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \end{cases}$$

C_D, C_L, α

2º) Determinar el empuje en función de datos del problema y de los gdl matemáticos del sistema, tomando como gdl la eficiencia aerodinámica (E), el ángulo de ataque del empuje (ε), y, en caso de que sea necesario algún otro que se considere adecuado.

$$2\ gdl \begin{cases} E = \dfrac{L}{D} \equiv \text{eficiencia} \\ \varepsilon \end{cases}$$

$$T \cdot \cos\varepsilon = D$$
$$T \cdot \operatorname{sen}\varepsilon = m \cdot g - L \qquad \div D \Rightarrow \frac{T}{D} \cdot \operatorname{sen}\varepsilon = \frac{m \cdot g}{D} - \overset{E}{\frac{L}{D}}$$

$D = T \cdot \cos\varepsilon$; $D = T \cdot \cos\varepsilon$

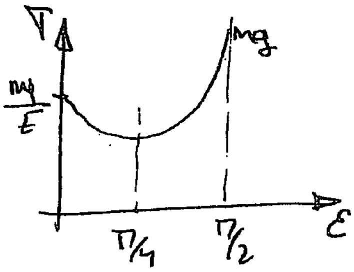
$$\boxed{T = \frac{m \cdot g}{\operatorname{sen}\varepsilon + E\cos\varepsilon}}$$

3) $T = \frac{mg}{\sin\varepsilon + E\cos\varepsilon}$ $\qquad T_{min}: \frac{dT}{d\varepsilon} = 0$

$$mg\left(\frac{-(\cos\varepsilon - E\sin\varepsilon)}{(\sin\varepsilon + E\cos\varepsilon)^2}\right) = 0 \; ; \; \cos\varepsilon - E\sin\varepsilon = 0$$

$$\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = tg\,\varepsilon = 1/E \rightarrow \varepsilon = arctg\left(\frac{1}{E}\right)$$

$$T_{min} = \frac{mg/\cos\varepsilon}{\underbrace{\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}}_{\frac{1}{E}} + E} = \frac{E}{1+E^2}\,\frac{mg}{\cos(arctg\frac{1}{E})} \rightarrow T_{min} = \frac{mg}{\sqrt{1+E^2}}$$



4) $T_{min} = \frac{mg}{\sqrt{1+E^2}} \rightarrow (T_{min})_{min} = \frac{mg}{\sqrt{1+E^2_{máx}}}$

diferencia mínima, No se afecta x [illegible]

Av. sin empuje orientable: $\varepsilon = 0$

$T - D = 0$
$L - W = 0$ $\rightarrow T = D = \frac{1}{2}\rho\, S\,(C_{D0} + K C_L^2)\, V^2$

$$\boxed{T_{min} = D_{min} = \frac{W}{E_{máx}}}$$

1º Ex-Sept 03 (Continuación)

5º) Determinar la velocidad de vuelo a la que vuela con el empuje determinado en el apartado anterior y compararla con la velocidad de mínimo empuje para un avión sin empuje orientable

+ Con empuje $T = \dfrac{mg}{\sqrt{1+E_{máx}^2}}$

$$T \cdot \cos\varepsilon = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D_0} + K \cdot C_L^2)$$

$$\frac{mg}{\sqrt{1+E_{máx}^2}} \cdot \cos\varepsilon = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D_0} + K \cdot C_L^2) \longrightarrow V^2 = \frac{2 \cdot mg}{\sqrt{1+E_{máx}^2}} \cdot \frac{\cos\varepsilon}{\rho S\,(C_{D_0} + K \cdot C_L^2)}$$

$$\boxed{V_{\substack{mín\\ orientable}} = \sqrt{\frac{2 \cdot mg}{\sqrt{1+E_{máx}^2}} \cdot \frac{\cos\varepsilon}{\rho S\,(C_{D_0} + K \cdot C_{L_{máx}}^2)}}}$$

* Si $\varepsilon \to \frac{\pi}{2}$

$V_{mín} \longrightarrow 0$

+ Avión sin empuje orientable

$$\underset{\frac{mg}{E_{máx}}}{T} = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D_0} + K \cdot C_L^2) \longrightarrow V^2 = \frac{2 \cdot mg}{E_{máx}} \cdot \frac{1}{\rho S \cdot (C_{D_0} + K \cdot C_L^2)}$$

$$\boxed{V_{mín} = \sqrt{\frac{2 \cdot mg}{E_{máx}} \cdot \frac{1}{\rho S\,(C_{D_0} + K \cdot C_{L_{máx}}^2)}}}$$

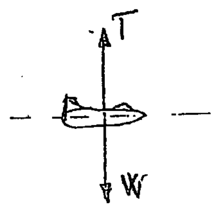
6º) Determinar la velocidad mínima de vuelo, así como las condiciones que deben cumplirse para que ésta se pueda alcanzar.

La velocidad mínima se alcanza cuando $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{V_{mín} = 0}$

(empuje vertical)

Y la condición que debe cumplirse para que se alcance es $\boxed{T \geq W}$

(que el avión no se caiga)



PROBLEMA 1º

Un avión de caza provisto de un turborreactor con empuje orientable, efectúa un vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con las alas a nivel. La orientación del empuje la puede controlar el piloto mediante el ángulo de ataque del empuje, ε $(0 \le \varepsilon \le \pi/2)$.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso W es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación sólo depende del ángulo de ataque y su valor máximo es C_{Lmax}, etc.).

b) La altitud de vuelo, h, y la densidad, ρ, son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas de fuerzas en ejes viento y de ecuaciones cinemáticas lineales, y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Determinar el empuje en función de datos del problema y de los grados de libertad matemáticos del sistema, tomando como grados de libertad la eficiencia aerodinámica, E, el ángulo de ataque del empuje, ε, y en caso de que sea necesario algún otro que se considere adecuado.

3º) Para un valor fijado de E, determinar el ángulo de ataque del empuje que minimiza el empuje, así como ese empuje mínimo, T_{min}. Representar esquemáticamente el empuje en función del ángulo de ataque del empuje, para E fijado.

4º) Determinar el mínimo valor posible de T_{min} y compararlo con el correspondiente valor para un avión sin empuje orientable. A la vista del resultado, discutir si la instalación en los cazas del empuje orientable se efectúa por motivos de T_{min}.

5º) Determinar la velocidad de vuelo a la que se vuela con el empuje determinado en el apartado anterior y compararla con la velocidad de mínimo empuje para un avión sin empuje orientable.

TIEMPO CONCEDIDO: 1

Un avión de caza provisto de un turborreactor con empuje orientable [...] el ángulo de ataque del empuje, ε $(0 \leq \varepsilon \leq \pi/2)$.

Supuesto:

a) Se conocen todas caract. geom., másicas y aerod.

b) h y ρ son constantes

Se pide:

a) Plantear sistema de ecuaciones dinámicas y cinemáticas y det nº de GL

CINEMÁTICAS

$$\hat{\dot{x}}_e = \hat{V} \cancel{\cos\gamma}^{1} \cos\chi$$
$$\hat{\dot{y}}_e = \hat{V} \cancel{\cos\gamma}^{1} \sin\chi$$
$$\hat{\dot{z}}_e = -\hat{V} \cancel{\sin\gamma}^{0}$$

Donde sabemos que $\gamma = 0$ y que $\chi = cte$ → rectilíneo

DINÁMICAS

$$\hat{T}\cos\varepsilon - \hat{D} - E_m \cancel{\sin\gamma}^{0} = 0$$
$$\hat{T}\sin\varepsilon + n E_m - E_m \cancel{\cos\gamma}^{1} = 0$$

AERODINÁMICAS

$$\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) \qquad n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{Lopt}}$$

x

$$\boxed{N = 10 - 8 = 2 \text{ gl}}$$

2\ Determinar $T = T(E, \varepsilon)$

Buscamos una solución dimensional de modo que podemos partir de $T\cos\varepsilon = D$ y $W = T\sin\varepsilon + L$.

Teniendo en cuenta que $E = \frac{L}{D}$

$$W = T\sin\varepsilon + L \longrightarrow L = W - T\sin\varepsilon$$

$$\frac{L}{D} = \frac{W}{D} - \frac{T\sin\varepsilon}{D} = E = \frac{W - T\sin\varepsilon}{T\cos\varepsilon}$$

Y despejando T tenemos

$$\boxed{T = \frac{W}{E\cos\varepsilon + \sin\varepsilon}}$$

3\ Para $E = cte$ determinar $\varepsilon_{T_{min}}$ y T_{min}. Representar T para E fijo y ε variable.

Derivamos para buscar el mínimo.

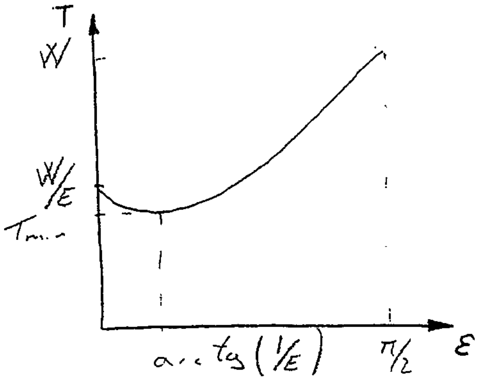
$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \longrightarrow -W\frac{1}{(E\cos\varepsilon + \sin\varepsilon)^2}(-E\sin\varepsilon + \cos\varepsilon) = 0$$

$$-E\sin\varepsilon + \cos\varepsilon = 0 \longrightarrow \boxed{tg\,\varepsilon = \frac{1}{E}}$$

Sustituyendo este valor en la expresión del empuje

$$= \frac{\quad}{E^2+1} \longrightarrow \boxed{T_{min} = \frac{W}{\sqrt{E^2+1}}}$$

Representación



Podemos encontrar una representación exacta en el anexo.

4\ Determinar $(T_{min})_{min}$ y compararlo con un avión sin empuje orientable. Discusión si $\varepsilon \neq$ cte es por razones de T_{min}.

El empuje mínimo global se obtendrá para E_m máxima. Es decir

$$(T_{min})_{min} = \frac{W}{\sqrt{E_m^2+1}}$$

Si no tenemos empuje orientable sabemos que

$$(T_{min})_{min} = \frac{W}{E_m}$$

En este caso $T_{min} = (T_{min})_{min}$ ya que nos quedamos con un solo grado de libertad.

... + ... de más de un 1%. No se incluían

consiguen mejoras

5\ Velocidad para $(T_{min})_{\varepsilon \neq 0}$ y para $(T_{min})_{\varepsilon = 0}$.

Comparación.

Para el caso $\varepsilon = 0$ sabemos que $n = 1$ ya que el vuelo es horizontal rectilíneo. Además, volamos según E_m. Utilizando $n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{Lopt}}$ tenemos que:

$$1 = \hat{V}^2 \frac{C_{Lopt}}{C_{Lopt}} \qquad (E_m \rightarrow C_{Lopt})$$

Luego $\hat{V} = 1 \rightarrow V = V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lopt}}}$

En el caso de $\varepsilon \neq 0$ también volamos a $E_m \rightarrow C_{Lopt}$ aunque no podemos decir nada sobre n. Luego

$$\hat{V} = \sqrt{n} \qquad \left(n = \hat{V}^2 \frac{C_{Lopt}}{C_{Lopt}} \right)$$

Además sabemos que $\hat{T} \cos \varepsilon = \hat{D}$ y que $\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} \right)$. Si combinamos las tres obtenemos

Luego

$$\chi \frac{E_m^2}{E_m^2+1} = \chi \hat{V}^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{opt}}}} \sqrt{\frac{E_m^2}{E_m^2+1}}$$

De modo que

$$\frac{V_{T min \; \varepsilon \neq 0}}{V_{T min \; \varepsilon = 0}} = \frac{E_m}{\sqrt{E_m^2+1}}$$

Como puede verse en la tabla y gráfica incluida en el anexo ambas velocidades son muy parecidas. La velocidad para empuje mínimo con tobera orientable es algo menor que con tobera no orientable.

6) V_{min} de vuelo. Condiciones para alcanzarla.

La gran ventaja de un avión con tobera orientable es la velocidad mínima de vuelo. Esta V_{min} es 0 ya que si $\varepsilon = \pi/2$

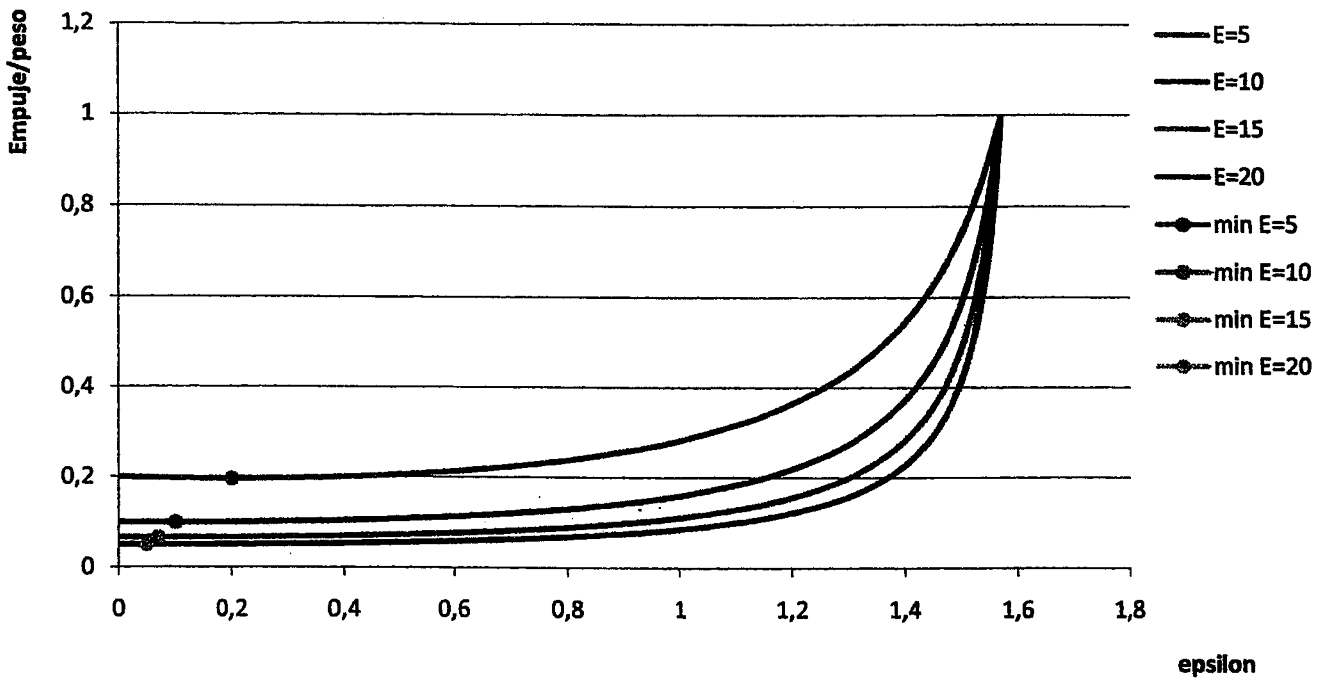
$$\hat{D} = 0 \rightarrow \hat{V} = 0 \;, \quad \hat{n} = 0 \quad (\hat{L} = 0)$$

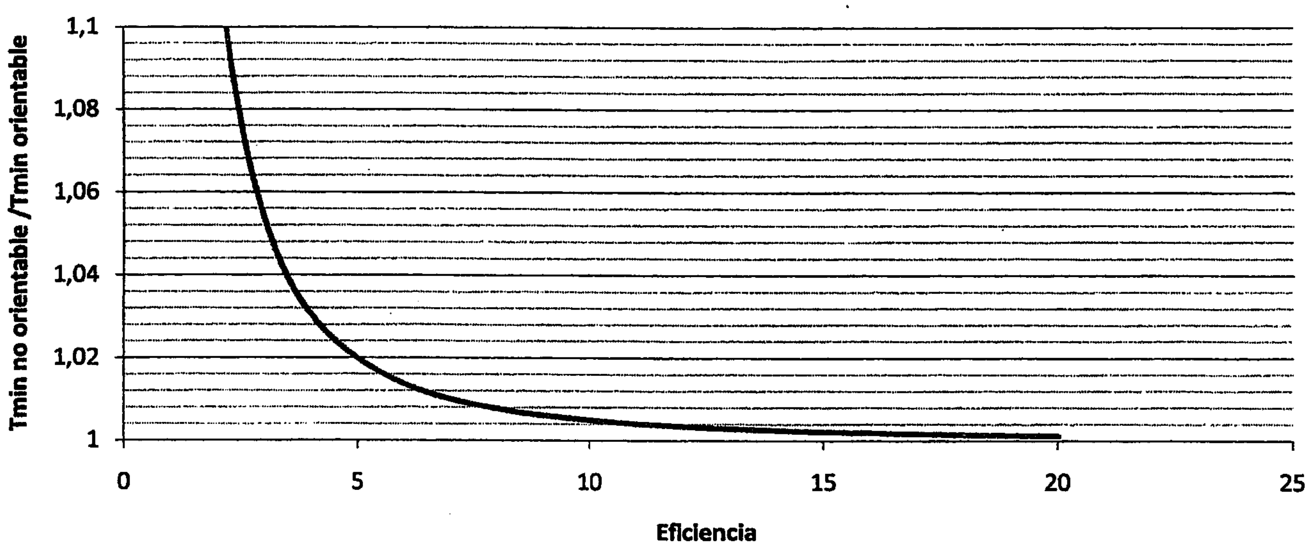
Si no hay velocidad L y D son 0

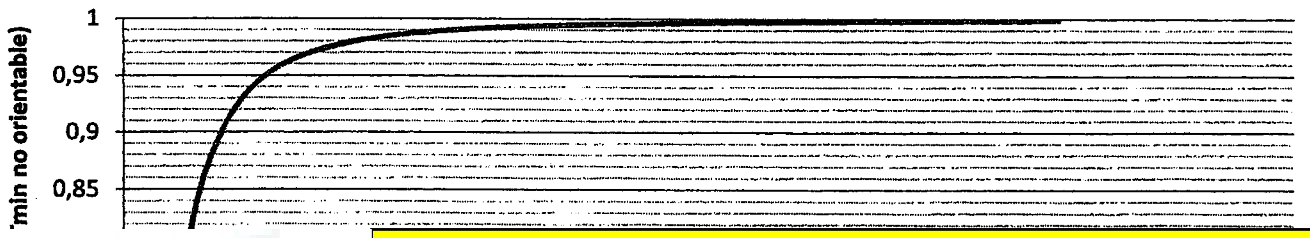
$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \qquad D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \rightarrow n = 0$$

$$\rightarrow T = W$$

ANEXO







Eficiencia

C-158

TR.
Vuelo Simétrico
Plano HORIZONTAL.

PROBLEMA 12

La figura 1 representa un "cañonero" disparando lateralmente desde su costado izquierdo.

Con el fin de batir el objetivo O (ver figura 2) el piloto efectúa un vuelo horizontal, simétrico y estacionario, describiendo una circunferencia alrededor de la vertical de O y manteniendo siempre alineado el eje y_b con el objetivo.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas de avión.
b) El empuje de los motores, T, está dirigido según el eje x_w.
c) La atmósfera está en calma y su densidad ρ es una constante conocida en el margen de alturas considerado.
d) La constante de la gravedad g es conocida.

Se pide:

1°) Plantear el sistema de ecuaciones que describen el comportamiento del avión y determinar el número de grados de libertad matemáticos de dicho sistema.

2°) Determinar el radio de curvatura, R, la altura, h, el ángulo de balance de velocidad, μ, y la distancia avión-objetivo, d, en función de $T/W, C_L$, y en caso necesario, de los restantes grados de libertad del sistema.

3°) Representar gráficamente $d=d(T/W)$ para valores prefijados de los restantes grados de libertad del sistema, determinando la distancia mínima, d_{min}, así como los valores de (T/W) y μ correspondientes. Comentar los resultados obtenidos.

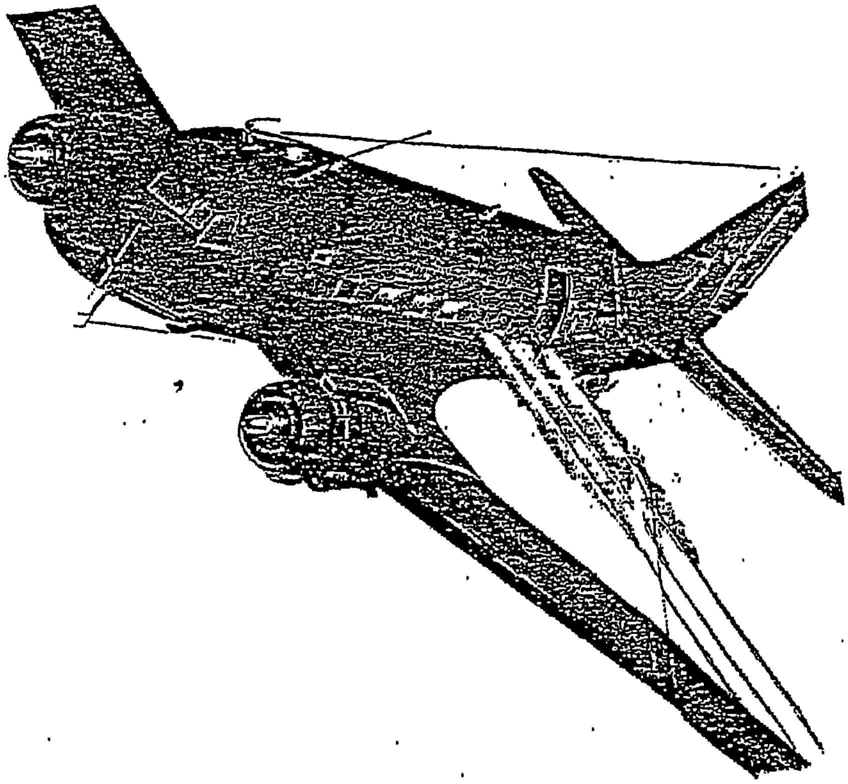
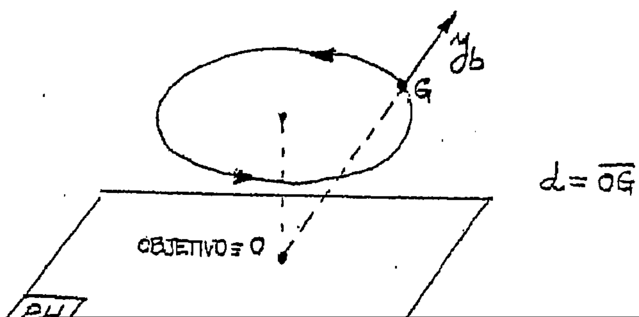


FIGURA 1

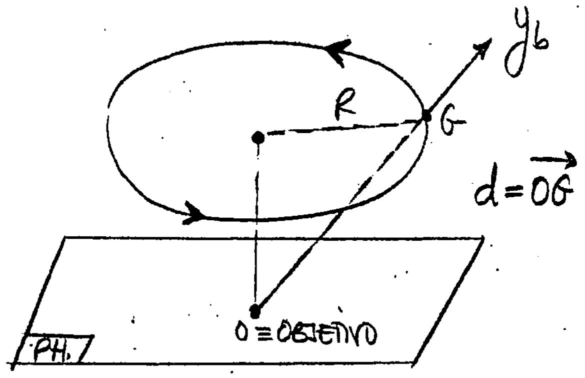


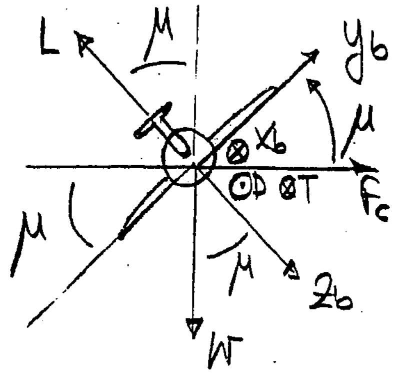
PROBLEMA 14 (27-11-1990) problema 12

$\gamma_e=1$; $Q=0$, $\dot V=\dot\gamma=0=\dot\mu$; $\varepsilon=\nu=0$

- VUELO HORIZONTAL, SIMETRICO, ESTACIONARIO. CIRCUNFERENCIA.
- Y_b alineado con el objetivo
- $T \parallel X_W$
- ρ constante, ATMÓSFERA EN CALMA: $V_W=0 \rightarrow \bar V_g=\bar V_W$
- g conocida y constante.

1)





VER ECS GENERALES CON $\gamma_e=1$, $Q=0$; $\dot V=\dot\gamma=0$; $\varepsilon=\nu=0$.

- ECUACIONES CINEMÁTICAS ($h=$ cte)

$$\dot x = V\cos\chi$$
$$\dot y = V\sin\chi$$

(7) $C_D=\dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$, (8) $C_D=C_{D_0}+kC_L^2$

- ECUACIONES DINÁMICAS

(9) $C_L=\dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$ (10) $C_L=C_{L_0}+\alpha C_{L\alpha}$

$$T-D=0 \quad (1)$$
$$L\sin\mu+F_c=0;\quad L\sin\mu-\frac{W}{g}V\dot\chi=0 \quad (2)$$
$$L\cos\mu-W=0 \quad (3)$$

x, y, V, α, ...

x, y, V, χ, T, D, L, μ.

T, D, L, χ, μ, V, R, d, h

C_D, C_L, α

NGL=2

12−10=2

ECS. GENERALES

T−D=0

$W\sin\mu - mV\dot\chi\cos\mu=0$

$-L + W\cos\mu + mV\dot\chi\sin\mu=0$.

2)

$$d^2=R^2+h^2 \quad (4)$$

De (1) $T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \rightarrow V^2 = \frac{T/W}{\frac{1}{2}\rho \frac{S}{W}(C_{D0} + K C_L^2)}$

De $\frac{(2)}{(3)}$ $Tg\,\mu = \frac{V\dot{\chi}}{g} = \frac{V^2}{gR} = \frac{h}{R} \rightarrow$ $\boxed{h = \frac{T/W}{\frac{1}{2}\rho g \frac{S}{W}(C_{D0}+KC_L^2)}}$

De (3) $L = \frac{W}{\cos\mu} = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \cancel{\frac{1}{2}\rho S} C_L \cdot \frac{T/W}{\cancel{\frac{1}{2}\rho}\frac{\cancel{S}}{W}(C_{D0}+KC_L^2)} = \frac{T/W \cdot C_L}{\frac{1}{W}(C_{D0}+KC_L^2)}$

De aquí despejamos $\boxed{\cos\mu = \frac{(C_{D0}+KC_L^2)}{\frac{T}{W}\cdot C_L}}$ ✓ $\rightarrow \mu$

* Como $h = d\,\mathrm{sen}\,\mu \longrightarrow d = \frac{h}{\mathrm{sen}\,\mu} = \frac{h}{\sqrt{1-\cos^2\mu}} = \frac{T/W}{\frac{1}{2}\rho g\frac{S}{W}(C_{D0}+KC_L^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(C_{D0}+KC_L^2)^2}{\left(\frac{T}{W}\right)^2 C_L^2}}} =$

$= \frac{T/W}{\frac{1}{2}\rho g\frac{S}{W}(C_{D0}+KC_L^2)} \cdot \frac{T/W\, C_L}{\sqrt{\left(\frac{T}{W}\right)^2 C_L^2 - (C_{D0}+KC_L^2)^2}} \rightarrow \boxed{d = \frac{(T/W)^2 \cdot C_L}{\frac{1}{2}\rho g \frac{S}{W}(C_{D0}+KC_L^2)\sqrt{\left(\frac{T}{W}C_L\right)^2 - (C_{D0}+KC_L^2)^2}}}$

* $R = d\cos\mu$; por tanto con d y $\cos\mu \longrightarrow R$

3) d_{MIN} ? $\dfrac{D(d)}{D(T/W)} = 0$

$$\frac{D(d)}{D(T/W)} = \frac{G}{\frac{1}{2}\rho g \frac{S}{W}(C_{D0}+KG^2)}\left[\frac{2\left(\frac{T}{W}\right)\sqrt{\left(\frac{T}{W}G\right)^2-(C_{D0}+KG^2)^2}-\left(\frac{T}{W}\right)^2\frac{1}{2}\,\frac{2\,\frac{T}{W}G^2}{\sqrt{\left(\frac{T}{W}G\right)^2-(C_{D0}+KG^2)^2}}}{\left(\frac{T}{W}G\right)^2-(C_{D0}+KG^2)^2}\right]=0$$

$$2\sqrt{\left(\frac{T}{W}G\right)^2-(C_{D0}+KG^2)^2}-\left(\frac{T}{W}\right)^2\frac{G^2}{\sqrt{\left(\frac{T}{W}G\right)^2-(C_{D0}+KG^2)^2}}=\frac{2\left[\left(\frac{T}{W}G\right)^2-(C_{D0}+KG^2)^2\right]-\left(\frac{T}{W}\right)^2G^2}{\sqrt{\left(\frac{T}{W}G\right)^2-(C_{D0}+KG^2)^2}}=0$$

$$2\left(\frac{T}{W}G\right)^2-2(C_{D0}+KG^2)^2=\left(\frac{T}{W}G\right)^2 \rightarrow \left(\frac{T}{W}G\right)^2=2(C_{D0}+KG^2)^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\left.\frac{T}{W}\right)_{d\,min}=\sqrt{2}\,\frac{C_{D0}+KG^2}{G}}$$

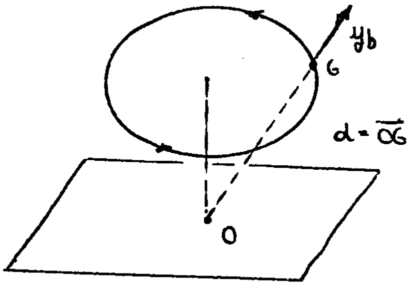
Por tanto: $$d_{min}=\frac{2\,\frac{(C_{D0}+KG^2)^2}{G^2}\cdot G}{\frac{1}{2}\rho g\frac{S}{W}(C_{D0}+KG^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\frac{(C_{D0}+KG^2)}{G}\cdot G\right)^2-(C_{D0}+KG^2)^2}}$$

$$d_{min}=\frac{2W}{\rho g S}\cdot\frac{2\cancel{(C_{D0}+KG^2)}}{G}\cdot\frac{1}{\cancel{(C_{D0}+KG^2)}} \rightarrow \boxed{d_{MIN}=\frac{2W}{\rho g S}\cdot\frac{2}{G}}$$

G $\sqrt{2}$ G $\left(\frac{T}{W}\right)_{MAX}$ W 2.

$$\cos \mu = \frac{\cancel{(G_0 + KG^2)}}{\sqrt{2} \cdot \frac{\cancel{(G_0+KG^2)}}{\cancel{G}} \cdot \cancel{G}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \boxed{\mu\Big|_{d_{MIN}} = 45^{\circ}}$$

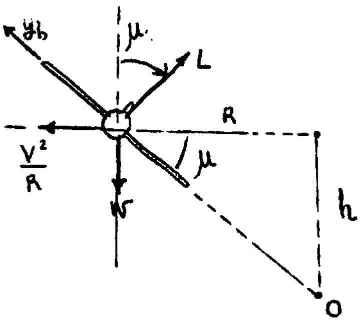
PROBLEMA 12 CLASE



VUELO HORIZONTAL, SIMÉT, ESTACIONARIO, describiendo circunferencia alrededor de la vertical de O siempre manteniendo y_b alineado con O.

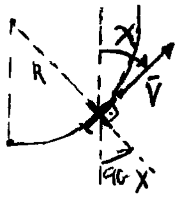
- Se conocen característicos
- Empuje T dirigido según x_w

1 S^{ma} de ECS y N^o de gdl



ECS:

$$\begin{cases} T = D \quad (1) \\ D \operatorname{sen}\mu = \frac{W}{g} V \dot{\chi} \quad (2) \\ -L\cos\mu + W = 0 \quad (3) \end{cases}$$



$V = \dot{\chi} \cdot R$

$\boxed{\dot{\chi} = \frac{V}{R}}$

$$\begin{cases} tg\,\mu = \frac{h}{R} \quad (4) \\ \dot{\chi} = V/R \quad (5) \\ \dot{x}_e = V\cos\chi \quad (6) \\ \dot{y}_e = V\operatorname{sen}\chi \quad (7) \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2) \quad (8) \\ L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (9) \\ C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha \quad (10) \end{cases}$$

$T, D, L, \mu, V, \chi, h, R, \underline{x_e, y_e}, C_L, \alpha$

12 incógnitas

10 ecuaciones

$\boxed{N = 2 \text{ gdl}}$

2 Determinar R, h, μ, d en función de T/W y C_L

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2) \longrightarrow V^2 = \frac{2T \cdot W/W}{\rho S (C_{D_0} + K C_L^2)} \longrightarrow \boxed{V = V(T/W, C_L) = \sqrt{\frac{2\,T/W}{\rho S (C_{D_0} + K C_L^2)}} \cdot W}$$

(1)

$(2)/(3) \longrightarrow -tg\,\mu = -\frac{1}{g} V \dot{\chi} = V/R$

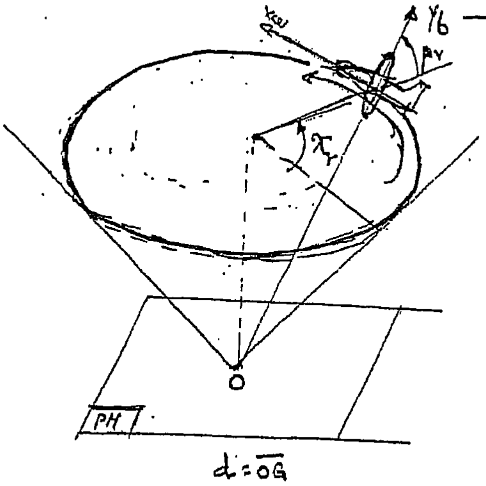
$$tg\,\mu = \frac{V^2}{gR} = \frac{h}{R}$$

$$\boxed{h = \frac{(V(T/W, C_L))^2}{g}}$$

$(3)\quad L\cos\mu = W \longrightarrow \boxed{\cos\mu = \frac{2W}{\rho S V^2 C_L} = \frac{2W}{\rho S V^2(T/W, C_L) \cdot C_L}} \longrightarrow \boxed{R = \frac{h}{tg\,\mu} = \ldots}$

$\boxed{d = \sqrt{R^2 + h^2} = \ldots}$

PROBLEMA 12



$d = \overline{OG}$

vuelo simétrico : $\beta = 0$, $\gamma = 0$ $\Rightarrow$ $y_b \equiv y_\omega$

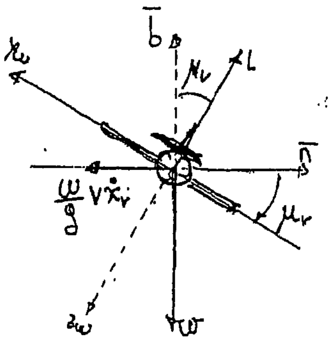
$\left\{ \begin{array}{l} \chi_V = -\chi \text{ (definido en la teoría)} \\ \mu_V = -\mu \text{ (definido en la teoría)} \end{array} \right.$ OJO!!

1

· Del apartado 10/2 de la teoría

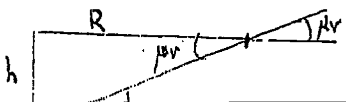
$$\begin{cases} \vec{t}: T - D = 0 \\ \vec{n}: L \operatorname{sen}\mu - \frac{W}{g} V \dot{\chi} = 0 \longrightarrow -L \operatorname{sen}\mu_V + \frac{W}{g} V \dot{\chi}_V = 0 \\ \vec{b}: L \cos\mu - W = 0 \longrightarrow L \cos\mu_V - W = 0 \end{cases}$$

· Otra manera de obtener las relac. dinámicas



$$\left. \begin{array}{ll} \bar{t}: T - D = 0 & [1] \\ \bar{n}: L \operatorname{sen}\mu_V - \frac{W}{g} V \dot{\chi}_V = 0 & [2] \\ \bar{b}: L \cos\mu_V - W = 0 & [3] \end{array} \right\} \rightarrow \text{sale lo mismo}$$

· $\boxed{\dot{\chi}_V = \frac{V}{R}}$ [4]



$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\mu_V = \frac{h}{R}}$ [5] $\Rightarrow \mu_V = \operatorname{arctg}\frac{h}{R}$; $d = \sqrt{R^2 + h^2}$

I incógnitas : $T, D, L, \mu_V, V, \dot{\chi}_V, h, R, \alpha, C_L, C_D \rightarrow 11$ $\Big\} \rightarrow \boxed{N = 2}$

2 ESCOGEMOS C_L, T/W COMO GDL.

- $$[1] \rightarrow \frac{T}{W} = \frac{D}{W} = \frac{\rho S}{2W} V^2 (C_{D_0} + k C_L^2) \longrightarrow V^2 = \frac{2W}{\rho S} \frac{T/W}{C_{D_0} + k C_L^2}$$

- De $\frac{[2]}{[3]}$: $$\operatorname{tg} \mu_\gamma = \frac{V \dot{\chi}_v}{g} = \frac{V^2}{g R} = \frac{h}{R} \longrightarrow \boxed{h = \frac{1}{g}\left(\frac{2W}{\rho S} \cdot \frac{T/W}{C_{D_0} + k C_L^2}\right)}$$

- $$[3] \rightarrow \cos \mu_\gamma = \frac{W}{L} = \frac{2W}{\rho S V^2 C_L} = \frac{2W}{\rho S C_L} \cdot \frac{1}{\frac{2W}{\rho S} \cdot \frac{T/W}{C_{D_0} + k C_L^2}} = \boxed{\frac{C_{D_0} + k C_L^2}{C_L \cdot T/W} = \cos \mu}$$

$\mu = -\mu_\gamma$

- $$R = \frac{h}{\operatorname{tg} \mu_\gamma} = \frac{h}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \mu_\gamma} - 1}} = \text{---} = \boxed{\frac{2W}{\rho g S} \cdot \frac{T/W}{\sqrt{C_L^2 \left(\frac{T}{W}\right)^2 - (C_{D_0} + k C_L^2)^2}} = R}$$

- $$d = \sqrt{R^2 + h^2} = \text{---} = \boxed{\frac{2W}{\rho g S} \cdot \frac{C_L \left(\frac{T}{W}\right)^2}{C_{D_0} + k C_L^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_L^2 \left(\frac{T}{W}\right)^2 - (C_{D_0} + k C_L^2)^2}} = d}$$

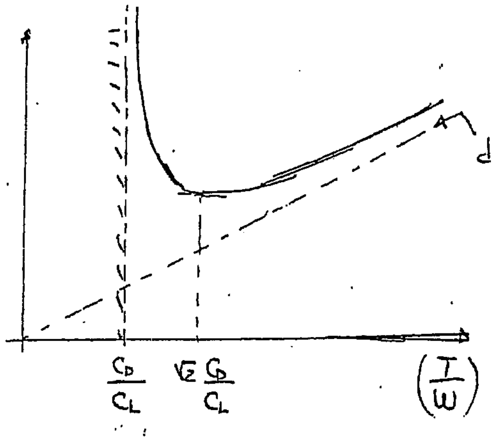
3

- Para $\frac{T}{W} \to \infty$: $$d \sim \left(\frac{2W}{\rho g S} \cdot \frac{1}{C_{D_0} + k C_L^2}\right) \cdot \frac{T}{W} \longrightarrow \text{recta asintótica.}$$

- Cuando $\frac{T}{W} = \frac{C_{D_0} + k C_L^2}{C_L} = \frac{C_D}{C_L} \Longrightarrow d \to \infty$

- Para d_{min}: $$\frac{d(d)}{d(T/W)} = 0 \longrightarrow \boxed{\left(\frac{T}{W}\right)_{d_{min}} = \sqrt{2} \frac{C_D}{C_L}} \Longrightarrow$$

(prob 12 - guión 03-04)

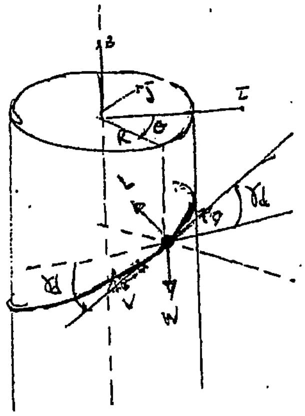


$$d=\left(\frac{4W}{3g\delta}-\frac{1}{C_{D_0}+kC_L^2}\right)\cdot\frac{T}{W}$$

- Fijarse que: $d\to\infty$ cuando $\frac{T}{W}=\frac{C_D}{C_L}=\frac{D}{L}$ ⟶ $\frac{T}{D}=\frac{W}{L}$ ⟶ eso es el vuelo rectilíneo horizontal ⇒ nos alejamos del objetivo (por eso $d\to\infty$) y por debajo de ese valor de $\frac{T}{W}$ el avión no será capaz de realizar viraje ni sostener vuelo horizontal.

PROBLEMA 13

• Viraje simétrico, estacionario $\Longrightarrow$ [radio de giro, ángulo de asiento de la velocidad] son ctes $\Rightarrow$ mov. helicoidal.

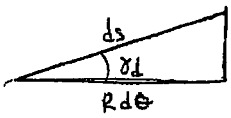


$$* \ \vec{r} = (\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j} + \vec{k}\cdot tg\gamma\cdot\theta)R$$

$$* \ \vec{t} = \frac{d\vec{r}/d\theta}{|d\vec{r}/d\theta|} = \frac{1}{\sqrt{R^2+R^2 tg^2\gamma}}\cdot R\,(-\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} + tg\gamma\,\vec{k}) =$$

$$= \underbrace{\cos\gamma}_{=\cos\gamma_d}(-\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} + \underbrace{tg\gamma}_{=-tg\gamma_d}\vec{k})$$

$$\boxed{\gamma_d = -\gamma}$$



$$\Rightarrow Rd\theta = ds\cdot\cos\gamma_d \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos\gamma_d}{R}$$

$$\bullet \ \frac{d}{ds}\begin{vmatrix}\bar{t}\\ \bar{n}\\ \bar{b}\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{pmatrix}\begin{vmatrix}\bar{t}\\ \bar{n}\\ \bar{b}\end{vmatrix} \Rightarrow :$$

$$* \ \frac{d\bar{t}}{ds} = \kappa\bar{n} \longrightarrow \frac{d\bar{t}}{d\theta}\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{\frac{\cos\gamma_d}{R}} = \cos\gamma_d(-\cos\theta\,\vec{i} - \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})\cdot\frac{\cos\gamma_d}{R} = \kappa\bar{n} = \frac{1}{\rho}\bar{n}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \boxed{\bar{n} = -\cos\theta\,\vec{i} - \operatorname{sen}\theta\,\vec{j} = -\bar{N}} \\ \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\cos^2\gamma_d}{R} \longrightarrow \boxed{\rho = \dfrac{R}{\cos^2\gamma_d}} \end{cases}$$

¡GEOMETRÍA DIFERENCIAL!

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

CÁTEDRA DE MECÁNICA DEL VUELO — 27.06.02

E. Final Junio

136

PROBLEMA 1º

Un avión describe respecto al suelo una circunferencia contenida en un plano horizontal, con velocidad V_g constante y conocida. El avión vuela siempre con resbalamiento nulo en presencia de un viento horizontal, V_w, asimismo constante y conocido, tal y como se presenta en la figura.

Suponiendo además que:

a) Son conocidas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión.

b) El vuelo se efectúa con un C_L constante y conocido y la fuerza aerodinámica lateral es despreciable.

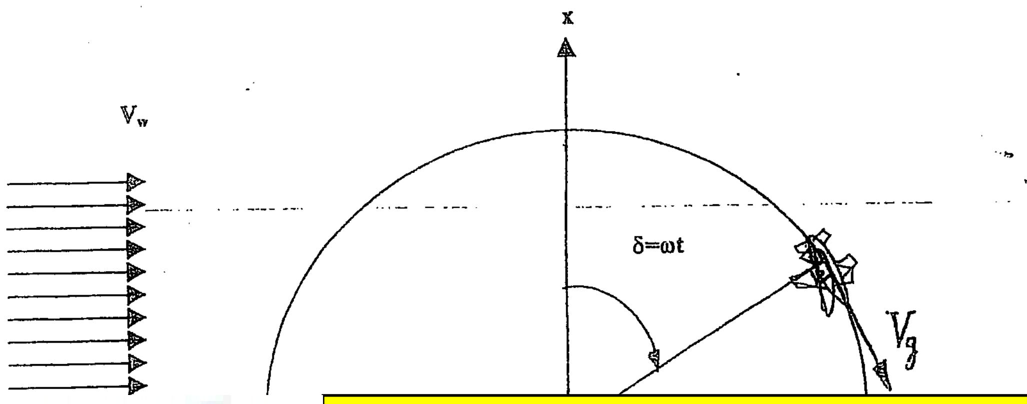
c) El empuje T de los motores está dirigido siempre según el eje x_w

d) El parámetro $\varepsilon = V_w/V_g$ es pequeño ($\varepsilon \ll 1$) y ρ, g son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Plantear las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del movimiento en los ejes x, y, z representados en la figura. Obtener el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

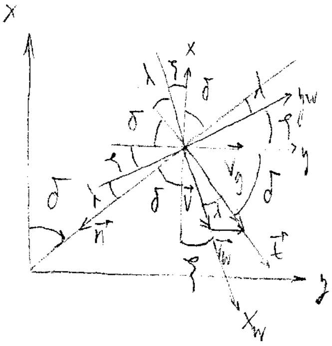
2º) Reteniendo sólo hasta términos de primer orden en ε, determinar en función del ángulo δ representado en la figura, y de los demás datos y grados de libertad matemáticos del sistema, la velocidad aerodinámica V, los ángulos γ, μ y χ y el empuje T. Plantear asimismo una expresión que permitiría obtener la velocidad angular ω.



TIEMPO CONCEDIDO: $1^h 15^m$

④

1)



$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w \sim \vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_w$$

$$\vec{V}_g = V_g \cos\delta \vec{j} - V_g \operatorname{sen}\delta \vec{i}$$

$$\vec{V}_w = V_w \vec{j}$$

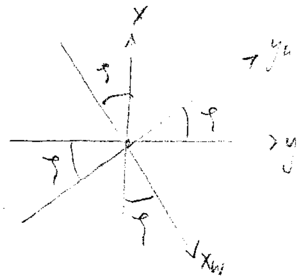
$$\vec{V} = -V_g \operatorname{sen}\delta \vec{i} + (V_g \cos\delta - V_w)\vec{j} \qquad V = \sqrt{\cancel{V_g^2 \operatorname{sen}^2\delta + V_g^2 \cos^2\delta} - 2V_g V_w \cos\delta + V_w^2}$$

$$\frac{V}{V_g} = \sqrt{1 - 2\frac{V_w}{V_g}\cos\delta + \varepsilon^2} \Rightarrow \boxed{V = V_g\sqrt{1 - 2\varepsilon\cos\delta}}$$

Ejes intrínsecos
$$\begin{cases} T - D = \dfrac{W}{g}\dfrac{dV_g}{dt}^{\to 0} \quad (I) \quad (\vec{i}_w) \\ L\operatorname{sen}\mu - \dfrac{W}{g} V \dot{\chi} = 0 \; ; \; L\operatorname{sen}\mu = \dfrac{W}{g}\cdot\dfrac{V_g^2}{R} \quad (II) \quad (\vec{n}) \\ L\cos\mu - W = 0 \quad (III) \quad (\vec{b}) \end{cases}$$

$$\vec{K} \equiv \vec{b} \Rightarrow \boxed{L\cos\mu - W = 0 \quad (3)}$$

$$\begin{cases} \vec{t} = -\operatorname{sen}\delta \vec{i} + \cos\delta \vec{j} \\ \vec{n} = -\cos\delta \vec{i} - \operatorname{sen}\delta \vec{j} \end{cases} \qquad \left| \vec{i}_w = -\cos\varphi \vec{i} + \operatorname{sen}\varphi \vec{j} \right|$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\lambda + \delta)$$

$$(II) \to L\operatorname{sen}\mu(-\cos\delta\vec{i} - \operatorname{sen}\delta\vec{j}) = \frac{W}{g}\cdot\frac{V_g^2}{R}(-\cos\delta\vec{i} - \operatorname{sen}\delta\vec{j})$$

$$(I) \to T\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\lambda+\delta)\right)\vec{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda - \delta\right)\vec{j}\right] = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2)\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda - \delta\right)\vec{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda - \delta\right)\vec{j}\right]$$

$$V_w \operatorname{sen}\delta = V\operatorname{sen}\lambda \sim \operatorname{sen}\lambda = \frac{V_w}{V}\operatorname{sen}\delta = \frac{V_w}{V_g}\cdot\frac{\operatorname{sen}\delta}{\sqrt{1-2\varepsilon\cos\delta}} = \varepsilon\cdot\frac{\operatorname{sen}\delta}{\sqrt{1-2\varepsilon\cos\delta}} \to \lambda = \ldots$$

$$\cos\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon^2\frac{\operatorname{sen}^2\delta}{1-2\varepsilon\cos\delta}}$$

$$-L\operatorname{sen}\mu\cos\delta - T\operatorname{sen}(\lambda+\delta) = -\frac{W}{g}\cdot\frac{V_g^2}{R}\cos\delta - \frac{1}{2}\rho S V^2(C_{D0} + K C_L^2)\operatorname{sen}(\lambda+\delta) \quad (1)$$

$$-L\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\delta + T\cos(\lambda+\delta) = -\frac{W}{g}\cdot\frac{V_g^2}{R}\operatorname{sen}\delta + \frac{1}{2}\rho S V^2(C_{D0} + K C_L^2)\cos(\lambda+\delta) \quad (2)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V (C_{D0} + K C_L^2) \quad (7)$$

2) $V^2 = V_g^2 - 2V_g V_w \cos\delta + V_w^2$;

$$\frac{V^2}{V_g^2} = 1 - 2\frac{V_w}{V_g^2}\cos\delta + \frac{V_w^2}{V_g^2} = 1 - 2\varepsilon\cos\delta + \varepsilon^2 \Rightarrow \boxed{V = V_g\sqrt{1-2\varepsilon\cos\delta}}$$

$$(3) \rightarrow \cos\mu = \frac{W}{L} = \frac{2W}{\rho S V^2 C_L}$$

$$\boxed{\mu = \arccos\left[\frac{2W}{\rho S C_L V_g^2(1-2\varepsilon\cos\delta)}\right]}$$

Vuelo horizontal $\Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$

$$\varphi = \chi \rightarrow \boxed{\chi = \frac{\pi}{2} - (\lambda + \delta)}$$

$$(1) \rightarrow L\operatorname{sen}\mu\cos\delta = T\operatorname{sen}(\lambda+\delta) - \frac{W}{g}\cdot\frac{V_g^2}{R}\cos\delta - \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0}+KC_L^2)\operatorname{sen}(\lambda+\delta)$$

$$(2) \rightarrow -T\operatorname{sen}(\lambda+\delta)\operatorname{tg}\delta + \frac{W}{g}\frac{V_g^2}{R}\operatorname{sen}\delta + \frac{1}{2}\rho S V^2(C_{D0}+KC_L^2)\operatorname{sen}(\lambda+\delta)\operatorname{tg}\delta + T\cos(\lambda+\delta) =$$

$$= -\frac{W}{g}\cdot\frac{V_g^2}{R}\operatorname{sen}\delta + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0}+KC_L^2)\cos(\lambda+\delta)$$

$$T\left[-\operatorname{sen}(\lambda+\delta)\operatorname{tg}\delta + \cos(\lambda+\delta)\right] = \frac{1}{2}\rho S V^2(C_{D0}+KC_L^2)\left[-\operatorname{sen}(\lambda+\delta)\operatorname{tg}\delta + \cos(\lambda+\delta)\right] - \frac{2W}{g}\frac{V_g^2}{R}\operatorname{sen}\delta$$

$$T = \frac{\rho S\left[V_g^2(1-2\varepsilon\cos\delta)\right](C_{D0}+KC_L^2)\cancel{\left[-\operatorname{sen}(\lambda+\delta)\operatorname{tg}\delta + \cos(\lambda+\delta)\right]}}{\cancel{\left[-\operatorname{sen}(\lambda+\delta)\operatorname{tg}\delta + \cos(\lambda+\delta)\right]}} - \frac{\frac{2W}{g}\cdot\frac{V_g^2}{R}\operatorname{sen}\delta}{\left[-\operatorname{sen}(\lambda+\delta)\operatorname{tg}\delta + \cos(\lambda+\delta)\right]}$$

$$\boxed{T = \rho S\left[V_g^2(1-2\varepsilon\cos\delta)\right](C_{D0}+KC_L^2) - \frac{\frac{2W}{g}\cdot\frac{V_g^2}{R}\operatorname{sen}\delta}{\left[-\operatorname{sen}(\lambda+\delta)\operatorname{tg}\delta + \cos(\lambda+\delta)\right]}}$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

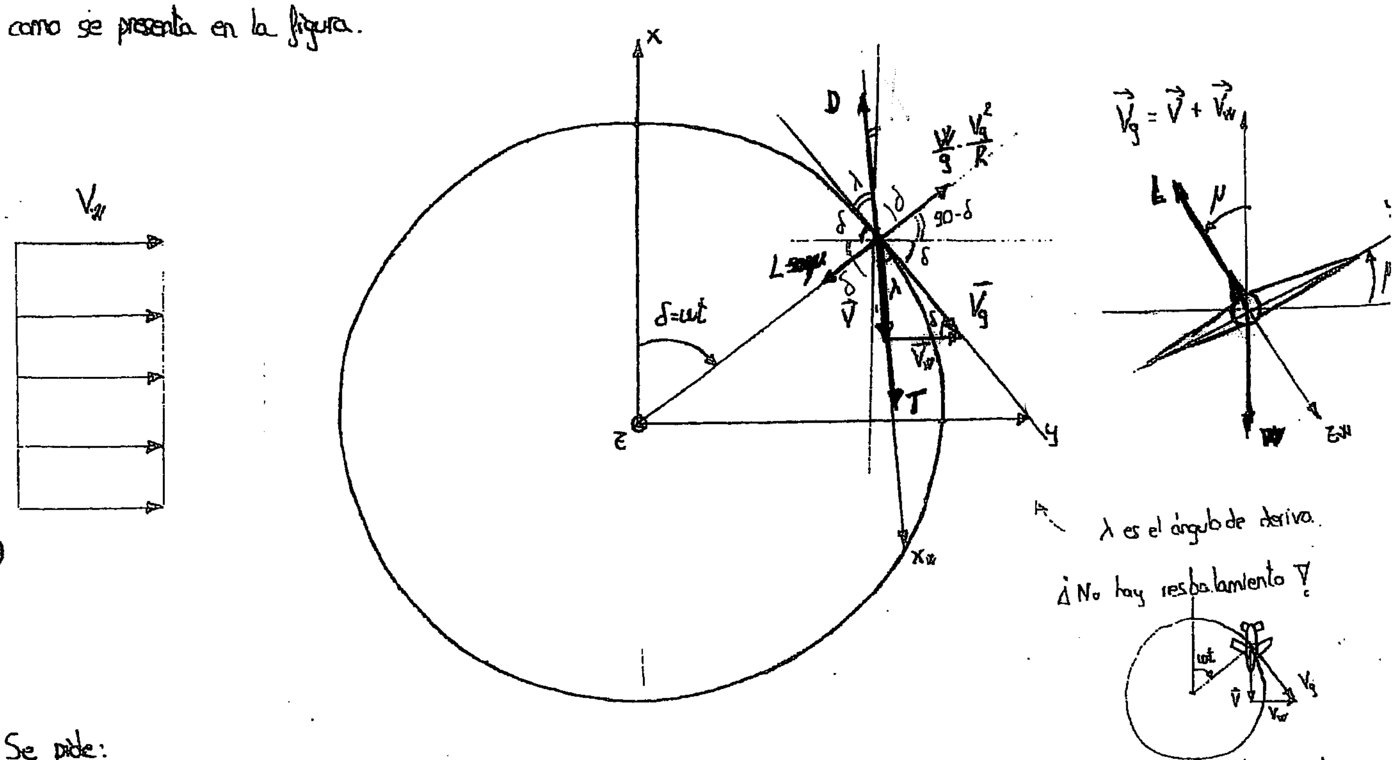
$$x = -V_g\int_0^t \operatorname{sen}\omega t = -V_g(-\cos\omega t)\cdot\frac{1}{\omega}$$

$V_g^2 \ldots V_g^2 \ldots = R^2$

PROBLEMA

1º Ex - Junio 02

Un avión describe respecto al suelo una circunferencia contenida en un plano horizontal, con velocidad V_g cte. y conocida. El avión vuela siempre con resbalamiento nulo en presencia de un viento horizontal, V_w, asimismo cte. y conocido, tal y como se presenta en la figura.



Se pide:

1º) Plantear las ecs. cinemáticas y dinámicas del movimiento en los ejes x, y, z representados en la figura. Obtener el nº de gdl matemáticos del sistema.

$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w \quad ; \quad \vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_w \quad \text{con} \quad \begin{cases} \vec{V}_g = V_g\,(-\text{sen}\,\delta\,\vec{i} + \cos\delta\,\vec{j}) \\ \vec{V}_w = V_w\,\vec{j} \end{cases} \qquad V_g, V_w \text{ - ctes. y conocid}$$

La velocidad aerodinámica es $\vec{V} = -V_g\,\text{sen}\,\delta\,\vec{i} + (V_g\cos\delta - V_w)\,\vec{j}$ $\longrightarrow$ $V = |\vec{V}| = \sqrt{\underbrace{(V_g^2\,\text{sen}^2\delta + V_g^2\cos^2\delta)}_{V_g^2} + V_w^2 - 2V_gV_w\cos\delta}$

En la figura se pueden ver todas las fuerzas que aparecen y los ángulos necesarios para proyectar en los ejes x, y. Sólo queda determinar el ángulo del triángulo de velocidades λ:

Th. seno $\quad \frac{V_w}{\ldots} = \frac{V}{\ldots} \longrightarrow \text{sen}\,\lambda = \frac{V_w}{V}\cdot\text{sen}\,\delta$

Ec. cinemát. $\dot{x} = -V_g \sin\delta$ ①

$\dot{y} = V_g \cos\delta$ ②

$\dot{z} = 0$ ③

Ec. dinám. $\vec{i})$ $-T\cos(90-(\lambda+\delta)) - L\sin\mu\sin(90-\delta) + \frac{W}{g}\frac{V_g^2}{R}\sin(90-\delta) + D\cos(90-(\lambda+\delta)) = 0$

$\vec{j})$ $T\sin(90-(\lambda+\delta)) - L\sin\mu\cos(90-\delta) + \frac{W}{g}V_g\omega\cos(90-\delta) - D\sin(90-(\lambda+\delta)) = 0$

$\vec{k})$ $W - L\cos\mu = 0$

$R = V_g/\omega$

③ $-T\sin(\lambda+\delta) - L\sin\mu\cos\delta + \frac{W}{g}V_g\omega\cos\delta + D\sin(\lambda+\delta) = 0$

④ $T\cos(\lambda+\delta) - L\sin\mu\sin\delta + \frac{W}{g}V_g\omega\sin\delta - D\cos(\lambda+\delta) = 0$

⑤ $W - L\cos\mu = 0$

Ecuaciones: 5 ; Incógnitas: 5 (x, y, T, μ, δ) ⇒ $\not\exists$ gdl

2) $V = \sqrt{V_g^2 + V_w^2 - 2V_gV_w\cos\delta}$ $\qquad \frac{V}{V_g} = \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{V_w}{V_g}\right)^2}_{\varepsilon^2} + 2\underbrace{\frac{V_w}{V_g}}_{\varepsilon}\cos\delta}$ reteniendo O(ε

$V = V_g\sqrt{1-2\varepsilon\cos\delta}$

$\gamma = 0$ (V aerod. ∈ Pl. Horiz.)

⑤ → $W = L\cos\mu = \frac{1}{2}\rho V^2 S \overset{\text{cte y conocido}}{C_L}\cos\mu \Rightarrow \cos\mu = \frac{2W}{\rho S C_L V^2}$

o(ε) ⇒ $\cos\mu = \frac{2W}{\rho S C_L V_g^2(1-2\varepsilon\cos\delta)}$

χ = ángulo de la veloc. ; $\chi \overset{\text{en este probl.}}{=} 90-(\lambda+\delta)$

1º Ex-Junio 02 (Continuación)

(3) $\cos\chi\,(D-T) = L\cdot \text{sen}\mu\cdot\cos\delta - \frac{W}{g}\cdot V_g\cdot\omega\cdot\cos\delta$

(4) $\text{sen}\,\chi\,(T-D) = L\cdot\text{sen}\mu\cdot\text{sen}\delta - \frac{W}{g}\cdot V_g\cdot\omega\cdot\text{sen}\delta$

Dividiendo $\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \quad -\text{tag}\,\chi = \dfrac{L\cdot\text{sen}\mu\cdot\text{sen}\delta - \frac{W}{g}\cdot V_g\cdot\omega\cdot\text{sen}\delta}{L\cdot\text{sen}\mu\cdot\cos\delta - \frac{W}{g}\cdot V_g\cdot\omega\cdot\cos\delta}$

$$-\text{tag}\,\chi = \text{tag}\,\delta\cdot\frac{\cancel{L\cdot\text{sen}\mu - \frac{W}{g}\cdot V_g\cdot\omega}}{\cancel{L\cdot\text{sen}\mu - \frac{W}{g}\cdot V_g\cdot\omega}} \Longrightarrow \boxed{\text{tag}\,\chi = -\text{tag}\,\delta} \longrightarrow \chi$$

(4) $\rightarrow \quad T = D + \dfrac{L\,\text{sen}\mu\cdot\text{sen}\delta}{\text{sen}\chi} - \frac{W}{g}\,V_g\cdot\omega\cdot\dfrac{\text{sen}\delta}{\text{sen}\chi}$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D_0} + K\cdot C_L^2) + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L\cdot\frac{\text{sen}\mu\cdot\text{sen}\delta}{\text{sen}\chi} - \frac{W}{g}\cdot V_g\cdot\omega\cdot\frac{\text{sen}\delta}{\text{sen}\chi}}$$

$V^2 = V_g^2(1-2\varepsilon\cdot\cos\delta)$

Para determinar ω:

Circunferencia: $x^2+y^2 = R^2$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -V_g\cdot\text{sen}\delta \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = V_g\cdot\cos\delta \end{cases}$$

$D - \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D_0}+KC_L^2)$

De: (4) $\boxed{\text{sen}\,\chi\,(T - D) = L\,\text{sen}\mu\cdot\text{sen}\delta - \frac{W}{g}\cdot V_g\cdot\omega\cdot\text{sen}\delta} \longrightarrow \omega$

$L - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L$

$T = \ldots\ldots$

x dettas Espartero

Integral

* Intercambiadores con adm.

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

* $\rho = f(h)$.

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO - 1[er] E. Parcial - A + B + CD 02.12.95

PROBLEMA 2º

TR, INTEGRAL

Se considera un avión provisto de turborreactor que vuela en condiciones de T constante ($T = T_i$) y α constante ($\alpha = \alpha_i$) y conocidos a partir de unas condiciones iniciales de vuelo horizontal, rectilíneo casi-estacionario.

Suponiendo además que:

a) Las características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas.

b) La variación de la densidad atmosférica con la altura puede aproximarse mediante la expresión $\rho = \rho_o e^{-h/\lambda}$, siendo ρ_o y λ constantes conocidas.

c) La ley de pilotaje es la anteriormente indicada.

d) El consumo específico es constante y conocido.

Se pide:

1º) Determinar la autonomía

2º) Determinar $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{W})$, donde $\hat{\rho} = \rho/\rho_i$ y $\hat{W} = W/W_i$

3º) Plantear una ecuación que permita determinar el alcance mediante simple cuadratura.

TIEMPO CONCEDIDO: 1 15

1)

$$\frac{dW}{dt} + c\,T_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{W_F}{c\,T_i}}$$

2)

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_i} = \frac{\rho_0 e^{-h/\lambda}}{\rho_0 e^{-h_i/\lambda}} = e^{-\frac{(h-h_i)}{\lambda}}$$

$$\left.\begin{aligned} T_i - D - W \operatorname{sen}\gamma &= 0 \\ -L + W\cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{dh}{dt} = v \operatorname{sen}\gamma = v\left(\frac{T_i - D}{W}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lopt}}} = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho_i S C_{Lopt}}}\sqrt{\frac{\hat{W}}{\hat{\rho}}}$$

$$\frac{dh}{dW} = -\frac{v \operatorname{sen}\gamma}{c\,T_i} = -\frac{V_B\,\hat{V}_i \operatorname{sen}\gamma}{c\,T_i} = -\frac{V_{Bi}}{c\,T_i}\sqrt{\frac{\hat{W}}{\hat{\rho}}}\;\hat{v}\left(\frac{T_i E_m}{W} - \hat{D}\right)\frac{1}{E_m}$$

$$\hat{\rho} = e^{-(h-h_i)/\lambda} \Rightarrow \int_0^h e^{-(h-h_i)/2\lambda}\,dh = \int_{\hat{W}_i}^{\hat{W}} -\frac{V_{Bi}}{c\,T_i}\sqrt{\hat{W}}\;\hat{v}\left(\frac{T_i E_m}{W/W_i}\frac{1}{W_i} - \hat{D}\right)\frac{1}{E_m}\,d\hat{W}$$

$$e^{-\left(\frac{h-h_i}{2\lambda}\right)} - 1 = \frac{\hat{V} V_{Bi}}{\lambda c}\left[\sqrt{\hat{W}} - 1 - \left(\frac{\hat{W}^{3/2} - 1}{3}\right)\right]$$

3)

$$\frac{dx}{dt} = V = \hat{V} V_B \; ; \quad \frac{dx}{dW} = -\frac{\hat{V} V_B}{c\,T_i} = -\frac{\hat{V} V_{Bi}}{c\,T_i}\sqrt{\frac{\hat{W}}{\hat{\rho}}}$$

$$x = -\frac{\hat{V}\,V_{Bi}\,W_i}{c\,T_i}\int^{\hat{W}_F} \frac{\sqrt{\hat{W}}\,d\hat{W}}{\dots} \qquad \sqrt{\hat{\rho}} = e^{-\left(\frac{h-h_i}{2\lambda}\right)} - \dots$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

* $\rho = f(h)$.

CÁTEDRA DE MECÁNICA DEL VUELO - 1er E. Parcial - A + B + CD 02.12.95

Actuaciones Integrales a T=cte.

TR

1H.13 **PROBLEMA 2º**

Se considera un avión provisto de turborreactor que vuela en condiciones de T constante ($T = T_i$) y α constante ($\alpha = \alpha_i$) y conocidos a partir de unas condiciones iniciales de vuelo horizontal, rectilíneo casi-estacionario.

Suponiendo además que:

a) Las características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas.

b) La variación de la densidad atmosférica con la altura puede aproximarse mediante la expresión $\rho = \rho_o e^{-h/\lambda}$, siendo ρ_o y λ constantes conocidas.

c) La ley de pilotaje es la anteriormente indicada.

d) El consumo específico es constante y conocido. (c)

Se pide:

1º) Determinar la autonomía

2º) Determinar $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{W})$, donde $\hat{\rho} = \rho/\rho_i$ y $\hat{W} = W/W_i$

3º) Plantear una ecuación que permita determinar el alcance mediante simple cuadratura.

H.13 / 02-12-95

• Datos:
$$\begin{cases} T = T_i = cte \\ \alpha = \alpha_i = cte \\ \rho = \rho_0 e^{-h/\lambda} \quad ; \ \rho_0, \lambda_i \text{ son ctes conocidas} \\ C = cte \ \text{y conocido} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ • VS PH + C.E + rectilineo ⟶ en condiciones iniciales.

* Como $\alpha = cte \xrightarrow[n \simeq 1]{} V = cte$

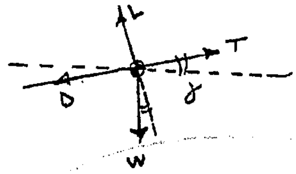
* $\dot{W} + cT = 0 \longrightarrow \frac{dW}{dt} = -cT = cte \longrightarrow \int_{W_i}^{W_i - W_F} dW = -cT_i \int_0^{t_F} dt \longrightarrow$

$\longrightarrow \boxed{t_T = \frac{W_F}{c \cdot T_i}}$

$\boxed{2}$

$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_i} \ , \ \hat{\omega} = \frac{W}{W_i}$

$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_i} = \frac{\rho_0 e^{-h/\lambda}}{\rho_0 e^{-h_i/\lambda}} = e^{-(h-h_i)/\lambda}$



↳ Suponemos vuelo ascensión cuasi-estac. y rectilíneo.

• Obtener $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{\omega})$ es equivalente a obtener $(h - h_i) = f(\hat{\omega})$ ✓

• $\begin{cases} T_i - D - W \cdot \gamma = 0 \longrightarrow \gamma = \frac{T_i - D}{W} \\ -L + W = 0 \end{cases}$

$V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lopt}}} = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho_i S C_{Lopt}}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\omega}}{\hat{\rho}}}$

$$\boxed{\frac{DE_m}{W} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)}$$

$$\sqrt{\hat{\rho}} = e^{-(h-h_i)/2\lambda}$$

$$\int_{h_i}^{h} \sqrt{\hat{\rho}}\, dh = (-2\lambda)\left[e^{-\left(\frac{h-h_i}{2\lambda}\right)}\right]_{h_i}^{h} = \int_1^{\hat{\omega}} -\frac{\hat{V} V_{B_i}}{c T_i}\left(\frac{T_i}{W_i \sqrt{\hat{\omega}}} - \frac{1}{E_m}\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)\sqrt{\hat{\omega}}\, W_i\right) d\hat{\omega}$$

ojo D no es constante

$$\longrightarrow \underbrace{e^{-\frac{h-h_i}{2\lambda}}}_{\sqrt{\hat{\rho}}} - 1 = \frac{\hat{V} V_{B_i} W_i}{\lambda \cdot c \cdot T_i}\left[\frac{T_i}{W_i}\left(\hat{\omega}^{1/2} - 1\right) - \frac{1}{6E_m}\left(\frac{\hat{V}^4 + 1}{\hat{V}^2}\right)\left(\hat{\omega}^{3/2} - 1\right)\right]$$

$$\hat{T}_i = \frac{T_i E_m}{W} = \hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V} + \frac{1}{\hat{V}}\right) = cte$$

$$\boxed{\sqrt{\hat{\rho}} = 1 + \frac{\hat{V} V_{B_i}}{\lambda \cdot c}\left[\frac{3\hat{\omega}^{1/2} - \hat{\omega}^{3/2} - 2}{3}\right]}$$

3

$$\frac{dx}{dt} = V = V_B \hat{V} \longrightarrow \frac{dx}{d\hat{\omega}} = -\frac{V_B \hat{V}}{c T_i} = -\frac{\hat{V}}{c \cdot T_i} V_{B_i} \sqrt{\frac{\hat{\omega}}{\hat{\rho}}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{x = -\frac{\hat{V} V_{B_i} \cdot W_i}{c T_i} \int_1^{\hat{\omega}} \frac{\sqrt{\hat{\omega}}\, d\hat{\omega}}{\left[1 + \frac{\hat{V} V_{B_i}}{3\lambda \cdot c}\left(3\hat{\omega}^{1/2} - \hat{\omega}^{3/2} - 2\right)\right]}}$$

Integrales (teórico).

SOLUCIÓN ESPORTERO x detrás

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO
E. Final Febrero - A + B + CD

09.02.99

PROBLEMA 1º

Un avión comercial de ~~pasajeros~~ diseñado para grandes distancias y provisto de turborreactores, efectúa un vuelo de crucero simétrico casi-estacionario a altitud constante conocida y a un coeficiente de sustentación constante tal que proporciona en todo instante máxima distancia recorrida por kg de combustible gastado.

Suponiendo además que:

a) Son datos conocidos: la superficie alar, S, los coeficientes de la polar parabólica (C_{D0} y k son constantes para el margen de números de Mach considerado), la densidad atmosférica, ρ, el consumo específico de combustible, c (independiente de π), el peso del avión sin combustible, W_2, el factor de Oswald, e, etc.
b) A la altitud considerada no existen limitaciones propulsivas

Se pide:

1. Determinar el valor del coeficiente de sustentación, $C_{L\,BR}$.
2. Determinar el peso de combustible necesario, W_F, para recorrer una distancia, d, dada.
3. Si por motivos de diseño preliminar se impone que el avión tenga unos valores de $C_{L\,BR}$ y de E_{max} dados, determinar el alargamiento y el coeficiente de resistencia parásita resultantes.

$L_D C_{D0}$ ¡ojo!

TIEMPO CONCEDIDO: 45^m

1)

$$\left(\frac{dx}{dW}\right)_{max} \longrightarrow V = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dW}\,\frac{dW}{dt}$$

$$\frac{dW}{dt} = -CT \Rightarrow -\frac{V}{CT} = -\frac{V_B\,\hat{V}}{CT_B\,\hat{T}} = -\frac{V_B\,\hat{V}}{C\,T_B}\,\frac{2\,\hat{V}^2}{\hat{V}^4+1} = \frac{dx}{dW}$$

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{E_m V_{Bi}}{C} \\ W^* &= W_i \end{aligned}\right\} \quad \frac{d\hat{x}}{d\hat{W}} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}}\,\frac{2\,\hat{V}^3}{\hat{V}^4+1}$$

$$C_L \,/\, \left(\frac{d\hat{x}}{d\hat{W}}\right)_{max} \; ; \text{ como } \; 1 = \hat{V}^2\,\frac{C_L}{C_{Lopt}} \Rightarrow \max \text{ en } \hat{V} = \max \text{ en } C_L$$

$$\frac{d\left(\hat{x}/d\hat{W}\right)}{d\hat{V}} = 0 \Rightarrow \hat{V}\Big|_{\left.\frac{d\hat{x}}{d\hat{W}}\right|_{max}} = 3^{1/4} \Rightarrow C_L = \frac{C_{Lopt}}{\sqrt{3}} \quad \boxed{C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{3K}}}$$

2)

$$C_L = cte \longrightarrow \hat{V} = cte = 3^{1/4} \Rightarrow \frac{d\hat{x}}{d\hat{W}} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}}\,\frac{2\cdot 3^{3/4}}{3+1} = -\frac{3^{3/4}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}}$$

$$\hat{d} = \int_0^{\hat{d}} d\hat{x} = \int_{\hat{W}_i=1}^{\hat{W}_F = 1-\varsigma} -\frac{3^{3/4}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}} = 3^{3/4}\left(1-\sqrt{1-\varsigma}\right)$$

$$d = x^*\hat{d} = \frac{V_{Bi}\,E_m}{C}\,3^{3/4}\left(1-\sqrt{1-\varsigma}\right), \quad \varsigma = \frac{W_F}{W_i} = \frac{W_F}{W_1+W_F} \; ; \; V_{Bi} = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}$$

$$W_F = \left(\frac{2dC}{3^{3/4}}\sqrt{\frac{\rho S}{2}}\sqrt[4]{K C_{D0}^3}\sqrt[4]{K C_{D0}^3} + W_2\right)^2 - W_2$$

PROBLEMA 15 (Actuaciones Integrales)

- $\hat{T}_{m11} \leq 1 \longleftrightarrow$ el techo teórico de la aeronave está por debajo de la tropopausa; es decir, en la troposfera.

- Vuelo: rectilíneo, horizontal, C.E, a $\hat{V}=cte=\hat{V}_i$ ⇒ ver apartado 11.3.1 (Ogde)

$* \hat{V}=cte \Longrightarrow n=1=\hat{V}^2\frac{C_L}{C_{Lopt}} \longrightarrow \boxed{\alpha=cte}$

$* \hat{X}=\frac{4\hat{V}_i^3}{\hat{V}_i^4+1}\left(1-\sqrt{1-q}\right) \longrightarrow \hat{V}_i\Big]_{\hat{X}_{max}}=\sqrt[4]{3}\simeq 1{,}316$ → esto es lo de quien pero no es lo q nos piden

$* X=\underbrace{X^*}_{=\frac{V_{Bi}\cdot E_m}{c}}\cdot\hat{X}=\frac{V_{Bi}\cdot E_m}{c}(\hat{X})=\frac{E_m}{c}\underbrace{\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}}}_{V_{Bi}}\cdot\frac{4\hat{V}_i^3}{\hat{V}_i^4+1}\cdot\left(1-\sqrt{1-q}\right)=$

$=\frac{E_m}{\underbrace{C_{11}\cdot\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_i}\right)^y}_{c}}\cdot\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}}\cdot\frac{4\hat{V}_i^3}{\hat{V}_i^4+1}\cdot\left(1-\sqrt{1-q}\right)=cte\cdot\frac{1}{\sigma^y}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\cdot\frac{\hat{V}_i^3}{\hat{V}_i^4+1}=f($

$V_{Bi}=\frac{V_{B0i}}{\sqrt{\sigma}}$

$\frac{\rho}{\rho_{11}}=\frac{c}{c_{11}}$; $\frac{T}{T_{11}}=\left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^x$; $\frac{c}{c_{11}}=\left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^y$; como $h<11\,km$ $\begin{cases} y=0{,}2\\ x=0{,}7\end{cases}$

$\sigma=\sigma_{11}\cdot\left(\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}}\right)^{1/x}=\sigma_{11}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\hat{V}_i^2+\frac{1}{\hat{V}_i^2}\right)}{\hat{T}_{11}}\right)^{1/x}=\frac{\sigma_{11}}{(\hat{T}_{11})^{1/x}}\left(\frac{\hat{V}_i^4+1}{2\hat{V}_i^2}\right)^x=\sigma(\hat{V}_i)$

{ VHR-CE: $\hat{T}=\hat{D}$ }

\# Luego: $X=cte\cdot\frac{\hat{V}_i^5}{(\hat{V}_i^4+1)^2} \longrightarrow \hat{V}_i\Big]_{X_{max}}=\sqrt[4]{\frac{5}{3}}=1{,}136$

$(\hat{T}_{11})^{1/x}= \sigma\Big]_{X_{max}}$

Y. Final x : $\boxed{X_{max} = \ldots}$

(todo está conocido)

$i \longrightarrow f$

$$\left\{\begin{array}{ll} \hat{x}_e = \hat{V} & (1) \\ h = cte & (2) \\ \hat{T} = \frac{DE_m}{W} & (3) \\ n = 1 & (4) \\ \dot{m} + \varphi = 0 \Rightarrow \dot{W} + cT = 0 & (5) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{D'E_m}{W} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right) & (6) \\ 1 = \hat{V}^2 \cdot \frac{C_L}{C_{L\,ópt}} & (7) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^x & (8) \\ \frac{c}{c_{11}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^y & (9) \end{array}\right.$$

Nº Ec.ns : 9

Nº Incógnitas: $x, \hat{V}, h, \hat{T}, \frac{DE_m}{W}, n, W, c, C_L$

Nº gdl = 10 − 9 = 1

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO - 1^er^ E. Parcial - B+CD 26.11.91

PROBLEMA 1º

Un avión de patrulla marítima provisto de turborreactor con consumo específico c ($c \doteq c(\pi)$), tiene unas características geométricas, aerodinámicas y másicas conocidas (en particular, la polar es parabólica de coeficientes C_{D_0} y K constantes, su coeficiente de sustentación máximo es $C_{L\,max}$ y el peso al despegue es W_0).

El avión realiza una misión de búsqueda en un área situada a una distancia de la base D_A conocida. Esa misión se efectúa a altitud constante conocida y consta de los siguientes tramos (ver figura adjunta):

0-1 : Desde la base al área, el avión efectúa un vuelo con ángulo de ataque constante, en condiciones tales que se maximiza el alcance.

1-2 : Al llegar al punto 1 suelta una sonoboya de peso W_S y se dirige, en vuelo rectilíneo con velocidad V constante y conocida, hasta un punto 2 en el que el coeficiente de sustentación es el correspondiente a $(L/D)_{máx}$.

2-3 : Una vez en el punto 2, suelta una segunda sonoboya y efectúa un viraje horizontal de 180° a la misma velocidad V del tramo anterior, de forma que el radio de viraje sea el menor posible. Háganse las hipótesis adicionales de que no existen limitaciones propulsivas ni estructurales, y de que el $R_{mín}$ no varía con el peso del avión durante el viraje, siendo el correspondiente al punto inicial del mismo.

3-4 : Al llegar al punto 3, suelta la tercera sonoboya y realiza un recorrido igual al del tramo 1-2, con la misma velocidad V y rumbo opuesto.

4-5 : En el punto 4, suelta una cuarta sonoboya y a continuación efectúa un número de vueltas N dado sobre la trayectoria circular de radio R que pasa por los puntos 1, 2, 3 y 4 en donde ha soltado las

Se pide determinar:

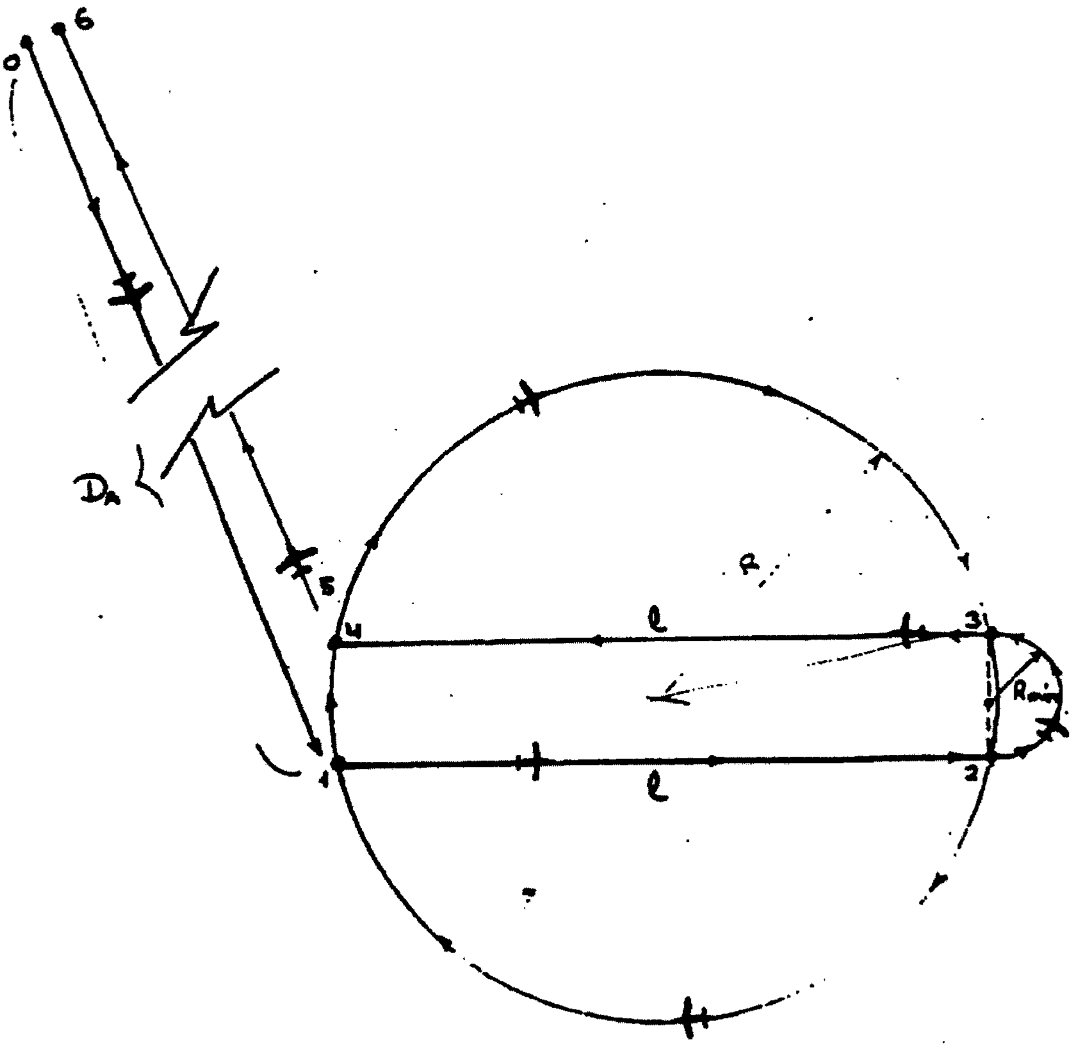
1º) El combustible consumido en el tramo 0-1.

2º) La distancia l recorrida en el tramo 1-2 y el combustible consumido en dicho tramo.

3º) El radio R_{min} y el combustible consumido en el tramo 2-3.

4º) El combustible consumido durante las N vueltas.

5º) El peso del avión al llegar a la base, W_6, y el combustible total consumido en la misión, W_F.



$1^h 15^m$

PROBLEMA DE EXAMEN 1º PARCIAL B+CD 26-11-91

- c no depende de π $\Rightarrow$ $c = c_{11}\left(\frac{\rho}{\rho_{11}}\right)^{?}$ $c_{11} = cte$.
- $C_D = C_{D0} + K C_L^2$; $C_{L\,MX}$, $W_i = W_S$
- $h = cte$ Distancia de la base al alcan se bombardea D_A

1º Tramo C-1 : $\alpha = \alpha_i\ cte$ $\Rightarrow$ El alcance máximo viene definido por la fórmula $x_{max} = \frac{v_{Di} \cdot E_m}{c} 3^{3/4} (1 - \sqrt{1-\zeta})$

donde: $x_{max} = D_A$

$$v_{Di} = \sqrt{\frac{2W_0}{\rho S}}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}$$

$$c = c_{11}\left(\frac{\rho(h)}{\rho_{11}}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\zeta_{cd} = \frac{W_{cd}}{W_0} = 1 - \left\{1 - \frac{D_A\, c_{11}\left(\frac{\rho(h)}{\rho_{11}}\right)^{1/2}}{\sqrt{\frac{2W_0}{\rho(h)S}}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\, 3^{3/4}}\right\}^2}$$

2º) Tramo 1-2.

Primero suelta la sonda por tanto el peso inicial de este tramo es $W_0 - W_{cd} - W_S$ $\Rightarrow$ $W_{i2} = W_0(1-\zeta_{cd}) - W_S$

El vuelo se realiza a $v = cte$. Aquí el alcance viene definido por la fórmula: $\hat{x} = 2\hat{v}_i \operatorname{arctag} \frac{\zeta\, \hat{v}_i^2}{1-\zeta+\hat{v}_i^4}$

$$\hat{v}_{i2} = \left(v \Big/ \sqrt{\frac{2W_{i2}}{\rho(h)S}}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\right)$$

Falta por conocer ζ : En el punto 2 la distancia es máxima y dado que

El consumo de combustible viene definido por:

$$\underbrace{\frac{dW}{dt} = C\, T_B\, \hat{T}}$$ donde : $C = C_{11}\left(\frac{\rho(h)}{\rho_{11}}\right)^{c_2}$; $T_B = 2W\sqrt{RC_D}$; $\hat{T} = \frac{\hat{v}_{R}}{v^2} = \frac{2W_{i2}}{\rho S v^2}\sqrt{\frac{R}{C_D}}$

$$\frac{dW}{dt} = C_{11}\left(\frac{\rho(h)}{\rho_{11}}\right)^{c_2}\frac{4W_{i2}R}{\rho S v^2}\, W$$

Si llamamos $\frac{1}{\tau} = C_{11}\left(\frac{\rho(h)}{\rho_{11}}\right)^{c_2}\frac{4W_{i2}R}{\rho S v^2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{W}{\tau}$$ que integrando :

$$\frac{dW}{W} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln W\Big|_{W_{i2}}^{W_3} = \int\frac{dt}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\pi}\frac{R}{v}d\theta = \frac{R}{\tau v}\pi$$

Si $v = cte \Rightarrow v = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{R}{v}d\theta$

$$\Rightarrow \ln\frac{W_3}{W_{i2}} = \frac{R\pi}{\tau v} \Rightarrow W_3 = W_{i2}\, e^{\frac{R\pi}{\tau v}} \Rightarrow W_{F23} = W_3 - W_{i2}$$

$$\Rightarrow W_{F23} = W_{i2}\left(e^{\frac{R\pi}{\tau v}} - 1\right) \Rightarrow \boxed{W_{F23} = \left(\frac{\rho(h)v^2 S}{2}\sqrt{\frac{C_{D0}}{k}} - W_S\right)\left(e^{\frac{R\pi}{\tau v}} - 1\right)}$$

4º) Al llegar al punto 3 suelta otra sonda, por tanto el peso inicial del recorrido 3-4 es: $W_{i3} = W_3 - W_S$

La fórmula para obtener ξ_{34} es la misma que la del apartado 2º) :

$$\ell = 2\hat{v}_{i34}\frac{E_m \cdot \hat{v}_{i34}}{...}\ \text{arctag}\frac{\xi_{34}\hat{v}_{i34}^2}{...}$$

$$\frac{dW}{1+\frac{b}{a}W^2} = -a\,C_{L}\left(\frac{\rho}{\rho_{L}}\right)^{\alpha_2}\cdot\frac{R}{U}\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \text{Integrando:}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\,\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}\,W\Bigg|_{W_{ii}}^{W_f} = -a\,C_{L}\left(\frac{\rho}{\rho_{L}}\right)^{\alpha_2}\frac{R}{U}\cdot 2\pi N$$

$$\boxed{\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}\,W_5 = \arctan\sqrt{\frac{b}{a}}\,W_{4i} - \sqrt{ba}\,C_{L}\left(\frac{\rho}{\rho_{L}}\right)^{\alpha_2}\frac{R}{U}\cdot 2\pi N}$$

El combustible consumido será $W_{F\,4\text{-}5} = W_{4i} - W_5$

5°) La fórmula que hay que aplicar es la misma que la del apartado 3° pero ahora el peso inicial del tramo no es W_6 sino W_5

$$\Rightarrow \quad W_{F_{5\text{-}6}} = W_5\left[1-\left\{1-\frac{D\,C_{L}\left(\frac{\rho}{\rho_{L}}\right)^{\alpha_2}}{\sqrt{\frac{2W_5}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}\,j^{*}}\right\}^{2}\right]$$

y el peso al llegar a la base:
$$\boxed{W_6 = W_5\left\{1-\frac{D\,C_{L}\left(\frac{\rho}{\rho_{L}}\right)^{\alpha_2}}{\sqrt{\frac{2W_5}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}\,j^{*}}\right\}^{2}}$$

El peso del combustible consumido en el total de la misión será:
$$\boxed{W_F = W_0 - W_6 = \sum_{0}^{5} W_{F_{i\text{-}i+1}}}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 25.06.10

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

Se considera la avioneta de la figura adjunta, provista de un grupo motopropulsor motor alternativo-hélice y de un piloto automático que mantiene la altitud y la velocidad aerodinámica, V, constantes y conocidas.

Dicha avioneta efectúa un trayecto rectilíneo y horizontal respecto al suelo de ida y vuelta, entre dos puntos A y B separados una distancia d conocida, en presencia de un viento horizontal de módulo V_w ($V > V_w$) y de orientación respecto del Norte ψ, ambas constantes conocidas.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas de la avioneta necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso inicial en el punto A, W_0, la superficie alar S, los coeficientes constantes de la polar parabólica, etc.).

b) El empuje del motor está dirigido según el eje x_w, y el consumo específico del motor, c, y el rendimiento propulsivo de la hélice, η_P, son constantes conocidas.

c) Todo el vuelo se efectúa sin resbalamiento y con las alas a nivel.

d) Puede considerarse despreciable el viraje necesario para cambiar el rumbo en el punto B.

e) La densidad del aire ρ es una constante conocida.

Se pide:

1º) Determinar las velocidades respecto del suelo en los tramos A-B y B-A.

2º) Determinar los tiempos empleados en recorrer los tramos A-B y B-A.

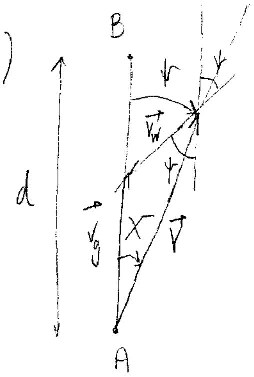
3º) Determinar los rumbos (ángulos que forma el eje x_w con el Norte) en los tramos A-B y B-A.

4º) Determinar los pesos de combustible consumido en los tramos A-B y B-A.

TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

8

1)



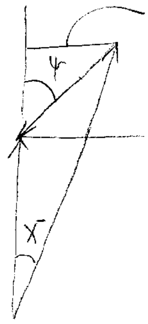
$$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$$

$$V_g = V \cos\chi - V_W \cos\psi$$

$$\operatorname{sen}\chi = \frac{V_W}{V}\operatorname{sen}\psi$$

$$\cos^2\chi = 1 - \operatorname{sen}^2\chi = 1 - \left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \operatorname{sen}^2\psi$$

$$\boxed{V_g = V\cdot\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \operatorname{sen}^2\psi} - V_W\cos\psi}$$



$V_W \operatorname{sen}\psi = V \operatorname{sen}\chi \rightarrow \operatorname{sen}\chi = \underbrace{\left(\frac{V_W}{V}\right)}_{<<1}\operatorname{sen}\psi$

$\operatorname{sen}\chi << 1$

$\operatorname{sen}\chi \simeq \chi$

Análogamente para $\overline{BA}$:

$$\boxed{V_g = V\cos\chi + V_W\cos\psi = V\cdot\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \operatorname{sen}^2\psi} + V_W\cos\psi}$$

2)

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g \cancel{\cos\chi_g}^{\,1} = V_g \Rightarrow \int_0^d dx_e = \int_0^t \left(V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \operatorname{sen}^2\psi} - V_W\cos\psi\right)dt \;;$$

$$\boxed{t_{AB} = \frac{d}{V\cdot\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \operatorname{sen}^2\psi} - V_W\cos\psi}}$$

Análogamente para $\overline{BA}$:

$$\boxed{t_{BA} = \frac{d}{V\cdot\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \operatorname{sen}^2\psi} + V_W\cos\psi}}$$

3) $\chi = ?$

4) $TV = T_m \eta_P = DV \rightsquigarrow T_m = \dfrac{DV}{\eta_P}$

$dW = -c P_m \, dt$

$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + \dfrac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$

$L = W \rightsquigarrow C_L = \dfrac{2W}{\rho S V^2}$

$dW = -c \cdot \dfrac{\rho S V^3}{2\eta_P}\left(C_{D0} + \dfrac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) dt$

$\displaystyle\int_{W_0}^{W_1} dW = -c\, \dfrac{\rho S V^3}{2\eta_P}\left(C_{D0} + \dfrac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) \cdot t_{AE}$

$\displaystyle\int_{W_0}^{W_1} dW = -c \cdot \dfrac{\rho S V^3}{2\eta_P}\left(C_{D0} + \dfrac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) \cdot \dfrac{d}{V\cdot\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \sin^2\psi} - V_W \cos\psi}$

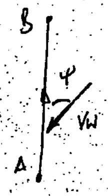
$\displaystyle\int_{W_0}^{W_1} \dfrac{2\eta_P \cdot V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \sin^2\psi} - V_W\cos\psi}{-c\cdot\rho S V^3 \left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) d}\, dW = 2\eta_P\left(V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \sin^2\psi} - V_W\cos\psi\right)\int_{W_0}^{W_1} \dfrac{dW}{A + BW^2} =$

$\displaystyle 2\eta_P\left(V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \sin^2\psi} - V_W\cos\psi\right) B \int_{W_0}^{W_1} \dfrac{dW}{\frac{A}{B} + W^2} = CB\int_{W_0}^{W_1} \dfrac{dW}{\frac{A}{B} + W^2} =$

$CB \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\frac{A}{B}}}\, \mathrm{Arctg}\left[\dfrac{W}{\sqrt{\frac{A}{B}}}\right]_{W_0}^{W_1}$

$A = \quad c\rho S V^3 C$

PROBLEMA 1 JUNIO 2010



① A-B

$V_{T1} = V\cos\theta - V_W \cos\psi$

$V \sin\theta - V_W \sin\psi = 0 \rightarrow \sin\theta = \frac{V_W}{V}\sin\psi$

$V_{T1} = V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \sin^2\psi} - V_W\cos\psi$

B-A

$V_{T2} = V\cos\theta' + V_W\cos\psi$

$V\sin\theta' - V_W\sin\psi = 0 \rightarrow \sin\theta' = \frac{V_W}{V}\cdot\sin\psi$

$V_{T2} = V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} + V_W\cos\psi$

②

$t_{AB} = \frac{d}{V_{T1}} = \frac{d}{V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2 \sin^2\psi} - V_W\cos\psi}$

$t_{BA} = \frac{d}{V_{T2}} = \frac{d}{V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} + V_W\cos\psi}$

③ $\boxed{\beta = 0}$

RUMBO A→B $\theta = \arcsin\left(\frac{V_W}{V}\cdot\sin\psi\right)$

RUMBO B→A $\theta' = 180 - \theta = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{V_W}{V}\sin\psi\right)$

④ COMBUSTIBLE A-B:

$dW = -C P_m\, dt \longrightarrow dt = \frac{-\eta}{c}\frac{dW}{DV}$

$T\cdot V = P_m \cdot \eta = D\cdot V$, $L = W$

$dx = V_{T1}\cdot dt$

$D\cdot V = \frac{\rho S C_{D0}}{2}V^3 + \frac{2K}{\rho S V}W^2 = A + BW^2$

$d = \int_{W_0}^{W_1} -\frac{\eta\cdot V_{T1}}{c}\cdot\frac{dW}{A+BV^2} = -\frac{\eta V_{T1}}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctg\frac{W\sqrt{AB}}{A}\right]_{W_0}^{W_1}$

$d = \frac{\eta}{c}\cdot\frac{V_{T1}}{V}\cdot\frac{1}{\sqrt{KC_{D0}}}\left[\arctg\frac{2W_0}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}} - \arctg\frac{2W_1}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\right]$

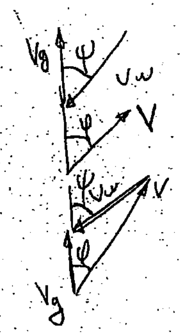
$W_1 = \frac{2W_0/\rho S V^2 \cdot \sqrt{K/C_{D0}}}{\tg\left(\frac{dc\sqrt{KC_{D0}}}{\eta V_{T1}}\right)\frac{4K}{C_{D0}}\frac{1}{(\rho S V^2)^2}\cdot W_0 + \frac{2}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}}$

COMBUSTIBLE A→B $= W_0 - W_1$

COMBUSTIBLE B-A = [illegible]

$d = \int_{W_1}^{W_2} -\frac{\eta V_{T2}}{c}\cdot\frac{dW}{A+BW^2}$

$W_2 = \frac{2W_1/\rho S V^2 \sqrt{K/C_{D0}}}{\tg\left(\frac{dc\sqrt{KC_{D0}}}{\eta V_{T2}}\right)\frac{4K}{C_{D0}}\frac{1}{(\rho S V^2)^2}W_1 + \frac{2}{\rho S V^2}}$ [illegible]



$V\cos\varphi - V_W$ [illegible]

$V\sin\varphi =$ [illegible]

[illegible]

$\cos\varphi = \sqrt{1-}$ [illegible]

EXAMEN FINAL (25.06.2010)

PROBLEMA 1

1) A-B:

$$\begin{cases} V_{T1} = V\cos\varphi - V_W\cos\psi \\ V\sin\varphi - V_W\sin\psi = 0 \rightarrow \sin\varphi = \frac{V_W}{V}\sin\psi \end{cases}$$

$$\boxed{V_{T1} = V\sqrt{\left(1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi\right)} - V_W\cos\psi}$$

B-A:

$$V_{T2} = V\cos\varphi' + V_W\cos\psi$$

$$V\sin\varphi' - V_W\sin\psi = 0 \rightarrow \sin\varphi' = \frac{V_W}{V}\sin\psi$$

$$\boxed{V_{T2} = V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} + V_W\cos\psi}$$

2)

$$\boxed{t_{AB} = \frac{d}{V_{T1}} = \frac{d}{V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} - V_W\cos\psi}}$$

$$\boxed{t_{BA} = \frac{d}{V_{T2}} = \frac{d}{V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} + V_W\cos\psi}}$$

3) $\beta = 0$

Rumbo A-B $\boxed{\varphi = \arcsin\left(\frac{V_W}{V}\sin\psi\right)}$

4)

Combustible A-B:

$$dW = -c\,P_m\,dt \longrightarrow dt = -\frac{\eta}{c}\frac{dW}{DV}$$

$$T\cdot V = P_m\cdot\eta = D\cdot V, \quad L = W$$

$$dd = V_{T_1}\cdot dt$$

$$D\cdot V = \frac{\rho S C_{D0}}{2}V^3 + \frac{2k}{\rho S V}W^2 = A + BW^2$$

$$d = \int_{W_0}^{W_1} -\frac{\eta}{c}V_{T_1}\frac{dW}{A+BW^2} = -\frac{\eta}{c}V_{T_1}\left[\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\frac{W\sqrt{AB}}{A}\right]_{W_0}^{W_1}$$

$$\frac{\eta}{c}\frac{V_{T_1}}{V}\frac{1}{\sqrt{C_{D0}k}}\left[\arctan\frac{2W_0}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{k}{C_{D0}}} - \arctan\frac{2W_1}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{k}{C_{D0}}}\right]$$

$$W_1 = \frac{\frac{2W_0}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{k}{C_{D0}}}}{\tan\left(\frac{d c V\sqrt{4C_{D0}}}{\eta V_{T_1}}\right)\frac{4k}{C_{D0}}\cdot\frac{1}{(\rho S V^2)^2}\cdot W_0 + \frac{2}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{k}{C_{D0}}}}$$

$$\boxed{\text{Combustible A-B} = W_1 - W_0}$$

Combustible B-A:

$$d = \int_{W_1}^{W_2} \frac{\eta V_{T_2}}{c}\frac{dW}{A+BW^2}$$

$$W_2 = \frac{\frac{2W_1}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{k}{C_{D0}}}}{\tan\left(\frac{d c V\sqrt{k C_{D0}}}{\eta V_{T_2}}\right)\frac{4k}{C_{D0}}\cdot\frac{1}{(\rho S V^2)^2}W_1 + \frac{2}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{k}{C_{D0}}}}$$

$$\boxed{\text{Combustible B-A} = W_1 - W_2}$$

C-180

Actuaciones Integrales

PROBLEMA 16

MA + H.

Una avioneta provista de un $\boxed{\text{motor alternativo}}$ con una hélice cuyo rendimiento η_p es constante y conocido, efectúa el remolque de un planeador desde un aeródromo (punto O) hasta cierto punto 1, lo suelta y vuelve a la base.

Este vuelo lo realiza a velocidad aerodinámica V y a la altitud h, ambas constantes y conocidas, en presencia de un viento horizontal (de cara en la ida y de cola a la vuelta) de magnitud V_w también constante conocida.

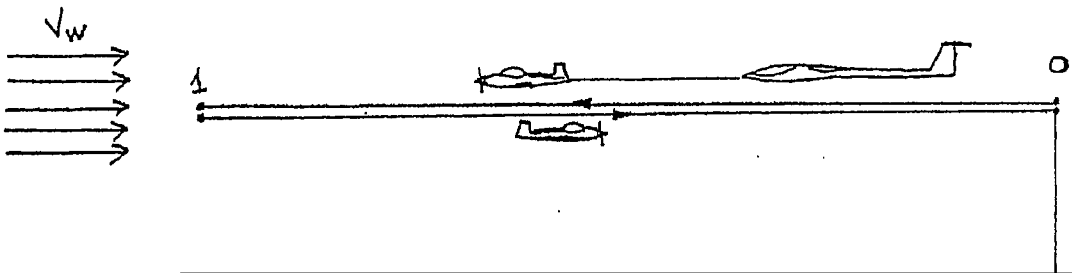
Suponiendo además que:

a) El planeador vuela a la misma altitud que la avioneta
b) El cable es inextensible, está siempre tenso y su peso y resistencia aerodinámica son despreciables.
c) El tramo de subida desde la base a la altitud de crucero y el descenso final, son despreciables frente al recorrido total.
d) El empuje del motor de la avioneta está dirigido según el eje x_w, y el consumo específico del mismo es constante y conocido.
e) Son conocidas las características geométricas, aerodinámicas y másicas de la avioneta (polar, $C_{D_a} = C_{D_{0a}} + K_a C_{La}^2$; superficie alar, S_a; peso vacío operativo, W_{av}; peso del combustible, W_F) y del planeador (polar, $C_{D_p} = C_{D_{0p}} + K_p C_{Lp}^2$; superficie alar, S_p; peso vacío operativo, W_p).

Se pide:

1°) Plantear una ecuación que permita obtener el peso de la avioneta en el punto más alejado de la base, W_{a1}, de forma que pueda volver a la misma después de soltar el planeador, habiendo consumido en el trayecto completo todo el combustible, W_F.

2°) Determinar el tiempo invertido en la ida, t_1, en la vuelta, t_2, y la distancia desde el punto de suelta a la base en función del peso W_{a1} que se obtendría en el apartado anterior.



C-141

Actuaciones Integrales TR.

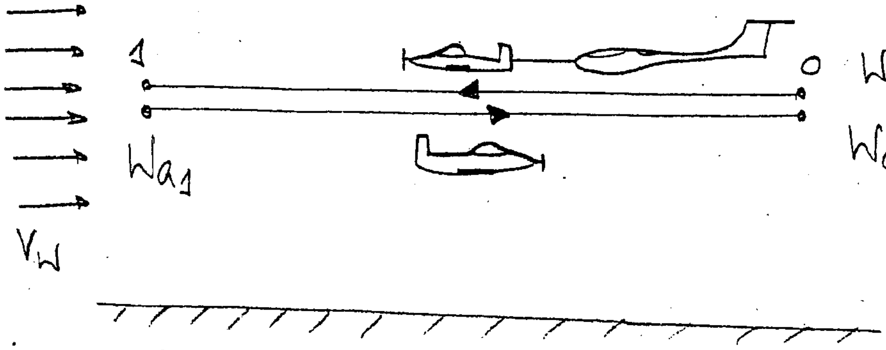
PROBLEMA 15

Se considera un avión provisto de turborreactor, con $\hat{T}_{11m} \leq 1$, en vuelo horizontal, rectilíneo, casi estacionario, a $\hat{V}$ constante.

Efectuando las hipótesis usuales (entre otras, que c_{11} no depende de π), calcular el alcance máximo del avión así como los valores de $\hat{T}$, $\hat{V}$, σ para los que éste se produce.

Comentar los resultados obtenidos.

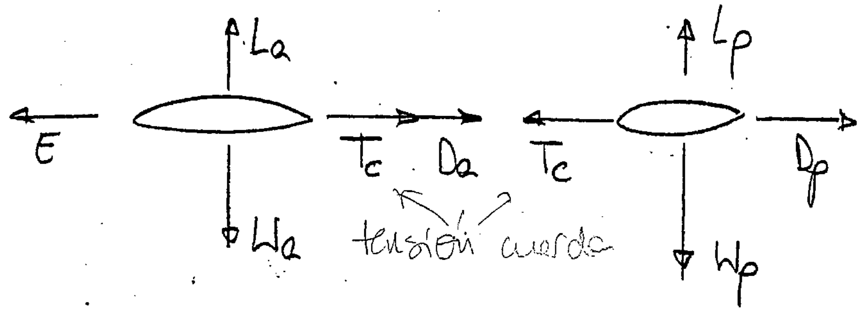
PROBLEMA 16



$W_{a_0} = W_{av} + W_f$

$W'_{a_0} = W_{av}$

1) $C = \frac{P_g}{E} = cte$



De $0 \to 1$

$V_g = (V - V_W)$

$T_c \neq 0$

De $1 \to 0$

$V_g = V + V_W$

$T_c = 0$

$E - T_c - D_a = 0$

$L_a - W_a = 0$

$\dot{W}_a + C P_m = 0$

$T_c - D_p = 0$

$L_p - W_p = 0$

$\eta_p = \frac{EV}{P_m} \longrightarrow P_m = \frac{EV}{\eta_p}$

$$\frac{dx}{dt} = V_g = \frac{dx}{dW_a}\cdot\frac{dW_a}{dt} = \frac{dx}{dW_a}\left(-\frac{CEV}{\eta_p}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{dx}{dW_a} = -\frac{V_g}{V}\cdot\frac{\eta_p}{CE}}$$

$$\frac{dW_a}{dt} = -C P_m = -C\frac{EV}{\eta_p} \longrightarrow \boxed{\frac{dt}{dW_a} = -\frac{\eta_p}{CEV}}$$

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2) = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + k \frac{W_p^2}{\ldots}$$

$L_a = W_a = \frac{1}{2}\rho V^2 S_a C_{La} \longrightarrow C_{La} = \frac{W_a}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_a}$

$$\text{Para}\begin{cases} A = \frac{1}{2}\rho V^2 (S_p C_{Dop} + S_a C_{D0a}) + K_p \dfrac{W_p^2}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_p} \\ B = \dfrac{K_a}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_a} \end{cases} \qquad E = A + B W_a^2 \ \underline{\underline{(\text{Para } 0 \to 1)}}$$

(IDA)

$$\text{Para}\begin{cases} A' = \frac{1}{2}\rho V^2 S_a C_{D0a} \\ B' = \dfrac{K_a}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_a} = B \end{cases} \qquad E = A' + B' W_a^2 = A' + B W_a^2 \ \underline{\underline{(\text{Para } 1 \to 0)}}$$

(VUELTA SIN PLANEADOR)

$$\boxed{\frac{dx}{dW_a} = -\frac{\eta_p}{CE} \cdot \frac{V_g}{V}}$$

$0 \to 1$

$$\int dx = X_{01} = \underbrace{-\frac{\eta_p}{C} \cdot \frac{\overset{(V-V_w)}{V_g}}{V}}_{cte} \int_{W_{a0}}^{W_{a1}} \frac{1}{E}\, dW_a = -\frac{\eta_p (V-V_w)}{CV} \int_{W_{a0}}^{W_{a1}} \frac{1}{A + B W_a^2}\, dW_a =$$

$$= -\frac{\eta_p (V-V_w)}{CV} \int_{W_{a0}}^{W_{a1}} \frac{1}{A} \cdot \frac{dW_a}{1 + \frac{B}{A} W_a^2} = -\frac{\eta_p (V-V_w)}{CVA} \int_{W_{a0}}^{W_{a1}} \frac{dW_a}{1 + \left(\sqrt{\frac{B}{A}}\, W_a\right)^2} =$$

$$= -\frac{\eta_p (V-V_w)}{CVA} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\, W_a\right)\Bigg|_{W_{a0}}^{W_{a1}} \cdot \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$X_{01} = -\frac{\eta_p (V-V_w)}{CV\sqrt{AB}} \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\, W_{a1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}} \cdot W_{a0}\right)\right]$$

$$X_{10} = - \ldots \frac{\ldots}{CV\sqrt{A'B'}} \left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\ldots A'}\ \ldots_0\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\ldots A'}\ \ldots_1\right)\right)$$

Como $X_{01} = X_{10} \longrightarrow W_{a1}$

2) $$\boxed{\frac{dt}{dW_a} = -\frac{\eta_p}{c\,\varepsilon\, V}}$$

$0 \to 1$ $$\int dt = t_1 = -\frac{\eta_p}{CV} \cdot \int_{W_{a0}}^{W_{a1}} \frac{1}{\varepsilon}\, dW_a = -\frac{\eta_p}{CV\sqrt{AB}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\, W_a\right)\Bigg|_{W_{a0}}^{W_{a1}}$$

$$t_1 = -\frac{\eta_p}{CV\sqrt{AB}} \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\, W_{a1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\, W_{a0}\right)\right]$$

$1 \to 0$ $$\int dt = t_2 = -\frac{\eta_p}{CV} \int_{W_{a1}}^{W_{a0}'} \frac{1}{\varepsilon}\, dW_a = -\frac{\eta_p}{CV\sqrt{A'B}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A'}}\, W_a\right)\Bigg|_{W_{a1}}^{W_{a0}'}$$

$$t_2 = -\frac{\eta_p}{CV\sqrt{A'B}} \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A'}}\, W_{a0}'\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{B}{A'}}\, W_{a1}\right)\right]$$

$$d = V \cdot t \longrightarrow \boxed{(V - V_W)\,t_1 = (V + V_W)\,t_2 = d}$$

PROBLEMA 16

- hipótesis: * $T \parallel V_w$
  * $c = cte = \frac{\varphi g}{P_M}$ (del tema 12); para mot-alternativos: $[C] = m^{-1}$

- $\dot{m} + \varphi = 0 \longrightarrow \dot{m} \cdot g + \varphi \cdot g = 0$ — $\dot{W}_{avion} + c \cdot P_M = 0 \longrightarrow$

$$\longrightarrow \frac{dW_{avion}}{dt} = -c P_M = -c \frac{TV}{\eta_p}$$

$\left\{ \eta_p = \frac{TV}{P_M} \right.$ donde $V \equiv$ velocidad aerodinámica (siempre!!), aunq haya viento)

1. CÁLCULO DE W_{a1} (EC. INTEGRAL)
2. CÁLCULO DE TIEMPOS.

Ida

- $V_g = V - V_w$
- $\dot{x} = V_g$
- $\hat{P}_u = \underbrace{\hat{P}_{d\,avioneta}}_{\text{pot. disipada por avioneta}} + \hat{P}_{d\,planeador}$
- $T = D_a + D_p$

Vuelta

$V_g = V + V_w$

$\dot{x} = V_g$

$\hat{P}_u = \hat{P}_{d\,avioneta}$

$T = D_a$

· **IDA**

$$\frac{dx}{d(1)} = \frac{dx}{dL} \cdot \frac{dt}{d()} = V_g \left(- \frac{\eta_p}{\ } \right) \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{2}\rho V^2 (S_0 C_{D0_a} + S_p C_{D_p}) + \frac{1}{2}\rho V^3 S_0 k_a \left(\frac{2W_6}{\rho V^2 S_0}\right)^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow d_{ida} = -\frac{V_{g_{ida}}\cdot 2_p}{C}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\rho V^3(S_o C_{Do_a}+S_p C_{Dp})}\cdot\frac{1}{2}\rho V^2 S_o \underbrace{\sqrt{\frac{S_o C_{Do_a}+S_p C_{Dp}}{S_o K_o}}}_{1/A}\ \mathrm{arctg}\, A W_b \Big]_{W_i = W_{a_v}+W+W_p}^{W_f = W_{a_1}+\ldots}$$

$$= V_{g_{ida}}\cdot t_{ida} \quad (\text{ya que } V_{g_{ida}} = cte = V - V_w)$$

· <u>VUELTA</u>

$$\frac{dW_b}{dx} = -\frac{c}{2_p V_{g_{vuelta}}}\cdot D_a\cdot V = -\frac{c}{2_p V_{g_{vuelta}}}\cdot\frac{1}{2}\rho V^3 S_o\left[C_{Do_a}+K_o\left(\frac{2W_b}{\rho V^2 S_o}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{c}{2_p V_g}\cdot\frac{1}{2}\rho V^3 S_o C_{Do_a}\left[1+\frac{K_o}{C_{Do_a}}\left(\frac{2W_b}{\rho V^2 S_o}\right)^2\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow d = -\frac{V_{g_{vuelta}}\cdot 2_p}{C}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\rho V^3 S_o C_{Do_a}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\rho V^2 S_o\sqrt{\frac{C_{Do}}{K_o}}}_{1/B}\cdot \mathrm{arctg}\, B W_b\Big]_{W_{a_1}}^{W_{a_v}} = (V+V_w)\,t$$

$$\left|\begin{array}{l} d_{ida} = d_{vuelta} \Rightarrow \boxed{W_{a_1}} \\ d = (V-V_w)\,t_{ida} \longrightarrow \boxed{t_{ida}} \end{array}\right. ; \quad d = (V+V_w)\,t_{vuelta} \longrightarrow \boxed{t_{vuelta}}$$

<u>Nota</u>:

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{sen}(a\pm b) = \mathrm{sen}\,a\cos b \pm \cos a\,\mathrm{sen}\,b \\ \cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b \end{array}\right| \rightarrow \mathrm{tg}(a\pm b) = \frac{\mathrm{tg}\,a \pm \mathrm{tg}\,b}{1 \mp \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b}$$

$A = \mathrm{tg}\,a$

TR

TR, + VHRU.

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

H2: 04-12-99

En una exhibición aérea, un avión vuela llevando colgado de una cuerda a un acróbata (ver figura adjunta). El vuelo puede descomponerse en dos tramos:

- Tramo 1-2: El vuelo del avión es horizontal, rectilíneo, simétrico, estacionario, con las alas a nivel y velocidad V_o conocida; la longitud de la cuerda, l_o, es constante y conocida y su ángulo respecto a la vertical es constante.
- Tramo 2-3: El vuelo del avión es horizontal, rectilíneo, simétrico, estacionario, con las alas a nivel y velocidad V_o conocida; se repliega la cuerda mediante un dispositivo mecánico siguiendo una ley $l = l(t)$ conocida.

Suponiendo además que:

- Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en concreto, el peso del avión sin acróbata, W_a, es constante, la superficie alar es S, la polar es parabólica de coeficientes constantes, C_{D0a}, k, constantes, etc).
- El empuje del avión está dirigido según su eje x_w.
- El cable se mantiene siempre tenso; su peso y las acciones aerodinámicas sobre el mismo son despreciables.
- El peso del acróbata es W_h y la única acción aerodinámica sobre él es la resistencia aerodinámica (coeficiente de resistencia C_{D0h} y superficie de referencia S_h constantes conocidas).
- ρ y g son constantes conocidas.

Se pide:

1. Para el tramo 1, determinar el empuje del avión, T, y su coeficiente de sustentación, C_L. Si se cumple $W_h/W_a = \varepsilon \ll 1$, simplificar las expresiones anteriores (despreciando términos de orden superior a ε) y compararlas con las que se obtendrían para las mismas condiciones de vuelo pero sin acróbata.
2. Para el tramo 2, plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar el empuje y el coeficiente de sustentación en función del tiempo.

(10)

1) Tramo 1-2:

$$\frac{W_h}{W_a} = \varepsilon \ll 1$$

$$T = D_a + D_h = \frac{1}{2}\rho V_0^2 (S C_{D0} + S K C_L^2 + S_h C_{D0h})$$

$$L = W_a + W_h$$

$$L = \frac{1}{2}\rho S V_0^2 C_L \rightarrow \boxed{C_L = \frac{2(W_a + W_h)}{\rho S V_0^2} = \frac{2(1+\varepsilon)}{W_a \rho S V_0^2}}$$

$$D_a = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2)$$

$$D_h = \frac{1}{2}\rho V^2 S_h C_{D0h}$$

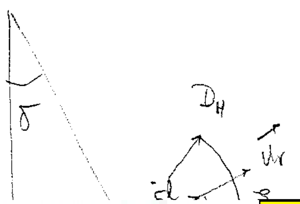
$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V_0^2 \left[S C_{D0} + \frac{4(1+\varepsilon)^2 K}{W_a \rho^2 V_0^4} + S_h C_{D0h}\right]} = \boxed{\frac{1}{2}\rho V_0^2 \left[S C_{D0} + S_h C_{D0h} + \frac{4K(1+2\varepsilon)}{W_a^2 \rho^2 V_0^4}\right]}$$

Sin acróbata:

$$\boxed{C_L = \frac{2W_a}{\rho S V_0^2}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \left(C_{D0} + \frac{4K W_a^2}{\rho^2 S^2 V_0^4}\right)}$$

2) Tramo 2-3:



$$\vec{V_r} = \dot{\delta} l \,\vec{u_r} + \dot{l}\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{V_H} = \vec{V_0} + \vec{V_r}$$

$$\begin{cases} \vec{u_r} = -\cos\delta\,\vec{i_h} - \operatorname{sen}\delta\,\vec{k_h} \\ \vec{u_\theta} = \operatorname{sen}\delta\,\vec{i_h} + \cos\delta\,\vec{k_h} \end{cases}$$

$$\vec{V_H} = [V_0 - \dot{\delta} l \cos\delta - \dot{l}\operatorname{sen}\delta]\,\vec{i_h} + [\dot{l}\cos\delta - \dot{\delta} l \operatorname{sen}\delta]\,\vec{k_h}$$

$$-L + W_a + W_h - D_h \operatorname{sen}\varphi = 0$$

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2º A - 91 543 45 12

H2 04-12-99

En una exhibición aérea, un avión vuela llevando colgado de una cuerda a un acróbata (ver figura adjunta). El vuelo puede descomponerse en dos tramos:

- Tramo 1-2: El vuelo del avión es horizontal, rectilíneo, simétrico, estacionario, con las alas a nivel y velocidad V_o conocida; la longitud de la cuerda, l_o, es constante y conocida y su ángulo respecto a la vertical es constante.
- Tramo 2-3: El vuelo del avión es horizontal, rectilíneo, simétrico, estacionario, con las alas a nivel y velocidad V_o conocida; se repliega la cuerda mediante un dispositivo mecánico siguiendo una ley $l = l(t)$ conocida.

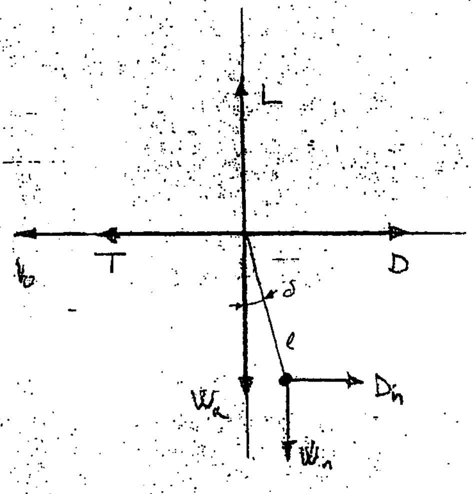
Suponiendo además que:

- Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en concreto, el peso del avión sin acróbata, W_a, es constante, la superficie alar es S, la polar es parabólica de coeficientes constantes, C_{D0}, k, constantes, etc.
- El empuje del avión está dirigido según su eje x_w.
- El cable se mantiene siempre tenso, su peso y las acciones aerodinámicas sobre el mismo despreciables.
- El peso del acróbata es W_h y la única acción aerodinámica sobre él es la resistencia aerodinámica (coeficiente de resistencia C_{D0h} y superficie de referencia S_h constantes conocidas).
- ρ y g son constantes conocidas.

Se pide:

1. Para el tramo 1, determinar el empuje del avión, T, y su coeficiente de sustentación, C_L. Si se cumple $W_h/W_a = \varepsilon \ll 1$, simplificar las expresiones anteriores (despreciando términos de orden superior a ε) y compararlas con las que se obtendrían para las mismas condiciones de vuelo pero sin acróbata.
2. Para el tramo 2, plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar el empuje y el coeficiente de sustentación en función del tiempo.

Tramo 1-2



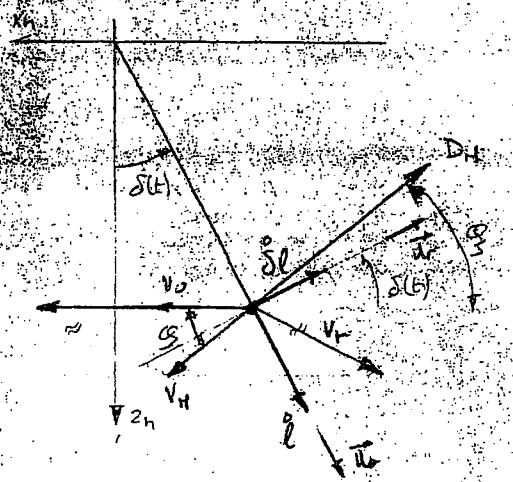
$$L = W_h + W_a \Rightarrow C_L = \frac{2(W_a + W_h)}{\rho V_0^2 S_a}$$

$$T = D + D_h$$

$$T = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S_a (C_{D0a} + K C_L^2) + \frac{1}{2}\rho V_0^2 S_h C_{D0h}$$

$$\boxed{\begin{gathered} C_L = \frac{2 W_a}{\rho V_0^2 S_a}(1+\varepsilon) \\ T = \frac{1}{2}\rho V_0^2 (S_a C_{D0a} + S_h C_{D0h}) + \frac{2 K W_a^2}{\rho V_0^2 S_a}(1+2\varepsilon) \end{gathered}}$$

Tramo 2-3



$V_r \rightarrow$ velocidad relativa hombre - avión

$$\vec{V_r} = \dot{\delta}\ell\,\vec{u_r} + \dot{\ell}\,\vec{u_\theta}$$

$V_H \rightarrow$ Velocidad absoluta hombre

$$\vec{V_H} = \vec{V_0} + \vec{V_r}$$

$$\vec{u_r} = -\cos\delta\,\vec{i_h} - \operatorname{sen}\delta\,\vec{k_h}$$

$$\vec{u_\theta} = -\operatorname{sen}\delta\,\vec{i_h} + \cos\delta\,\vec{k_h}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{V_H} = (V_0 - \dot{\delta}\ell\cos\delta - \dot{\ell}\operatorname{sen}\delta)\vec{i_h} + (\dot{\ell}\cos\delta - \dot{\delta}\ell\operatorname{sen}\delta)\vec{k_h} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\dot{\ell}\cos\delta - \dot{\delta}\ell\operatorname{sen}\delta}{V_0 - \dot{\delta}\ell\cos\delta - \dot{\ell}\operatorname{sen}\delta} \end{gathered}}$$

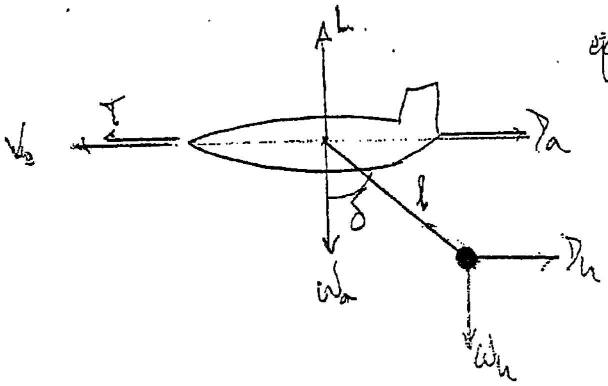
$$\left.\begin{aligned} \vec{V_r}\cdot\vec{r} &= V_r\, r\cos\theta = \ell\sqrt{(\dot{\delta}\ell)^2 + (\dot{\ell})^2}\,\cos\theta \\ \vec{V_r}\cdot\vec{r} &= (\dot{\delta}\ell\,\vec{u_r} + \dot{\ell}\,\vec{u_\theta})(\ell\,\vec{u_r}) = \dot{\delta}\ell^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\dot{\delta}\ell}{\sqrt{(\dot{\delta}\ell)^2 + (\dot{\ell})^2}}$$

$\dot{\ell}$

$$T + D_H - D_H\cos\varphi = 0$$

H2 (4-12-99)

1 Tramo 1



Vuelo rectilíneo y estacionario

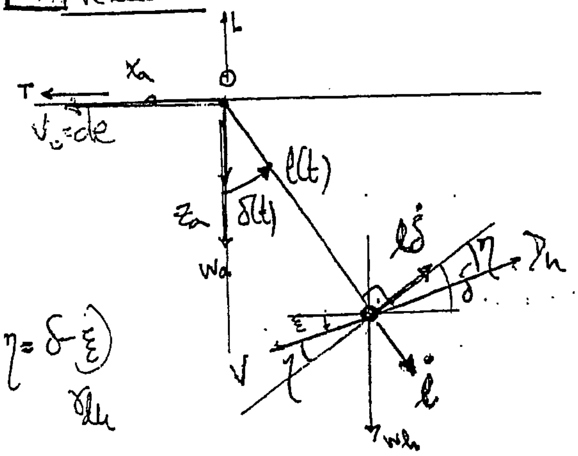
ejes W $\begin{cases} -L+W_a+W_h=0 \Rightarrow \boxed{C_L=\dfrac{2(W_a+W_h)}{\rho V_0^2 S_a}=\dfrac{2W_a}{\rho V_0^2 S_a}(1+\varepsilon)} \\ T-D_a-D_h=0 \Rightarrow T-\frac{1}{2}\rho V_0^2\left[S_a C_{D_0}+kC_L^2+S_h C_{D_{0h}}\right]=0 \end{cases}$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}\rho V_0^2\left(S_a C_{D_{0a}}+S_h C_{D_{0h}}\right)+\frac{2kW_a^2}{\rho V_0^2 S_a}(1+\varepsilon)^2}$$

$\varepsilon \ll 1 \Rightarrow T, C_L$ los que habría sin acrobata

---

2 Tramo 2



$\eta=\delta-\xi$ γ_{lu}

$\begin{cases} T-D_a-D_h\cos\xi=0 & (1) \\ -L+W_a+W_h-D_h\sin\xi=0 & (2) \end{cases}$ $\left(\varepsilon=\frac{W_h}{W_a}\ll 1 \Rightarrow \text{cte sistema con } V_0=\text{cte}\right)$

Momento cinético respecto O: $H_0=m\vec r\wedge\vec V$ $\frac{dH_0}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{W_h}{g}l\cdot l\dot\delta\right)$

$\vec V_h=\vec V_0+\dot l\,\vec u_l+l\dot\delta\,\vec u_\delta=(V_0-\dot l\sin\delta-l\dot\delta\cos\delta)\vec i+(\dot l\cos\delta-l\dot\delta\sin\delta)\vec k$

$\vec u_l=-\sin\delta\,\vec i+\cos\delta\,\vec k$ $\quad \vec u_\delta=-\cos\delta\,\vec i-\sin\delta\,\vec k$

$$\operatorname{tg}\xi=\frac{V_{hx}}{V_{hz}}=\frac{V_0-\dot l\sin\delta-l\dot\delta\cos\delta}{\dot l\cos\delta-l\dot\delta\sin\delta}\ (3);\ \sin\xi=\dots\ ;\ \cos\xi=\dots$$

De (2): $C_L=\dfrac{2(W_a+W_h-D_h\sin\xi)}{\rho V_0^2 S_a}$ (2)*; $D_h=\frac{1}{2}\rho V_h^2 S_h C_{D_{0h}}$ (4)

$\sum H_0=\dfrac{dH_0}{dt}\Rightarrow -W_h\sin\delta\cdot l+D_h\cos\eta\cdot l=\dfrac{W}{g}(2l\dot l\dot\delta+l^2\ddot\delta)$ (5) $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{W}{g}l^2\dot\delta\right)$ → dist. vel. $\quad \eta=\delta-\xi$

$\begin{bmatrix}(1)\\(2)^*\\(3)\\(4)\\(5)\\(6)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}T,\\D_h,\\\xi,\\C_L,\\\delta,\\D_a\end{bmatrix}$

$D_a=\frac{1}{2}\rho V_0^2 S_a(\dots)$

MOMENTO CINÉTICO

$$\boxed{\sum \vec{M}_o = \begin{cases} \dfrac{d\vec{H}_o}{dt} + M\vec{V}^{o}_{01} \wedge \vec{V}^{G}_{21} & \text{(En ejes Absolutos)} \\ \dfrac{d\vec{H}_o}{dt} + M\vec{OG} \wedge \vec{\gamma}^{o}_{01} & \text{(En ejes relativos)} \end{cases}}$$

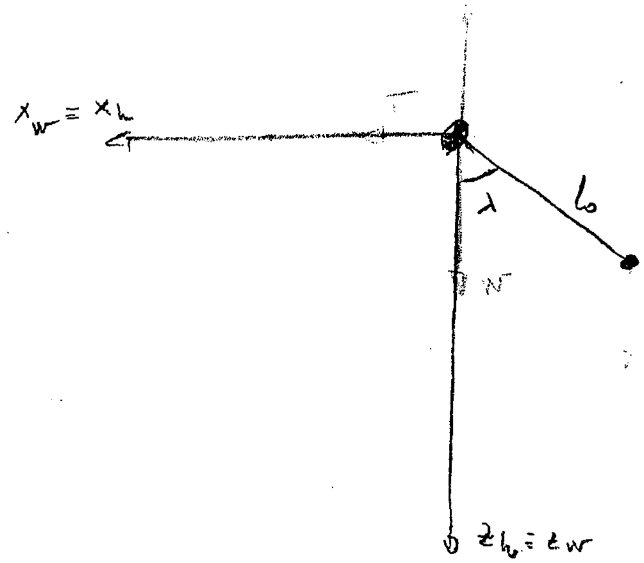
1)

4.12.99

1/2

¿ T ; c_L ? $\frac{W_h}{W} = \varepsilon << 1$ -> simplificar. Comparar sin acrobata.

· 1.3: Vuelo horizontal, rectilíneo, simétrico, estacionario, v_0 = cte, l_0 cte, áng. cte.



Ecuaciones dinámicas

$$(1)\ \cdot\ T - D - D_h = 0 \Leftarrow T = D + D_h = \frac{1}{2}\rho v_0^2 S (c_{D_0} + k c_L^2) + \frac{1}{2}\rho v_0^2 S_h c_{D_h}$$

$$(2)\ \cdot\ L - W - W_h \overset{+D_h \operatorname{sen}\lambda}{=0} \Leftarrow L = W + W_h \overset{+D_h \operatorname{sen}\lambda}{} \quad [L]_2$$

$[c_L]_1$

$[T]_3$

$$L = \frac{1}{2}\rho v_0^2 S c_L \Rightarrow c_L = \frac{2L}{\rho S v_0^2} \Rightarrow \boxed{c_L = \frac{2(W + W_h + D_h \operatorname{sen}\lambda)}{\rho S v_0^2}}$$

$$\hookrightarrow T = \frac{1}{2}\rho S v_0^2 \left(c_{D_0} + k \frac{4L^2}{(\rho S v_0^2)^2}\right) + \frac{1}{2}\rho v_0^2 S_h c_{D_h}.$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\rho S v_0^2 \left(c_{D_0} + \frac{4k(W + W_h - D_h \operatorname{sen}\lambda)^2}{\dots}\right.$$

$(\rho S v_0^2)^2$

d) en atmósfera en calma coincide con la de mínima potencia F
e) en atmósfera en calma coincide con la de máximo gradiente de subida F

28. El alcance máximo en un TR a α = cte es:
a) a V_B F
b) $V > V_B$ V
c) $V < V_B$ F
d) Independiente de la altura, F
e) Máximo ligeramente sobre el nivel del mar F
f) Máximo ligeramente debajo del techo V

29. ¿Es posible realizar un viraje correcto sólo utilizando alerones? F

30. En un avión que acelera en subida rectilínea, la velocidad ascensional:
a) es mayor que la obtenida al aplicar la teoría estacionaria F
b) es menor que la obtenida al aplicar la teoría estacionaria V
c) es igual que la obtenida al aplicar la teoría estacionaria F
d) ninguna de la afirmaciones anteriores puede efectuarse con carácter general F

31. En un viraje horizontal estacionario simétrico:
a) la velocidad de balance es nula en ejes cuerpo F
b) la velocidad de balance es distinta de cero en ejes cuerpo V
c) el momento de guiñada vale cero por ser la velocidad de guiñada constante V
d) el momento de guiñada es de segundo orden si se considera que el factor de carga es 1+ε.

32. Un avión decelera en subida rectilínea, la velocidad ascensional es:
a) mayor que la obtenida por teoría cuasiestacionaria V
b) menor que la obtenida por teoría cuasiestacionaria F
c) igual que la obtenida por teoría cuasiestacionaria F
d) la misma puede decirse con carácter general F

33. La velocidad de máximo alcance en TR:
a) no depende del peso F
b) sube si el viento sopla de cara y baja si sopla de cola V
c) baja si el viento sopla de cara y sube si sopla de cola F
d) en atmósfera en calma coincide con la de máximo gradiente de subida F
e) en atmósfera en calma coincide con la de ~~máxima~~ mínima potencia disipada F

34. Los valores del radio de viraje mínimo y de velocidad angular máxima en un viraje horizontal simétrico instantáneo:
a) están sujetos a limitación instrumental y la aplicación de tal limitación aumenta con la altura F
b) disminuye con la velocidad F
c) aumenta con la altura F
d) disminuye con la altura
e) es independiente de h y v
f) no está sujeto a limitación estructural

35. En un viraje horizontal estacionario, la bola está desplazada a la derecha de su posición neutra:
a) el piloto debe pisar el pedal derecho para corregir V
b) el piloto debe pisar el pedal izquierdo para corregir F
c) el ángulo de resbalamiento es positivo V
d) el ángulo de resbalamiento es negativo F

4-12-11

2/2

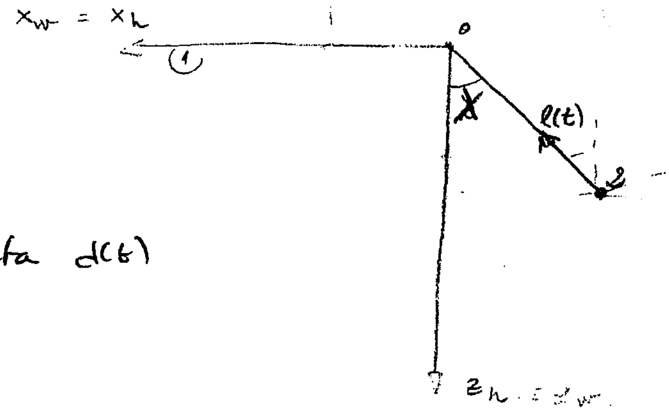
Si no existiera $\Rightarrow$ $c_L' = \dfrac{2W}{\rho S v_0^2}$

$$T' = \frac{1}{2}\rho_0 S v_0^2 \left(c_{D_0} + \frac{4kW^2}{(\rho S v_0^2)^2} \right)$$

$$\frac{c_L'}{c_L} = \frac{1}{(1+\epsilon)} \Rightarrow c_L = c_L' \cdot (1+\epsilon)$$

<u>TRAMO 2 3</u>

¿ T; c_L $f_c(T)$?



Falta $d(t)$

$$\Sigma \vec{F} = m \frac{d\vec{v}_g}{dt}.$$

$\vec{\rho} = \rho \vec{u}_r$

$\vec{v} = \dot{\rho}\, \vec{u}_r + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$$\vec{v}_g = v_0 \vec{i}_h + \vec{v}_h$$

$$\vec{v}_h = \vec{v}_{20} + \vec{v}_{01} = +\dot{\ell}(t) \operatorname{sen}\alpha\, \vec{i}_h - \dot{\ell}(t) \cos\alpha\, \vec{k}_h + v_0 \vec{i}_h$$

$$\Rightarrow \vec{v}_g = 2 v_0 \vec{i}_h + \dot{\ell}(t) \operatorname{sen}\alpha\, \vec{i}_h - \dot{\ell}(t)\cos\alpha\, \vec{k}_h.$$

$\dfrac{d H_0}{dt}\Big|_0 = \Sigma \vec{M}_{ext}$ (Inercial)

$$\Rightarrow (1)\ T - D - D_h^{\cos\alpha} = \frac{W_T}{g} \ddot{\ell}(t) \operatorname{sen}\alpha.$$

25

a) NO " $\gamma_{dmu} = 1/Em = 2\sqrt{C_{\infty}\cdot K}$

b) Sí " $\hat{v}\,\gamma_{dm} = 1$

c) Sí " $\hat{v}_{\substack{m\acute{o}x\\ ant}} = \hat{v}\,\delta_{sm} = 3^{-1/4}$

d) $M/S \downarrow \longrightarrow V_B \downarrow \longrightarrow V_{dmu} \downarrow \longrightarrow$ mejor autoruz
$A \uparrow \longrightarrow K \downarrow \longrightarrow \gamma_{dmu} \downarrow \longrightarrow$ " alcance
$ \longrightarrow V_{dmu} \downarrow \longrightarrow$ " autoruz

Sí

26

a) Sí $w \downarrow \longrightarrow V_{dm} \downarrow \longrightarrow$ mejor cobertura

b) no $w \equiv$ m influye en γ_{dmu}.

Ingenieros Aeronáuticos
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

TR
Vuelo
simétrico.

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

H5: 11-12-97

Se considera un avión con un cuerpo fuselado de revolución colgado debajo del fuselaje en su plano de simetría (ver figura adjunta), en vuelo horizontal rectilíneo simétrico con alas a nivel. El vuelo se efectúa a altura h_o respecto al suelo conocida, con velocidad aerodinámica conocida (su módulo V_o y su dirección respecto al norte φ son constantes conocidas) y en presencia de un viento horizontal del Oeste de módulo V_w asimismo constante y conocido.

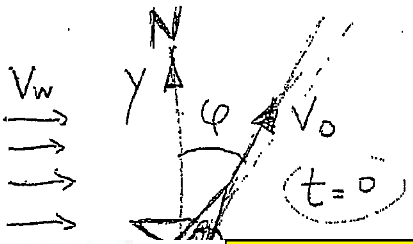
A partir de estas condiciones iniciales, el cuerpo fuselado se desprende del avión con velocidad relativa respecto a éste nula y cae a tierra, mientras el avión sigue volando con el mismo empuje y ángulo de ataque que antes de la suelta.

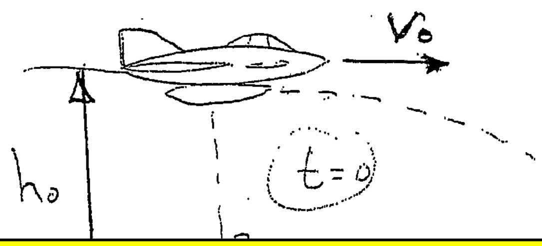
Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión y del cuerpo lanzable. Por ejemplo: para el avión, la superficie alar es S, la polar y el coeficiente de sustentación son $C_{Da} = C_{D0a} + k_a C_L^2$, $C_L = C_L(\alpha)$, el peso es constante e igual a W_a, etc; y para el cuerpo lanzable, sustentación es nula, su coeficiente de resistencia parásita referido a S es C_{D0b}, su peso es W_b, la componente del peso según su eje x_w es despreciable frente a otras fuerzas del problema, etc.
- El empuje de los motores del avión es paralelo al eje x_w.
- Tras la suelta del cuerpo se considera que el avión se sitúa instantáneamente en condiciones de vuelo rectilíneo estacionario con ángulo de asiento de velocidad pequeño ($|\gamma| \ll 1$).
- Los efectos de interferencia entre el avión y el cuerpo lanzable son despreciables.
- ρ y g son constantes conocidas dentro del intervalo de alturas considerado.

Se pide:

1. Plantear las integrales que permitirían determinar la trayectoria del cuerpo lanzable en unos ejes x, y, z ligados al suelo (ver figura).
2. Determinar la velocidad del avión y su ángulo de asiento de velocidad aerodinámica pequeño tras la suelta. Comentar los resultados obtenidos y simplificar las expresiones para el caso $W_b/W_a = \varepsilon \ll 1$.
3. Determinar las trayectoria del avión respecto al suelo.





H7 11-12-97

Se considera un avión con un cuerpo fuselado de revolución colgado debajo del fuselaje en su plano de simetría (ver figura adjunta), en vuelo horizontal rectilíneo simétrico con alas a nivel. El vuelo se efectúa a altura h_0 respecto al suelo conocida, con velocidad aerodinámica conocida (su módulo V_0 y su dirección respecto al norte φ son constantes conocidas) y en presencia de un viento horizontal del Oeste de módulo V_w asimismo constante y conocido.

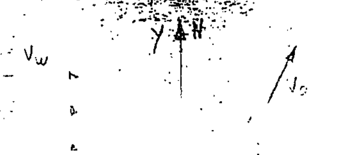
A partir de estas condiciones iniciales, el cuerpo fuselado se desprende del avión con velocidad relativa respecto a éste nula y cae a tierra, mientras el avión sigue volando con el mismo empuje y ángulo de ataque que antes de la suelta.

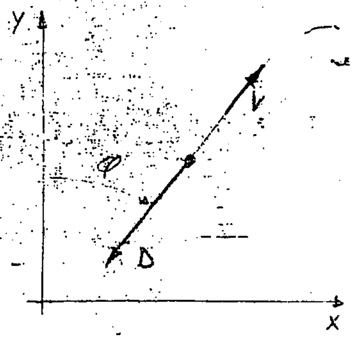
Suponiendo además que:

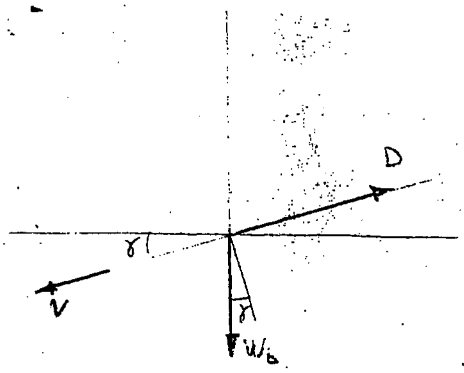
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión y del cuerpo lanzable. Por ejemplo: para el avión, la superficie alar es S, la polar y el coeficiente de sustentación son $C_{Da} = C_{D0a} + k_a C_L^2$, $C_L = C_L(\alpha)$, el peso es constante e igual a W_a, etc; y para el cuerpo lanzable, su sustentación es nula, su coeficiente de resistencia parásita referido a S es C_{D0b}, su peso es W_b, la componente del peso según su eje z_w es despreciable frente a otras fuerzas del problema, etc.
- El empuje de los motores del avión es paralelo al eje x_w.
- Tras la suelta del cuerpo se considera que el avión se sitúa instantáneamente en condiciones de vuelo rectilíneo estacionario con ángulo de asiento de velocidad pequeño ($|\gamma| \ll 1$).
- Los efectos de interferencia entre el avión y el cuerpo lanzable son despreciables.
- ρ y g son constantes conocidas dentro del intervalo de alturas considerado.

Se pide:

1. Plantear las integrales que permitirían determinar la trayectoria del cuerpo lanzable en unos ejes x, y, z ligados al suelo (ver figura).
2. Determinar la velocidad del avión y su ángulo de asiento de velocidad aerodinámica pequeño tras la suelta. Comentar los resultados obtenidos y simplificar las expresiones para el caso $W_b/W_a = \varepsilon \ll 1$.
3. Determinar las trayectoria del avión respecto al suelo.







Despreciable

$$\cancel{\operatorname{sen}\gamma W_b} - D = \frac{W_b}{g}\dot{v} \Rightarrow \frac{W_b}{g}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho v^2 S' C_{Dob}$$

$$W_b \cos\gamma = \frac{W_b}{g} v \dot{\gamma}_d \Rightarrow \frac{d\gamma_d}{dt} = \frac{g}{v}\cos\gamma_b \sim \frac{g}{v}$$

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2}\frac{g}{W_b}\rho S' C_{Dob}\, dt \Rightarrow v(t) = \frac{1}{\frac{1}{V_0} + \frac{1}{2}\frac{g}{W_b}\rho S' C_{Dob}\, t}$$

$$\int_0^{\gamma_d} \frac{d\gamma_d}{\cos\gamma_d} = g\int_0^t \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{2}\frac{g}{W_0}\rho S' C_{Dob}\, t\right) \Rightarrow \gamma_d = \gamma_d(t)$$

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = v(t)\operatorname{sen}\varphi \cos\gamma_d(t) \\ V_y = v(t)\cos\varphi \cos\gamma_d(t) \\ V_z = v(t)\operatorname{sen}\gamma_d(t) \end{cases} \qquad \vec{V_w} = \begin{cases} V_{wx} = V_w \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases}$$

$$V_{gx} = \frac{dx}{dt} = v(t)\operatorname{sen}\varphi \cos\gamma_d(t) + V_w$$

$$V_{gy} = \frac{dy}{dt} = v(t)\cos\varphi \cos\gamma_d(t)$$

$$V_{gz} = \frac{dz}{dt} = v(t)\operatorname{sen}\gamma_d(t)$$

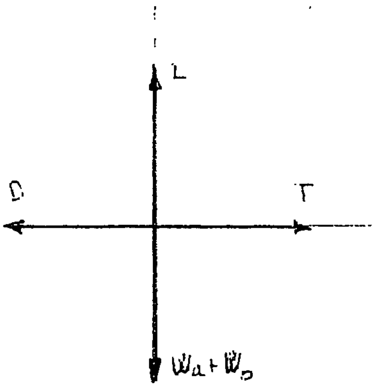
$$x(t) = \int_0^t \left(v(t)\operatorname{sen}\varphi \cos\gamma_d(t) + V_w\right)dt$$

$$y(t) = \int_0^t v(t)\cos\varphi \cos\gamma_d(t)\, dt$$

$$0 - h_0 = \int^t v(t)\operatorname{sen}\gamma_d(t)\, dt$$

2)

Antes del lanzamiento



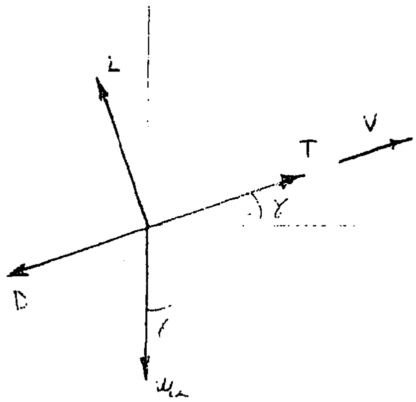
$$L = W_a + W_b = \frac{1}{2}\rho S V_0^2 C_L \Rightarrow C_L^0 = \frac{2(W_a+W_b)}{\rho S V_0^2}$$

$$T^0 = D^0 = \frac{1}{2}\rho S V_0^2 \left(C_{D0a} + C_{D0b} + K C_L^2 \right)$$

* Ambas resistencias aerodinámicas referidas a la misma S

$$T^0 = \frac{1}{2}\rho S V_0^2 \left(C_{D0a} + C_{D0b} \right) + \frac{2K(W_a+W_b)}{\rho S V_0^2}$$

Después del lanzamiento:



$$T = T^0 \; ; \; C_L = C_L^0$$

$$L = W_a = \frac{1}{2}\rho S V_1^2 C_L^0$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2W_a}{\rho S C_L^0}} = \boxed{\frac{V_0}{\sqrt{1+\varepsilon}} = V_1}$$

$$T^0 - D - W_a \operatorname{sen}\gamma = 0$$

$$\gamma = \frac{T^0 - D}{W_a} = \frac{T^0 - \frac{1}{2}\rho S V_1^2 \left(C_{D0a} + K C_L^{0\,2} \right)}{W_a}$$

$$\gamma = \frac{1}{W_a}\left[\frac{1}{2}\rho S(V_0^2 - V_1^2) C_{D0a} + V_0^2 C_{D0b}\right] + \frac{2KW_a}{\rho S}\left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{V_0^2} - \frac{1}{V_1^2}\right]$$

Sustituyendo V_1 y despreciando términos de orden ε^2

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2}\frac{\rho S}{W_a} V_0^2 \left\{\varepsilon C_{D0a} + C_{D0b}\right\} + \frac{2KW_a\varepsilon}{\rho S V_0^2}}$$

$$\boxed{\varepsilon \to 0 \qquad \gamma = \frac{1}{2}\frac{\rho S}{W_a} V_0^2 C_{D0b}}$$

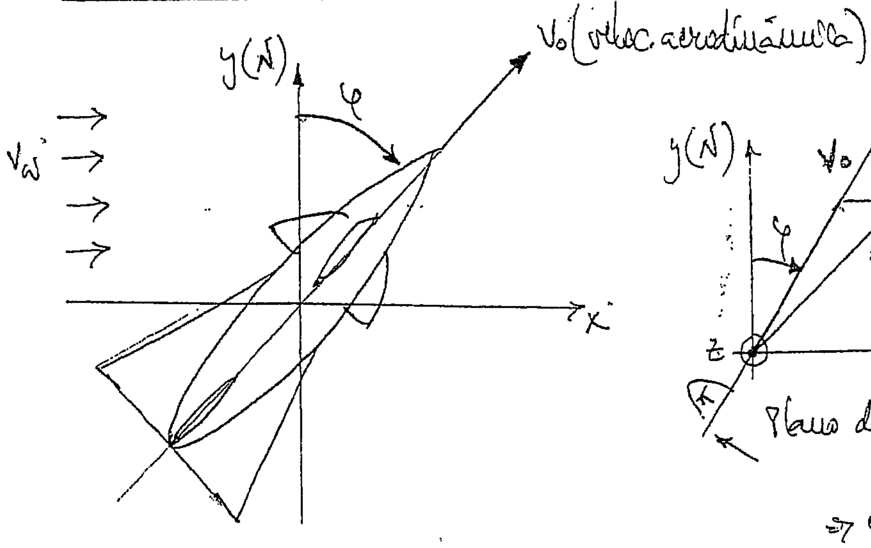
3) $\gamma, V_1 = cte$

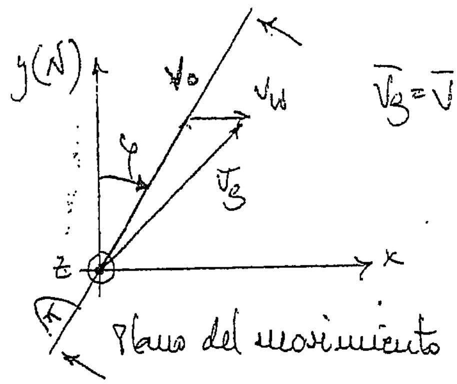
$$x = \left(\frac{V_0}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cos\gamma \operatorname{sen}\varphi + V_w\right) t$$

$$y = \left(\frac{V_0}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cos\gamma \cos\varphi\right) t$$

$$z = \left(\frac{V_0}{\sqrt{1+\varepsilon}} \operatorname{sen}\gamma\right) t$$

$\boxed{H5\ (11\text{-}12\text{-}97)}$



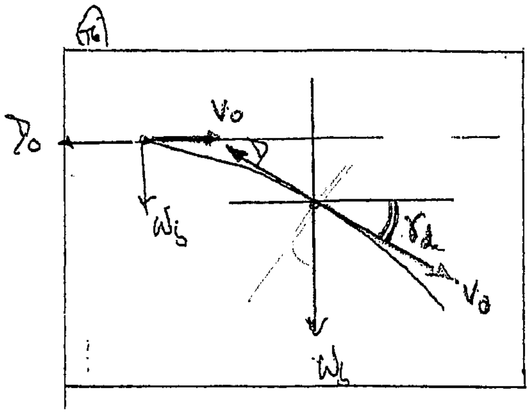


$\vec{V}_S = \vec{V} + \vec{V}_W$

$\Rightarrow$ ejes inerciales

$\boxed{1}$ Sistema de referencia que se mueve con $V_W = cte \Rightarrow$ en el instante de soltar el cuerpo, el peso y la resistencia de éste están contenidos en un plano que es donde estudiamos el movimiento y que también contiene siempre a V_0. Así no planteamos las ecs del movto absoluto.

cuerpo fuselado no tiene sustentación ($L \ll D$; hipótesis avanzado)



$$\begin{cases} W_b \cancel{\sin\gamma_d} - D = \dfrac{W_b}{g}\dot{V} \\ \cancel{W_b\cos\gamma_d = +\dfrac{W_b}{g}V\dot{\gamma}_d} \end{cases} \Rightarrow$$

no son ejes ligados al suelo

aceleración?

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{g}{W_b}\left(\cancel{W_b \sin\gamma_d} - \dfrac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0b}\right) \\ \dfrac{d\gamma_d}{dt} = \dfrac{g}{V}\cos\gamma_d \end{cases}$$

$\vec{v} =$

$\Rightarrow$

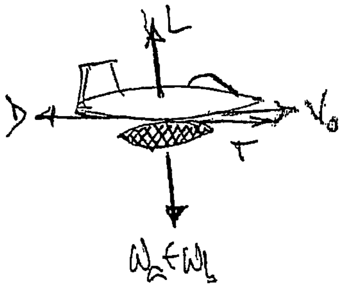
$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^t dt = \int_{V_0}^{V} \frac{W_b}{g} \frac{dV}{-\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0b}} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{\frac{1}{V_0} - \frac{1}{2}\frac{g}{W_b}\rho S C_{D0b}\, t} \\ \displaystyle\int^t g\,dt = \int^{\gamma_d} \frac{d\gamma_d}{\ldots} \Rightarrow \gamma_d = \gamma_d(t) \end{cases}$$

dt

$\Leftarrow$ ¡Leer bien el enunciado!

$\boxed{2}$ Mismo $\alpha \Rightarrow$ mismo C_L ; y mismo empuje

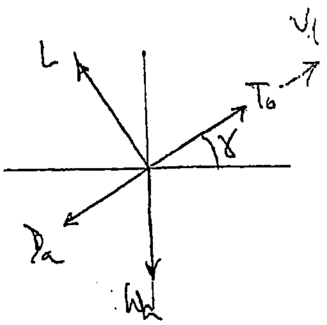
Antes



$$\begin{cases} -L+(W_a+W_b)=0 \Rightarrow C_{L_0}=\dfrac{2(W_a+W_b)}{\rho V_0^2 S} \\ T-D=0 \Rightarrow T_0=\frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left[\left(C_{D_{0a}}+kC_L^2\right)+C_{D_{0b}}\right]= \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left[C_{D_{0a}}+C_{D_{0b}}+k_a\left(\frac{2(W_a+W_b)}{\rho V_0^2 S}\right)^2\right]$$

Después



$$\begin{cases} T_0-D_a-W\sin\gamma=0 \overset{\gamma\ll 1}{\Rightarrow} T_0=D_a+W\gamma \Rightarrow \gamma=\dfrac{T_0-D_a}{W_a} \Rightarrow \\ -L_a+W\underbrace{\cos\gamma}_{\simeq 1}=0 \Rightarrow W_a=\frac{1}{2}\rho V_1^2 S C_{L_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma=\dfrac{T_0-\frac{1}{2}\rho V_1^2 S\left(C_{D_{0a}}+k_a C_L^2\right)}{W_a} \\ V_1=\sqrt{\dfrac{2W_a}{\rho S C_{L_0}}}=\dfrac{V_0}{\sqrt{1+\varepsilon}} \qquad V_0=\sqrt{\dfrac{2(W_a+W_b)}{\rho S C_{L_0}}} \end{cases}$$

$V_1 \neq V_0$ xq tiene mismo empuje y C_L, como pesa menos sustenta más.

$$\Rightarrow \gamma=\frac{1}{W_a}\left[\frac{1}{2}\rho\left(V_0^2-V_1^2\right)S C_{D_0}+\frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_{D_{0b}}+\frac{2k W_a^2}{\rho V_0^2 S}\left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{V_0^2}-\frac{1}{V_1^2}\right)\right]$$

$$\gamma \simeq \frac{1}{2}\frac{\rho V_0^2 S}{W_a}\left(\varepsilon C_{D_{0a}}+C_{D_{0b}}\right)+\frac{2k W_a\,\varepsilon}{\rho V_0^2 S}$$

$\boxed{3}$ γ=cte
V_1=cte

$* \; C_L = cte \longrightarrow \hat{V} = cte = \sqrt[4]{3}$ —— $\boxed{\dfrac{d\hat{x}}{d\hat{\omega}} = -\dfrac{3^{3/4}}{2\sqrt{\hat{\omega}}}}$

$$C_L = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho S[\hat{V}\cdot V_B]^2} = \frac{W}{W\sqrt{\frac{k}{C_{D0}}}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}}$$

2

$$\begin{cases} W_i = W_i \\ W_f = W_i - W_F \end{cases} \; ; \; \xi = \frac{W_F}{W_i} \; ; \; \int \frac{d\hat{x}}{d\hat{w}} = \int -\frac{3^{3/4}}{2\sqrt{\hat{w}}}\, d\hat{w}$$

- $$\hat{x} = \int_1^{1-\xi} -\frac{3^{3/4}}{2\sqrt{\hat{\omega}}}\, d\hat{\omega} = 3^{3/4}\left(1-\sqrt{1-\xi}\right) \Rightarrow x = \hat{x}\cdot x^* = 3^{3/4}\frac{V_{B_i}\cdot E_m}{c}\left(1-\sqrt{1-\xi}\right) = d$$

- $$W_i = W_2 + W_F$$

$$\xi = \frac{W_F}{W_i} = \frac{W_F}{W_2 + W_F}$$

$$\longrightarrow 3^{3/4}\overbrace{\sqrt{\frac{2(W_2+W_F)}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{C_{D0}}{k}}}^{V_{B_i}}\cdot\frac{E_m}{c}\left(1-\sqrt{1-\frac{W_F}{W_2+W_F}}\right) = d \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{W_F = \left(\frac{2dc}{3^{3/4}}\sqrt{\frac{\rho S}{2}}\sqrt[4]{k C_{D0}^3} + \sqrt{W_2}\right)^2 - W_2}$$

3

- $$\boxed{C_{L_{BR}} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{3k}} = \sqrt{\frac{\pi\cdot A\cdot e\; C_{D0}}{3}}} \quad (1)$$

del apartado 1 $\rightarrow$ $\boxed{k = \frac{1}{\pi A e}}$ (cte. Polar)

$\longrightarrow \boxed{C_{D0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{C_{L_{BR}}}{E_m}}$

- $$E_m = \frac{1}{2\sqrt{\cdots}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi A e}{\cdots}} \quad (2)$$

$A = 2\sqrt{3}\ \cdots$

De puta memoria:

$$\boxed{\begin{aligned} &K = \frac{1}{\pi A e} \\ &E_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2\sqrt{C_{Do}K}} \\ &V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{Do}}} \end{aligned}}$$

$\boxed{H.12 / 09-02-99}$

· Datos : $C_L = cte$ tal que $\frac{dx}{dW}$ es máximo. ← ¡IMPORTANTE!

Maximizamos dicha función y despejamos el C_L correspondiente.

$\boxed{1}$ · VSPH + CE + rectilíneo (crucero) → ecuaciones //2.//

$$\left|\begin{array}{l} \hat{\dot{x}} - \hat{V} = 0 \\ h = cte \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \hat{T} - \hat{D} = 0 \\ h = 1 = V^2 \frac{C_L}{C_{Lopt}} \end{array}\right. \longrightarrow \hat{D} = \frac{D E_m}{W} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)$$

$$\frac{dW}{dt} + cT = 0 \Leftrightarrow \dot{m} + \varphi = 0$$

$$\frac{T}{T_{11}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^x \quad ; \quad \frac{c}{c_{11}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}}\right)^y$$

$$\frac{dx}{dt} = V = \frac{dx}{dW}\cdot\frac{dW}{dt} = \frac{dx}{dW}(-cT) \longrightarrow \frac{dx}{dW} = -\frac{V}{cT} = -\frac{V_B \hat{V}}{c T_B \underbrace{\hat{T}}_{=\hat{D}}} = -\frac{V_B \hat{V}}{c T_B}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2}\right)}$$

$$= -\frac{V_B}{c T_B}\cdot\frac{2\hat{V}^3}{\hat{V}^4+1}$$

para adimensionalizar $\left|\begin{array}{l} x^* = \frac{V_{B_i} \cdot E_m}{c} \\ W^* = W_i \end{array}\right.$

$$\Longrightarrow \frac{d\hat{x}}{d\hat{W}} = -\frac{cW_i}{V_{B_i}\cdot E_m}\cdot\frac{V_B}{c\underbrace{T_B}_{=\frac{W}{E_m}}}\cdot\frac{2\hat{V}^3}{\hat{V}^4+1} = -\frac{cW_i}{V_{B_i}\cdot E_m}\cdot\frac{V_B}{c}\cdot\frac{E_m}{W}\cdot\frac{2\hat{V}^3}{\hat{V}^4+1} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}}\cdot\frac{2\hat{V}^3}{\hat{V}^4+1}$$

$\sqrt{\hat{W}}$?? $\hat{W}$

$\hat{V}$ que maximice $\frac{d\hat{x}}{...}$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 27.06.11
E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

Un avión efectúa un vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario con las alas a nivel, y con velocidad aerodinámica V_1 conocida. En cierto instante se procede a lanzar una carga puntual situada en su centro de masas, manteniendo el piloto el empuje y la deflexión del timón de profundidad.

Suponiendo que el avión es dinámicamente estable (es decir, al transcurrir cierto tiempo después del lanzamiento de la carga, se estabiliza en vuelo simétrico rectilíneo estacionario con las alas a nivel) y suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso antes del lanzamiento, W_1, el peso de la carga, W_c, los coeficientes constantes de la polar parabólica, C_{D0}, k, los coeficientes aerodinámicos referidos a unos ejes cuerpo genéricos, $C_{L0}, C_{L\alpha}, C_{L\delta}$, $C_{m0}, C_{m\alpha}, C_{m\delta}$, etc.).
b) El empuje de los motores está dirigido según el eje x_w y pasa por el centro de masas del avión.
c) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.
d) La densidad del aire ρ es una constante conocida.

Se pide:

1º) Para la condición anterior al lanzamiento de la carga, determinar α_1, θ_1, γ_1, δ_{e1}.
2º) Para la condición posterior al lanzamiento de la carga, determinar α_2, θ_2, γ_2, δ_{e2}, V_2.
3º) Determinar el valor de V_1 para que γ_2 sea mínimo, así como el valor correspondiente de $\gamma_{2\,\min}$.
4º) Determinar el valor de V_1 para que θ_2 sea mínimo, así como el valor correspondiente de $\theta_{2\,\min}$.

(12)

1) $T_1 = D_1$

$L_1 = W_1 + W_c$

$$C_L = \frac{2W_1}{\rho S V_1^2} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_1 + C_{L\delta e}\delta e_1 \quad (\mathrm{I})$$

$$D_1 = \frac{1}{2}\rho S V_1^2\left(C_{D0} + \frac{4k\cdot W_1^2}{\rho^2 S^2 V_1^4}\right)$$

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_1 + C_{m\delta e}\delta e_1 = 0 \quad (\mathrm{II})$$

(I), (II)

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} -C_{L0} - \frac{2W_1}{\rho S V_1^2} & C_{L\delta e} \\ -C_{m0} & C_{m\delta e}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{L\alpha} & C_{L\delta e} \\ C_{m\alpha} & C_{m\delta e}\end{vmatrix}}} = \boxed{\frac{-C_{L0}C_{m\delta e} + C_{m0}C_{L\delta e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}} - \frac{C_{m\delta e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}}\cdot\frac{2W_1}{\rho S V_1^2}}$$

$$\boxed{\delta e_1 = \frac{\begin{vmatrix} C_{L\alpha} & -C_{L0} - \frac{2W_1}{\rho S V_1^2} \\ C_{m\alpha} & -C_{m0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{L\alpha} & C_{L\delta e} \\ C_{m\alpha} & C_{m\delta e}\end{vmatrix}}} = \boxed{\frac{C_{L0}C_{m\alpha} - C_{m0}C_{L\alpha}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}}\cdot\frac{2W_1}{\rho S V_1^2}}$$

Vuelo horizontal $\Rightarrow \boxed{\gamma_1 = 0}$

$$\boxed{\theta_1 = \gamma_1 + \alpha_1 = \alpha_1}$$

2) $T_1 - D_2 - W_2 \sin\gamma_2 = 0 \rightarrow T_1 - D_2 - (W_1 - W_c)\gamma_2 = 0 \Rightarrow T_1 = D_2 + (W_1 - W_c)\gamma_2 = D_1 \quad (\mathrm{III})$

$-L + W_1\cos\gamma_2 = 0 \rightarrow L_2 = W_1 - W_c$

$$C_L = \frac{2(W_1 - W_c)}{\rho S V_2^2} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_2 + C_{L\delta e}\delta e_1 \quad (\mathrm{I}) \rightsquigarrow \frac{2(W_1 - W_c)}{\rho S V_2^2} = \frac{2W_1}{\rho S V_1^2}, \quad \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{W_1 - W_c}{W_1}$$

$$D_2 = \frac{1}{2}\rho S V_2^2\left(C_{D0} + \frac{4W_2^2 k}{\rho^2 S^2 V_2^4}\right)$$

$$\boxed{V_2 = V_1\sqrt{1 - \frac{W_c}{W_1}}}$$

3) $$\frac{d\gamma_2}{dV_1} = \frac{W_c}{W_1(W_1-W_c)}\left[\rho S V_1\left(C_{D0} + \frac{4KW_1^2}{\rho^2 S^2 V_1^4}\right) + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\rho S V_1^2}\cdot 2\,\frac{4KW_1^2\cdot(-4)}{\rho^2 S^2 V_1^5}\right] = 0$$

$$\rho S V_1^4 C_{D0} + \frac{4KW_1^2}{\rho S} - \frac{8KW_1^2}{\rho S} = 0 \;;\; \rho S V_1^4 C_{D0} - \frac{4KW_1^2}{\rho S} = 0$$

$$V_1^4 = \frac{4KW_1^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}} \;;\; \boxed{V_1 = \sqrt[4]{\frac{4KW_1^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}$$

$$\gamma_{2MIN} = \frac{W_c}{W_1(W_1-W_c)}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\rho S\sqrt{\frac{4KW_1^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}\left[C_{D0} + \frac{4KW_1^2}{\rho^2 S^2\,\frac{4KW_1^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}\right] = \frac{W_c}{\cancel{W_1}(W_1-W_c)}\,\cancel{W_1}\cdot\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\left(2C_{D0}\right)$$

$$\boxed{\gamma_{2MIN} = \frac{2W_c}{(W_1-W_c)}\sqrt{KC_{D0}}}$$

4) $$\theta_2 = \gamma_2 + \alpha_2$$

$$\frac{d\theta_2}{dV_1} = \frac{W_c}{W_1(W_1-W_c)}\left[\rho S V_1\left(C_{D0} + \frac{4KW_1^2}{\rho^2 S^2 V_1^4}\right) - \frac{8KW_1^2}{\rho S V_1^3}\right] - \frac{C_{m\delta e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}}\cdot\frac{4W_1}{\rho S V_1^3} = 0$$

$$\rho S V_1^4 C_{D0} + \frac{4KW_1^2}{\rho S} - \frac{8KW_1^2}{\rho S} - \frac{4W_1 C_{m\delta e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}}\,\frac{1}{\rho S} = 0$$

$$V_1^4 = \frac{4KW_1^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}} + \frac{4W_1 C_{m\delta e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}}\cdot\frac{1}{\rho^2 S^2 C_{D0}} = \frac{4W_1}{\rho^2 S^2 C_{D0}}\left[KW_1 + \frac{C_{m\delta e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}}\right]$$

$$\boxed{V_1 = \sqrt[4]{\frac{4W_1}{\rho^2 S^2 C_{D0}}\left(KW_1 + \frac{C_{m\delta e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta e} - C_{L\delta e}C_{m\alpha}}\right)}}$$

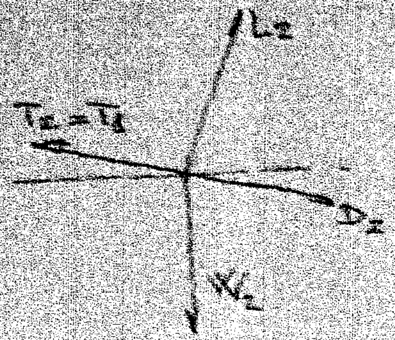
$$\theta_{2MIN} = \frac{W_c}{\dots}\cdot\frac{1}{2}\rho S\sqrt{\frac{4W_1}{\dots}\left(KW_1 + \frac{C_{m\delta e}}{\dots}\right)}\left[C_{D0} \dots \frac{4KW_1^2}{\dots}\right] \dots$$

PROBLEMA Nº 1 (27.06.11)

$$\frac{C_{M\alpha} C_{M\delta} - C_{M\alpha} C_{M\delta}}{} - \frac{C_{M\alpha}}{C_{M\alpha} C_{M\delta} - C_{M\alpha} C_{L\delta}} \cdot C_{L\delta}$$

$$\boxed{\gamma_1 = 0} \qquad \boxed{\theta_1 = \alpha_0}$$

2º



$$L_2 = W_2$$

$$T_1 = D_2 + W_2 \cdot \gamma_2$$

$$C_{M0} + C_{M\alpha} \cdot \alpha_2 + C_{M\delta} \cdot \delta_{e1} = 0$$

$$\rightarrow C_{L2} = C_{L1} \quad ; \quad C_{D2} =$$

$$C_L = \frac{2W_1}{\rho V_1^2 S} = \frac{2W_2}{\rho V_2^2 S} \rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{W_2}{W_1}} = \sqrt{1 - \frac{W_c}{W_1}}}$$

$$W_2 \cdot \gamma_2 = T_1 - D_2 = T_1 - \frac{1}{2}\rho V_2^2 S C_{D1} = \underbrace{T_1 - \frac{1}{2}\rho V_1^2 S C_{D1}}_{T_1} \cdot \underbrace{\frac{V_2^2}{V_1^2}}_{\frac{W_2}{W_1}} \quad ; \quad \gamma_2 =$$

$$\boxed{\theta_2 = \gamma_2 + \alpha_2 = \frac{T_1}{W_1} \cdot \frac{W_c}{W_1 - W_c} + \alpha}$$

3º $\frac{\partial \gamma_2}{\partial V_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial V_1} = 0 \rightarrow \boxed{(V_1)_{\gamma_{2max}} = \sqrt{\frac{2W_1}{\rho S}} \sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}}$

$$\gamma_2 = \frac{D_1}{L_1} \cdot \frac{W_c}{W_2} = \frac{1}{E_1} \frac{W_c}{W_2} \qquad \gamma_{2min} \rightarrow E_{1max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0} \cdot K}}$$

$$\boxed{\gamma_{2min} = 2\sqrt{C_{D0} \cdot K} \frac{W_c}{W_1}}$$

4º $\frac{\partial \theta_2}{\partial V_b} = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta_2}{\partial C_{L1}} = 0 \qquad \theta_2 = \frac{C_{D0} \frac{W_c}{W_2} + \left(K \frac{W_c}{W_2} + B\right) C_{L1}^2}{C_{L1}} + \ldots$

$$\sqrt{2W_1} \quad K_A$$

D-211

PROBLEMA 3

Se considera un avión de masa m_a y centro de gravedad en O en una condición inicial de vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo y uniforme.

En el interior del avión se encuentra una masa puntual m_m que, en la situación inicial considerada se encuentra en el punto O. La masa m total del sistema es, por lo tanto, $m = m_a + m_m$.

Para $t \geq t_0$ la masa se desplaza a lo largo del eje x_{b0}, perteneciente al sistema F_{b_0} con origen en O, en su posición $x_m(t)$ se supone conocida en función del tiempo (ver figura).

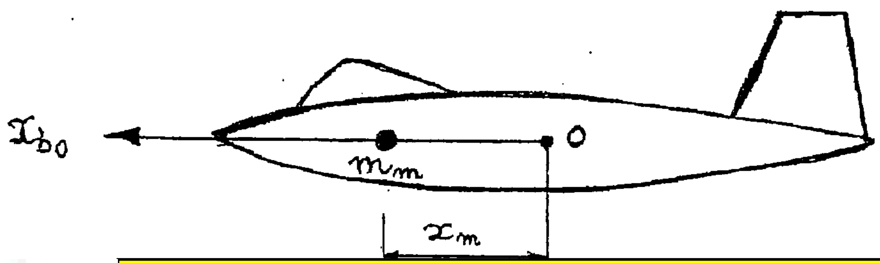
Se supone además que las características geométricas, aerodinámicas y másicas del sistema son conocidas. En particular I_0 (tensor de inercia del sistema en el instante inicial) viene dado por:

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_0} \end{bmatrix}$$

Se pide:

1°)Plantear las ecuaciones generales del movimiento longitudinal del sistema, expresándolas en el sistema de ejes F_b que se obtiene al trasladar el origen de F_{b0} al centro de gravedad del sistema mecánico, expresándolas en función de $F_x, F_z, M, u_{cg}, w_{cg}, q, m, I_{y_t}$ (momento de inercia alrededor del eje y_b) y, eventualmente, de sus derivadas respecto al tiempo.

2°)Suponiendo además que $m_m/m_a = \varepsilon << 1$ y despreciando términos de orden superior al primero, expresar las ecuaciones anteriores en función de $F_x, F_z, M, u, w, q, m, I_{y0}, x_m$, y, eventualmente, de sus derivadas respecto al tiempo, donde u, w representan las componentes de la velocidad del punto O.



Movimiento longitudinal $\rightarrow F_x, F_z, M$

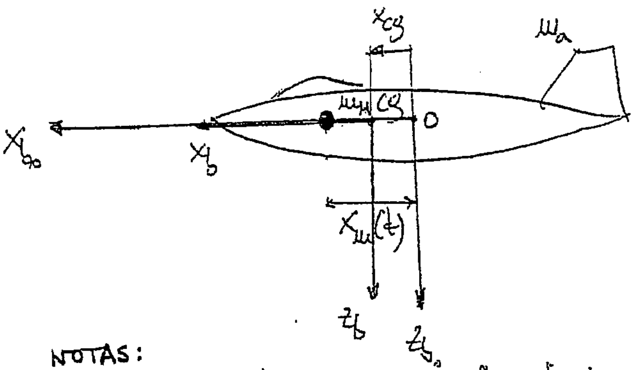
Movimiento lateral-direccional $\rightarrow F_y, L, N$

$$V_{21}^{M} = V_{20}^{M} + \underbrace{\bar{V}_{O_1}^{\,0} + \bar{\omega}_{01} \wedge \overline{OM}}_{\bar{V}_{01}^{M}}$$

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_0 + \bar{\omega}_{01} \wedge \bar{A}$$

$\Rightarrow \beta = \nu = 0$

PROBLEMA 3



* Vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo y uniforme
  ↳ $\gamma = 0$
* $m = m_a + m_M$
* I_0 = tensor inercia del sistema F_{b_0} en t

$$\underline{\underline{I}}_0 = \begin{bmatrix} I_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_0} \end{bmatrix}$$

* Mov. longitudinal: F_x, F_z, M

(Mov. lateral-direccional: F_y, L, N)

NOTAS:

- $p = r = 0$ nulos siempre xq la perturbación de la masa no provoca balance ni guiñada
- $V_{cg} = 0$ xq el mov. masa no altera la c.i. de $y_b = 0$

$$\left\{\begin{array}{ll} F_x = m(\dot{u}_{cg} + q\,w_{cg}) & (1) \\ F_z = m(\dot{w}_{cg} - q\,u_{cg}) & (2) \rightsquigarrow \text{ejes } x_b z_b \\ M = I_{y_t}\dot{q} + \dot{I}_{y_t} q & (3) \end{array}\right.$$

$$I_y = I_{y_a} + I_{y_m} = \left[I_0 + m_a\left(\frac{m_m}{m_a + m_m} x_m\right)^2\right] + m_m\left(\frac{m_a}{m_a + m_m} x_m\right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{y_m} = m_m (x_m - x_{cg})^2 = m_m\left(x_m - x_m \frac{m_m}{m_a + m_m}\right)^2 = m_m x_m^2 \left(1 - \frac{m_m}{m_a + m_m}\right)^2 = m_m x_m^2 \left(\frac{m_a}{m_a +}\right.$$

$$I_{y_a} = I_0 + m_a x_{cg}^2$$

$$I_0 = I_{av} + I_{y_{a}}(0)$$

$$\bar{x}_{cg} = \frac{m_a \cancel{\bar{x}_a} + m_m \bar{x}_m}{m_a + m_m} = \frac{m_m}{m_a + m_m}\bar{x}_m = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\bar{x}_m$$

$$\Rightarrow I_y = I_{y_0} + \frac{m_a m_m^2 + m_m m_a^2}{(m_a + m_m)^2} x_m^2 = I_{y_0} + \frac{m_a\, m_m}{m_m + m_a} x_m^2 = I_{y_0} + \frac{m_m x_m^2}{1 + \varepsilon} \simeq$$

$$\simeq I_{y_0} + \varepsilon\, m_a x_m^2$$

OBSERVACIÓN:

$$V_{2t}^{M} = V_{20}^{M} + \overbrace{\overset{\circ}{V}_{01} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{OM}}^{= V_{01}^{M}} \quad (M \equiv cg)$$

$$\begin{bmatrix} u_{cg} \\ v_{cg} \\ w_{cg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{cg} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} i_b & j_b & k_b \\ \cancel{p} & q & \cancel{r} \\ x_{cg} & 0 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \varepsilon \dot{x}_{u} + u \\ 0 \\ w - q \varepsilon x_{u} \end{bmatrix}$$

TUNEL VOLADO

PROBLEMA 14 (**)

Un avión describe la trayectoria acrobática esquematizada en las figuras adjuntas, que consiste en una hélice sobre un cilindro de eje horizontal y de radio R, con ángulo de paso δ y con velocidad V, siendo R, δ, V constantes conocidas del problema.

Suponiendo que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión (entre ellas: $C_D = C_{D_0} + k C_L^2, C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha$, con $C_{D_0}, k, C_{L_0} C_{L_\alpha}$ constantes conocidas; peso del avión W constante).

b) El empuje del avión está siempre dirigido según el eje x_w y es independiente de la altura y la velocidad.

c) La atmósfera está en calma y sus variaciones de densidad con la altura son despreciables.

d) Los ejes x_H, y_H, z_H representados en las figuras son paralelos a los ejes tierra correspondientes.

e) El vuelo es simétrico.

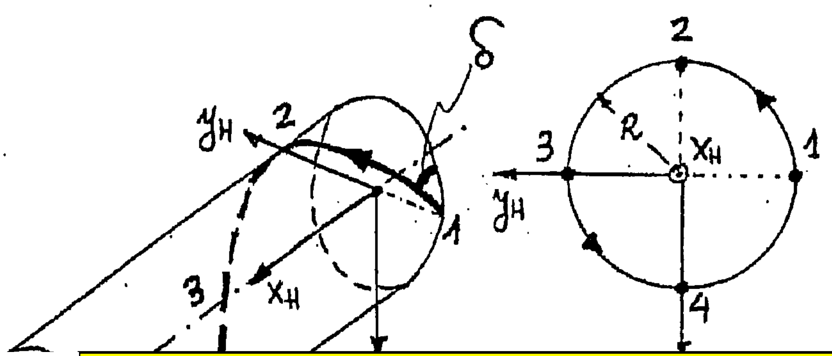
Se pide:

1°) Determinar los ángulos de asiento y guiñada de velocidad en función del tiempo, $\gamma = \gamma(t), \chi = \chi(t)$, y representarlos gráficamente.

2°) Plantear el sistema de ecuaciones cinemáticas y dinámicas del avión.

3°) Determinar el empuje del avión T, el ángulo de balance de velocidad μ y el ángulo de ataque α en función de los grados de libertad matemáticos del problema o, en su caso, del tiempo.

NOTA: La maniobra acrobática descrita es una idelización matemática del denominado **TONEL VOLADO**



C-100 (Rev. 28.10.85) Planeador. Vuelo Sim. Viraje estacionario

PROBLEMA 13

Se considera un planeador cuyas características aerodinámicas, geométricas y másicas se suponen conocidas, realizando un viraje simétrico estacionario.

Suponiendo que:

a) El valor absoluto del ángulo de asiento de velocidad es mucho menor que uno.
b) La atmósfera está en calma.
c) Las variaciones de densidad con la altura son despreciables.
d) La polar es parabólica de coeficientes constantes.

Se pide:

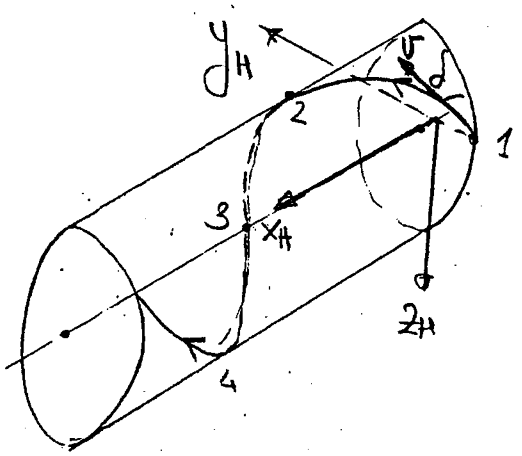
1º) Plantear las ecuaciones del sistema adimensionalizándolas en la forma usual. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

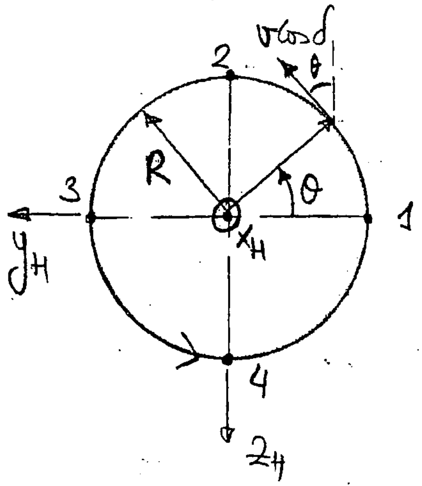
2º) Determinar el número de vueltas máximo que el planeador puede dar en su descenso desde una altura h_1 hasta llegar al suelo, así como la velocidad, el ángulo de balance y el factor de carga para los que se satisface dicha condición. Razonar la influencia de la carga alar y de los parámetros aerodinámicos en el número de vueltas máximo obtenido.

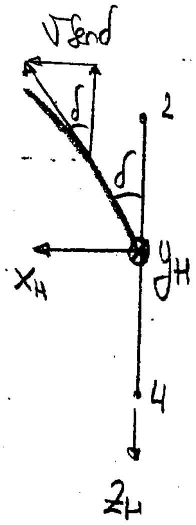
PROBLEMA 13 (27-11-1990) problema 14

- R, δ, v constantes y conocidos.
- $T \parallel X_W$
- ATMÓSFERA EN CALMA: $V_W = 0 \rightarrow \vec{V_g} = \vec{V}$
- VUELO SIMÉTRICO.
- Ejes $X_H, y_H, z_H \parallel$ Ejes tierra.

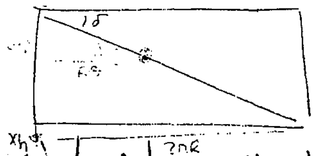
1) El vector de posición del avión sobre la hélice:







$$\left\{\begin{array}{l} \vec{r} = -R\cos\theta\,\vec{j_H} - R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{K_H} + R\theta\,\mathrm{Tg}\,\delta\,\vec{i_H} \\ \vec{v} = \dot{\theta}R(\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j_H} - \cos\theta\,\vec{K_H} + \mathrm{Tg}\,\delta\,\vec{i_H}) \end{array}\right.$$



(Del enunciado sabemos $v = |\vec{v}|$)

- De Teoría sabemos que las componentes de la velocidad en ejes horizonte local son:

los igualamos con las componentes de la velocidad de nuestro problema proyectadas en X_H, y_H, z_H

$\dot{X}_e = V\cos\gamma\cos\chi = V\,\mathrm{sen}\,\delta$

$\dot{y}_e = V\cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\chi = V\cos\delta\,\mathrm{sen}\,\theta \rightarrow$ $\cos\gamma\cos\chi = \mathrm{sen}\,\delta \quad (1)$

$\dot{\theta} = v\cos\delta / R \longrightarrow \boxed{\theta = \frac{v\cos\delta}{R}\cdot t}$ (En $t=0$; $\theta = 0$)

- El ángulo de asiento de velocidad, γ, lo obtenemos de la ecuación (3):

$$\boxed{\gamma = \arcsin(\cos\delta \cos\theta) = \arcsin\left(\cos\delta \cdot \cos\left(\frac{v\cos\delta}{R}t\right)\right)}$$

- El ángulo de guiñada de velocidad, χ, lo obtenemos de:

$$\frac{(2)}{(1)} \rightarrow \operatorname{Tg}\chi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{Tg}\delta} \rightarrow \boxed{\chi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{Tg}\delta} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{v\cos\delta}{R}t\right)\right)}$$

2) De la teoría:

- ECUACIONES CINEMÁTICAS

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} = V\cos\gamma\cos\chi & (A) \\ \dot{y} = V\cos\gamma\operatorname{sen}\chi & (B) \\ \dot{z} = -V\operatorname{sen}\gamma & (C) \end{array}\right\} \rightarrow$$

3 ecuaciones con 3 incógnitas. Obtenemos x, y, z

- ECUACIONES DINÁMICAS

$$\left\{\begin{array}{l} T\cos\epsilon\cos\nu - D - W\operatorname{sen}\gamma - m\dot{V} = 0 \\ T\cos\epsilon\operatorname{sen}\nu - Q + W\operatorname{sen}\mu\cos\gamma - mV(\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu - \dot{\gamma}\operatorname{sen}\mu) = 0 \\ -T\operatorname{sen}\epsilon - L + W\cos\mu\cos\gamma + mV(\dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu) = 0 \end{array}\right.$$

Particularizadas para nuestro problema.

* Vuelo simétrico: $Q = 0$
* $T // X_W$: $\epsilon = \nu = 0$
* V constante : $\dot{V} = 0$

Si al sistema (D) (E) y (F) le añadimos la ecuación:

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2 \quad (\text{Polar parabólica del avión})$$

Tenemos un sistema 4 ecuaciones con 4 incógnitas: T, μ, L, D.

(No hay ningún grado de libertad en el problema). $h, \alpha, \pi, \ldots$

3) T? μ? α?

De (E): $\cancel{W}\,\text{sen}\,\mu \cos\gamma - \frac{\cancel{W}}{g} V (\dot{\chi} \cos\gamma \cos\mu - \dot{\gamma}\,\text{sen}\,\mu) = 0$

$$\text{Tg}\,\mu \cos\gamma - \frac{V}{g}(\dot{\chi}\cos\gamma - \dot{\gamma}\,\text{Tg}\,\mu) = 0$$

$$\text{Tg}\,\mu = \frac{V}{g}\dot{\chi}\cos\gamma \cdot \frac{1}{\left(\cos\gamma + \frac{V}{g}\dot{\gamma}\right)} = \frac{\dot{\chi}}{\left(\frac{g}{V} + \frac{\dot{\gamma}}{\cos\gamma}\right)} \quad (*)$$

- Si derivamos γ y χ respecto del tiempo:

$$\cos\gamma \cdot \dot{\gamma} = \cos\delta\left(-\text{sen}\left(\frac{V\cos\delta}{R}t\right)\right) \cdot \frac{V\cos\delta}{R} = -\frac{V}{R}\cos^2\delta\,\text{sen}\left(\frac{V\cos\delta}{R}t\right)$$

$$\boxed{\dot{\gamma} = -\frac{V}{R}\frac{\cos^2\delta}{\cos\gamma(t)}\,\text{sen}\left(\frac{V\cos\delta}{R}t\right)}$$ (Hay que sustituir en $\gamma(t)$ su valor)

$$\frac{\dot{\chi}}{\cos^2\chi} = \frac{1}{\text{Tg}\,\delta} \cdot \cos\left(\frac{V\cos\delta}{R}t\right) \cdot \frac{V\cos\delta}{R} = \frac{V}{R}\frac{\cos\delta}{\text{Tg}\,\delta}\cos\left(\frac{V\cos\delta}{R}t\right)$$

$$\dot{\chi} = \cos^2\chi(t)\frac{V}{R}\frac{\cos\delta}{\text{Tg}\,\delta}\cos\left(\frac{V\cos\delta}{R}t\right)$$ (Hay que sustituir en $\chi(t)$)

$$\ldots \frac{V}{R}\frac{\ldots}{\cos^2\gamma(t)} \ldots \left(\frac{\ldots}{R}\ldots\right)$$

De (f) : $L = W\cos\mu\cos\gamma + \frac{W}{g} v(\dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu)$ (**)

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha) \rightarrow \alpha = -\frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} - \frac{2L}{\rho V^2 S C_{L_\alpha}}$$

Sustituyendo en α el valor de L de (**)

$$\boxed{\alpha = -\frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} - \frac{2}{\rho V^2 S C_{L_\alpha}}\left(W\cos\mu\cos\gamma + \frac{W}{g} v(\dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu)\right)}$$

(En esta expresión hay que sustituir los valores de $\mu(t)$, $\gamma(t)$, $\dot{\gamma}(t)$ y $\dot{\chi}(t)$). $\longrightarrow$ $\alpha(t)$

De (D) : $T = D + W\,\text{sen}\,\gamma$

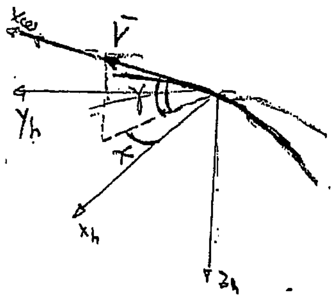
$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2)$$

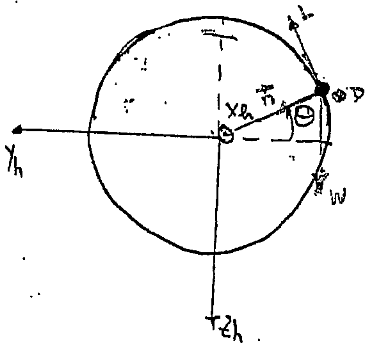
$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2) + W\,\text{sen}\,\gamma}$$

Donde $C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha(t)$

PROBLEMA 14

- hipótesis: • $T \parallel$ eje x_w e independiente de altura y velocidad.
  - Vuelo simétrico: $\beta = 0 \Rightarrow \nu = 0,\ Q = 0$





1 CÁLCULO DE $r(t)$ Y DE $\chi(t)$

θ no es el áng. de asiento del avión, es un áng. cualquiera

- $\bar{x} = R\,tg\,\delta \cdot \theta\,\bar{i}_h - R\cos\theta\,\bar{j}_h - R\,sen\theta\,\bar{k}_h$

- $\bar{V} = \bar{V}_g = \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \dfrac{d\bar{x}}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = R\left(tg\,\delta\,\bar{i}_h + sen\theta\,\bar{j}_h - \cos\theta\,\bar{k}_h\right) \cdot \dot{\theta} \longrightarrow$

$\longrightarrow \vec{t} = \dfrac{\bar{V}}{|\bar{V}|} = \cos\delta\left(tg\,\delta\,\bar{i}_h + sen\theta\,\bar{j}_h - \cos\theta\,\bar{k}_h\right) = \vec{i}_w$

$|\bar{V}| = \dot{\theta} R\sqrt{1 + tg^2\delta} = \dfrac{R}{\cos\delta}\dot{\theta}$

- Comparando con la expresión matricial

- $\dfrac{\cancel{\cos\gamma}\,\text{sen}\,\chi}{\cancel{\cos\gamma}\cos\chi} = \dfrac{\cancel{\cos\delta}\,\text{sen}\,\theta}{\cancel{\cos\delta}\,\text{tg}\,\delta}$ $\Rightarrow \text{tg}\,\chi = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\text{tg}\,\delta} \longrightarrow \chi = \text{arctg}\left(\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\text{tg}\,\delta}\right)$

de la matriz — del vector $\bar{E}$

$-\text{sen}\,\gamma = -\cos\delta\cos\theta \longrightarrow \gamma_{(\theta)} = \text{arcsen}(\cos\delta\cos\theta)$

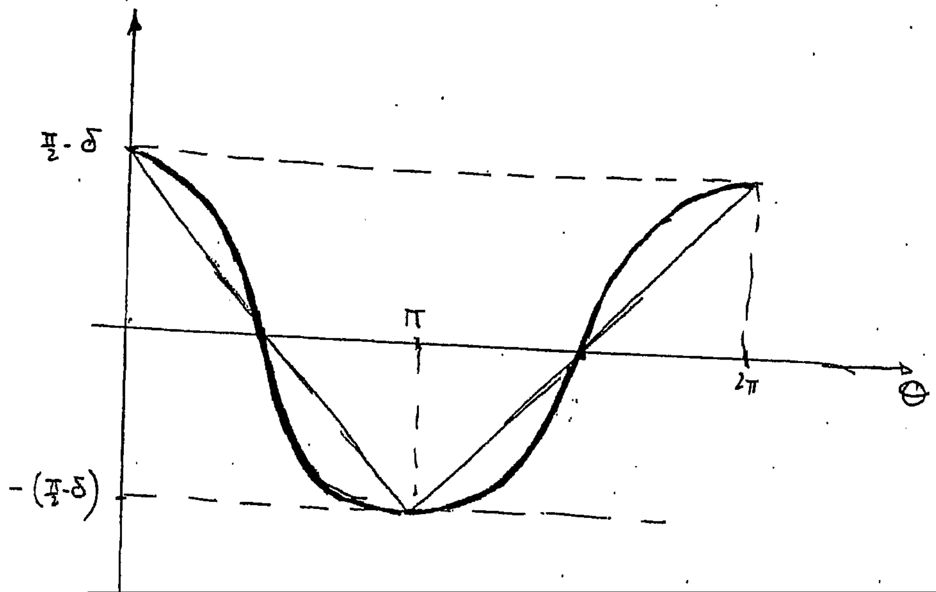
- Por otra parte:

$|\bar{V}| = V = \dfrac{R\dot{\theta}}{\cos\delta} \longrightarrow \dot{\theta} = \dfrac{V\cos\delta}{R} = cte \longrightarrow \theta = \dfrac{V\cos\delta}{R}\,t$

- Por tanto:

$$\boxed{\chi = \chi(t) = \text{arctg}\,\frac{\text{sen}\left(\frac{V\cos\delta}{R}t\right)}{\text{tg}\,\delta}}$$

$$\boxed{\gamma = \gamma(t) = \text{arcsen}\left(\cos\delta\cdot\cos\left(\frac{V\cos\delta}{R}t\right)\right)}$$



2 PLANTEAR SIST. DE EC.^{NES} CINEMÁTICAS Y DINÁMICAS.

· Ver ecs 4.4/3 con $\begin{cases} \varepsilon = \nu = 0 & (\text{ya que } T /\!/ x_w) \\ Q = 0, \beta = 0 & (\text{vuelo simétrico}) \end{cases}$ El empuje se produce en el plano de simetría.

· $T - D - mg\,\text{sen}\,\gamma = 0$ ← $(\dot V = 0)$ [1]

$mg\,\text{sen}\,\mu\cos\gamma - mV(\dot\chi\cos\gamma\cos\mu - \dot\gamma\,\text{sen}\,\mu) = 0$ [2]

$-L + mg\cos\mu\cos\gamma + mV(\dot\gamma\cos\mu + \dot\chi\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu) = 0$ [3]

Ecs. (3,5) p.60 (libro) ecs. generales con $\varepsilon = \nu = \beta = Q = 0$

· $D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$; $C_D = C_{D_0} + k C_L^2$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$; $C_L = C_L(\alpha)$ [4-7]

· $\text{sen}\,\gamma = \cos\delta\cos\theta$ [8]

$\text{tg}\,\chi = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\text{tg}\,\delta}$ [9] → relaciones geométricas ; $\boxed{\theta = \dfrac{V\cos\delta}{R}\,t}$ [10]

· Relaciones cinemáticas

$\dot x = \text{tg}\,\delta \cdot R\dot\theta$ [11]

$\dot y = \text{sen}\,\theta \cdot R\dot\theta$ [12]

$\dot z = -\cos\theta \cdot R\dot\theta$ [13]

Componentes del versor $\vec t$

$\begin{cases} \dot x = V\cos\gamma\cos\chi \\ \dot y = V\cos\gamma\,\text{sen}\,\chi \\ \dot z = -V\,\text{sen}\,\gamma = -\dot h \end{cases}$

· $T, D, \gamma, \mu, \chi, L, x, y, z, \theta, C_D, C_L, \alpha$ — 13 incóg.

nº ecuaciones = 13 → $N = 13 - 13 = 0$

3 CÁLCULO DE $T, \mu, \alpha = f(t)$

· De [2]: $\text{tg}\,\mu$ ...

... $\text{tg}\,\delta$ ... R ... $\dot\chi = \frac{...}{R}\,\frac{...}{\text{tg}\,\delta}\cos\chi\cdot\cos\theta$

· De [3] : $L = W\cos\mu\cos\gamma + \frac{W}{g}V(\dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\mu) = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha) \Rightarrow \boxed{\alpha}$

· De [1] : $T = W\,\mathrm{sen}\,\gamma + D \longrightarrow \boxed{T}$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + k\left(\frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\right)^2\right)$

C-123

PROBLEMA 17 (04.12.90)

La tabla de windsurfing esquematizada en la figura adjunta, navega en un mar en calma en presencia de un viento del norte de módulo V_w constante y conocido.

Se supone además que:

a) La vela de la tabla se comporta exactamente como el ala de un avión de polar parabólica.

b) La resistencia al avance de la tabla en el agua es de la forma:

$$D_a = \frac{1}{2}\rho_a S_a V_a^2 C_{D_a}$$

donde ρ_a es la densidad del agua; S_a una superficie de referencia conocida, V_a la velocidad de la tabla respecto al agua y C_{D_a} el coeficiente de resistencia también conocido.

c) La orza de la tabla equilibra cualquier fuerza normal a ella.

d) Se conocen todos los parámetros geométricos y aerodinámicos del problema.

e) El movimiento es casi estacionario.

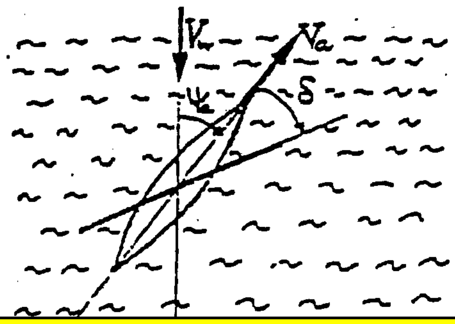
Se pide:

1º) Expresar la velocidad aerodinámica V de la tabla en función de V_a, V_w y ψ_a.

2º) Determinar el ángulo de azimut ψ de la velocidad aerodinámica V de la tabla en función de V_a, V_w y ψ_a.

3º) Plantear una ecuación que permita obtener V_a en función de V_w, ψ_a y δ.

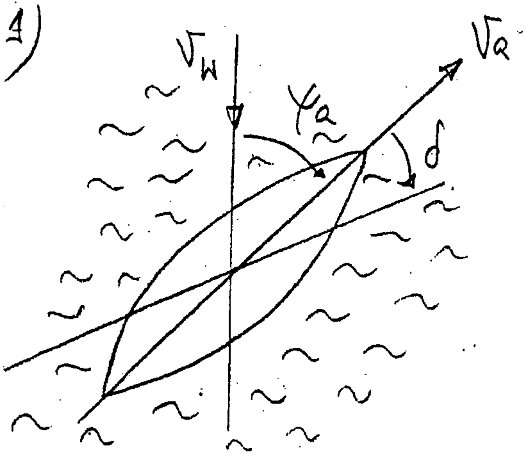
4º) Resolver la ecuación anterior suponiendo que $V_a \gg V_w$ y reteniendo solamente los términos dominantes en el desarrollo.



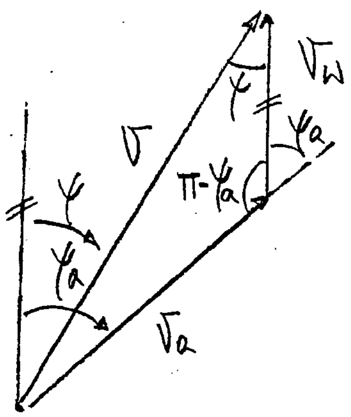
PROBLEMA 17 (04-12-1990)

- V_W constante y conocida. Mar en calma
- Vela de la tabla = Ala de avión con $C_D = C_{D_0} + K C_L^2$
- $D_a = \frac{1}{2} \rho_a S_a V_a^2 C_{D_a}$
- CASO ESTACIONARIO

1)



$$\vec{V_a} = \vec{V} + \vec{V_W} \longrightarrow \vec{V} = \vec{V_a} - \vec{V_W}$$



TEOREMA DEL COSENO:

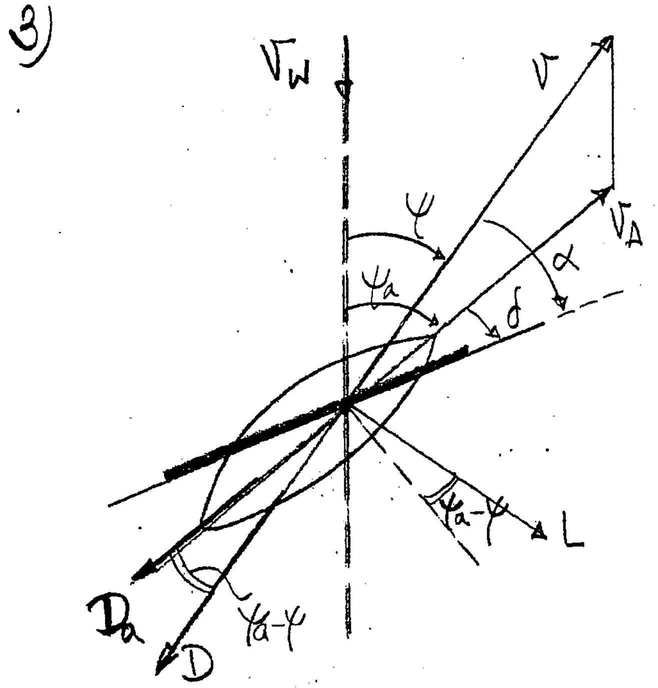
$$V^2 = V_a^2 + V_W^2 - 2 V_a V_W \underbrace{\cos(\pi - \psi_a)}_{\cancel{\cos \pi}^{-1} \cos\psi_a + \cancel{\sin\pi}^{0} \sin\psi_a = -\cos\psi_a} = V_a^2 + V_W^2 + 2 V_a V_W \cos\psi_a$$

Por tanto: $\boxed{V = \sqrt{V_a^2 + V_W^2 + 2 V_a V_W \cos\psi_a}}$

2) Si volvemos a aplicar el TEOREMA DEL COSENO y sustituimos V:

$$\cos\psi = \frac{2V_W^{2}\cdot\left(1+\frac{V_a}{V_W}\cos\psi_a\right)}{V_W^{2}\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_W}\right)^2+2\frac{V_a}{V_W}\cos\psi_a}} \longrightarrow \boxed{\cos\psi = \frac{1+\frac{V_a}{V_W}\cos\psi_a}{\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_W}\right)^2+2\frac{V_a}{V_W}\cos\psi_a}}}$$

3)



$$D_a + D\cos(\psi_a-\psi) - L\,\text{sen}(\psi_a-\psi) = 0$$

Sabemos que:

$$D_a = \frac{1}{2}\rho_a S_a V_a^2 C_{D_a}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D$$

$$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L$$

$$\cos(\psi_a-\psi) = \cos\psi_a\cos\psi + \text{sen}\,\psi_a\,\text{sen}\,\psi$$

$$\text{sen}(\psi_a-\psi) = \text{sen}\,\psi_a\cos\psi - \cos\psi_a\,\text{sen}\,\psi$$

* $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha = C_{L0} + C_{L\alpha}(\psi_a-\psi+\delta)$

$\alpha \equiv$ "Ángulo entre la velocidad aerodinámica y el eje de la vela"

* $C_D = C_{D0} + K C_L^2 = C_{D0} + K\left(C_{L0} + C_{L\alpha}(\psi_a-\psi+\delta)\right)^2$

• Vamos a calcular el valor de sen ψ

$$K\left(\frac{V_a}{V_W}\right)^2 + 2\frac{V_a}{V_W}\cos\psi_a - K - 2\frac{V_a}{V_W}\cos\psi_a - \left(\frac{V_a}{V_W}\right)^2\cos^2\psi_a \;\ldots$$

$$\ldots\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_W}\right)^2+2\frac{V_a}{V_W}\cos\psi_a}\quad\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_W}\right)^2+2\frac{V_a}{V_W}\cos\psi_a}$$

Sustituyendo todo esto en la ecuación dinámica, vamos a tener una ecuación que permite obtener V_a en función de V_w, ψ_a y δ.

$$\frac{1}{2}\rho_a S_a V_a^2 C_{Da} + \frac{1}{2}\rho S\left(V_a^2+V_w^2+2V_aV_w\cos\psi_a\right)\cdot\left[C_{D0}+K\left(C_{L0}+C_{L\alpha}(\psi_a-\psi+\delta)\right)^2\right]\cdot\left[\frac{\cos\psi_a\left(1+\frac{V_a}{V_w}\cos\psi_a\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_w}\right)^2+2\frac{V_a}{V_w}\cos\psi_a}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sen}\psi_a\cdot\frac{V_a}{V_w}\operatorname{sen}\psi_a}{\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_w}\right)^2+2\frac{V_a}{V_w}\cos\psi_a}}\right]-\frac{1}{2}\rho S\left(V_a^2+V_w^2+2V_aV_w\cos\psi_a\right)\left(C_{L0}+C_{L\alpha}(\psi_a-\psi+\delta)\right)\cdot\left[\frac{\operatorname{sen}\psi_a\left(1+\cancel{\frac{V_a}{V_w}\cos\psi_a}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_w}\right)^2+2\frac{V_a}{V_w}\cos\psi_a}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cancel{\cos\psi_a\frac{V_a}{V_w}}\operatorname{sen}\psi_a}{\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_w}\right)^2+2\frac{V_a}{V_w}\cos\psi_a}}\right]=0$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}\rho_a S_a V_a^2 C_{Da}+\frac{1}{2}\rho S\left(V_a^2+V_w^2+2V_aV_w\cos\psi_a\right)\left[C_{D0}+K\left(C_{L0}+C_{L\alpha}(\psi-\psi+\delta)\right)^2\right]\cdot\frac{1+\frac{V_a}{V_w}}{\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_w}\right)^2+2\frac{V_a}{V_w}\cos\psi_a}}=$$

$$=\frac{1}{2}\rho S\left(V_a^2+V_w^2+2V_aV_w\cos\psi_a\right)\left(C_{L0}+C_{L\alpha}(\psi_a-\psi+\delta)\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}\psi_a}{\sqrt{1+\left(\frac{V_a}{V_w}\right)^2+2\frac{V_a}{V_w}\cos\psi_a}}$$

Donde: $\psi=\operatorname{arctg}\left(\ldots\frac{V_a}{\ldots}\operatorname{sen}\psi_a\ldots\right)$

4) Si $V_a \gg V_W$; $\frac{V_a}{V_W} \gg 1 \rightarrow$ $V \sim V_a$; $\cos\psi \sim \cos\psi_a$; $\operatorname{sen}\psi \sim \operatorname{sen}\psi_a$; $\psi \sim \psi_a$

Por tanto:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\rho \cancel{V_a^2} S (C_{L_0} + C_{L\alpha}\delta) \operatorname{sen}\psi_a \cdot \frac{V_W}{V_a} = \cancel{\tfrac{1}{2}}\rho_a S_a \cancel{V_a^2} C_{D_a} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\rho S \cancel{V_a^2} (C_{D_0} + K (C_{L_0} + C_{L\alpha}\delta)^2)$$

$$\boxed{V_a = V_W \frac{\rho S (C_{L_0} + C_{L\alpha}\delta) \operatorname{sen}\psi_a}{\rho_a S_a C_{D_a} + \rho S (C_{D_0} + K (C_{L_0} + C_{L\alpha}\delta)^2)}}$$

Sist. Referencia

AG

C-143

PROBLEMA 1

1°) Determinar la función $\gamma = f(\theta,\phi,\alpha,\beta)$

2°) Determinar la función $\mu = f(\theta,\phi,\alpha,\beta)$

3°) Simplificar los resultados obtenidos en los apartados anteriores para los casos:

a) $\beta=0$

b) $\beta=0$, $\phi=0$

c) Todos los ángulos que intervienen en el problema, excepto ϕ , son pequeños.

PROBLEMA 2

La circunferencia representada en la figura esquematiza la trayectoria descrita por un avión que está efectuando un viraje en un plano horizontal en presencia de un viento uniforme cuyo módulo V_w es constante y conocido, cuya dirección está contenida en el plano horizontal de la trayectoria y cuyo sentido es el indicado en la figura.

El avión efectua el viraje con su eje x_b tangente a la trayectoria y con velocidad respecto a tierra de módulo V_g conocido.

Se pide:

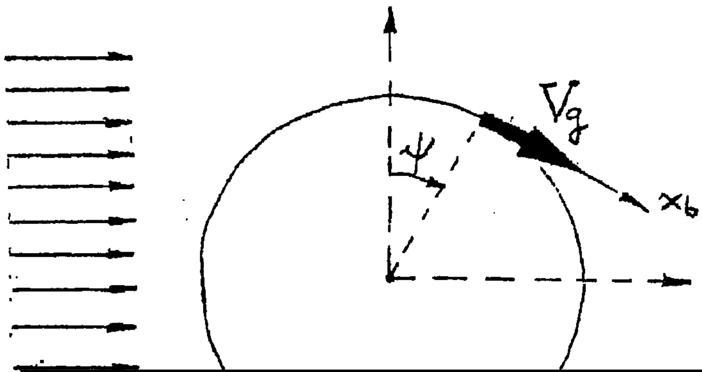
1º) Determinar la función $\frac{V}{V_g}=f\left(\frac{V_w}{V_g},\psi\right)$, donde V representa el módulo de la velocidad aerodinámica del avión y ψ el ángulo azimutal indicado en la figura.

2º) Determinar la función $\beta'=f\left(\frac{V_w}{V_g},\psi\right)$, donde β' representa el ángulo formado por los ejes x_b y x_w.

3º) Determinar la función $\beta=f\left(\frac{V_w}{V_g},\psi,\phi\right)$ donde β representa el ángulo de resbalamiento y ϕ el ángulo de balance del avión.

4º) Determinar las componentes del vector unitario k_w en el sistema de ejes cuerpo, en función de $\frac{V_w}{V_g},\psi$ y ϕ.

5º) Suponiendo $\frac{V_w}{V_g}=\in<<1$, simplificar las expresiones anteriores despreciando t.o.s. a $\in$.



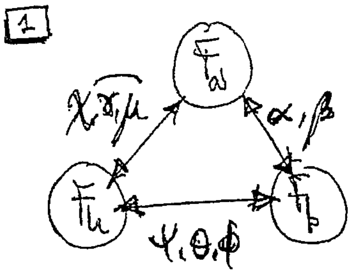
PROBLEMA 1

1) $\gamma = f(\theta, \phi, \alpha, \beta)$

2) $\mu = f(\theta, \phi, \alpha, \beta)$

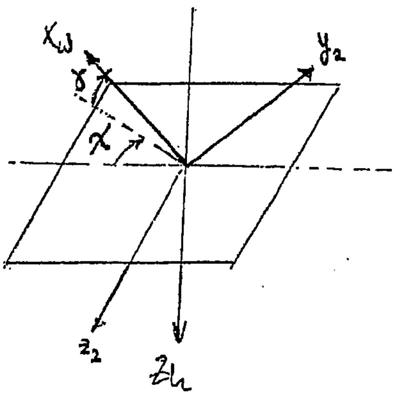
3) Simplificar
- $\beta = 0$
- $\beta = 0 ; \phi = 0$
- $\alpha, \beta, \theta \ll 1$

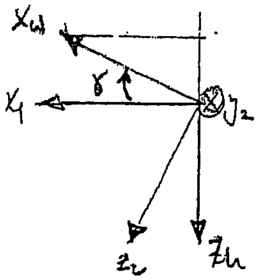
$\boxed{1}$



$[L_{wh}] = [L_{wb}][L_{bh}]$

De teoría conocemos $\rightsquigarrow$ $\boxed{L_{bh}, L_{wh}, L_{bw}}$





1er Método: largo!!

$$\{\vec{i}_w\}_h = \begin{bmatrix} \\ \\ -\operatorname{sen}\gamma \end{bmatrix}_h = [L_{hw}]\{\vec{i}_w\}_w$$

$$\{\vec{i}_w\}_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[L_{hw}] = [L_{wh}]^T = [L_{bh}]^T [L_{wb}]$$

$$= [L_{bh}]^T [L_{bw}]$$

2º Método: $-\operatorname{sen}\gamma = \vec{i}_w \cdot \vec{k}_h$; un producto escalar no depende de la base !! (pero ambos vectores en la misma base)

$$\{\vec{i}_w\}_b = [L_{bw}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \end{bmatrix}_b$$

$$\{\vec{k}_h\}_b = [L_{bh}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}_b$$

$\Rightarrow$ $-\operatorname{sen}\gamma = \{\vec{i}_w\} \cdot \{\vec{k}_h\} = -\operatorname{sen}\theta\cos\beta\cos\alpha + \cos\theta \ldots$

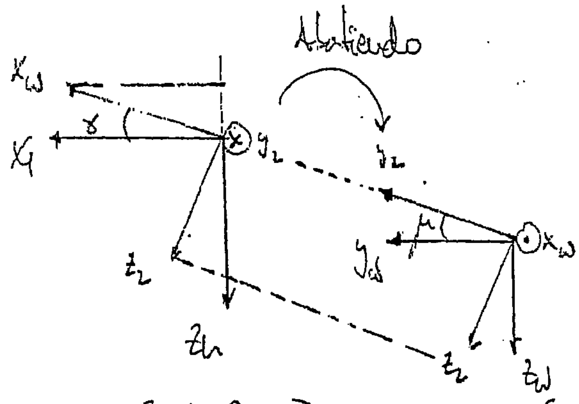
$[+\operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\chi$ $\quad -\operatorname{sen}\mu\cos\chi$ $\quad]$

1er Método:

Multiplicar $[L_{wb}][L_{bh}] = [L_{wh}] = \left[\ \cdots\ \right] \rightarrow \operatorname{tg}\mu$

Identificando en la matriz anterior: $\operatorname{tg}\mu = \cdots = f(\theta, \phi, \alpha, \beta)$

2º Método:



$$\vec{j}_2 = -\frac{\vec{i}_w \wedge \vec{k}_h}{|\vec{i}_w \wedge \vec{k}_h|} = \frac{\vec{k}_h \wedge \vec{i}_w}{\cos\gamma}$$

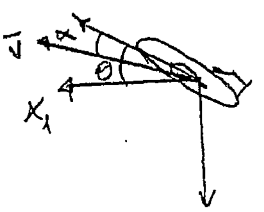
$\vec{j}_2, \vec{j}_w$ unitarios $\Rightarrow \cos\mu = \vec{j}_2 \cdot \vec{j}_w \Big|_b$ y en la misma base

$$\begin{cases} \{\vec{k}_h\}_b = [L_{bh}]\{\vec{k}_h\}_h \rightarrow \begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix} \\ \{\vec{i}_w\}_b = [L_{bw}]\{\vec{i}_w\}_w \rightarrow \begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} \\ \{\vec{j}_w\}_b = [L_{bw}]\{\vec{j}_w\}_w \rightarrow \begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\{\vec{k}_h\}_b = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} ; \quad \{\vec{i}_w\}_b = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \end{bmatrix} ; \quad \{\vec{j}_w\}_b = \begin{bmatrix} -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(-\beta) \\ -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{bmatrix}$$

$$\cos\mu = \{\vec{j}_2\}_b\{\vec{j}_w\}_b = \frac{1}{\cos\gamma}(\vec{k}_h \wedge \vec{i}_w)_b \cdot \{\vec{j}_w\}_b = \frac{1}{\cos\gamma}\begin{vmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \\ \cos\alpha\cos\beta & \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & \cos\beta & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{vmatrix}$$

$\boxed{3}$ * $\beta = \phi = 0 \Rightarrow \gamma = \theta - \alpha$



PROBLEMA 4

Con objeto de estudiar el movimiento de una aeronave suponiendo la tierra esférica y giratoria alrededor de su eje polar, se definen los sistemas de referencia recogidos en la Figura 1.

Son datos del problema:

$R \equiv$ Radio de la Tierra
$\Omega \equiv$ Velocidad angular de la Tierra (constante)
$\tau_e \equiv$ Longitud de O_e.
$\lambda_e \equiv$ Latitud de O_e
$m \equiv$ Masa de la aeronave
$g_0 \equiv$ Constante de la gravedad al nivel del mar

Se pide:

1°)Determinar la matriz de transformación L_{hI} en función del tiempo, t, de la longitud de la aeronave, τ, y de su latitud, λ.

2°)Determinar las tres componentes de la velocidad angular absoluta de la aeronave en ejes cuerpo, p_b, q_b, r_b, en función de $\psi, \theta, \phi, \tau, \lambda, h\left(h=\overline{O_I G}\right)$ y sus derivadas.

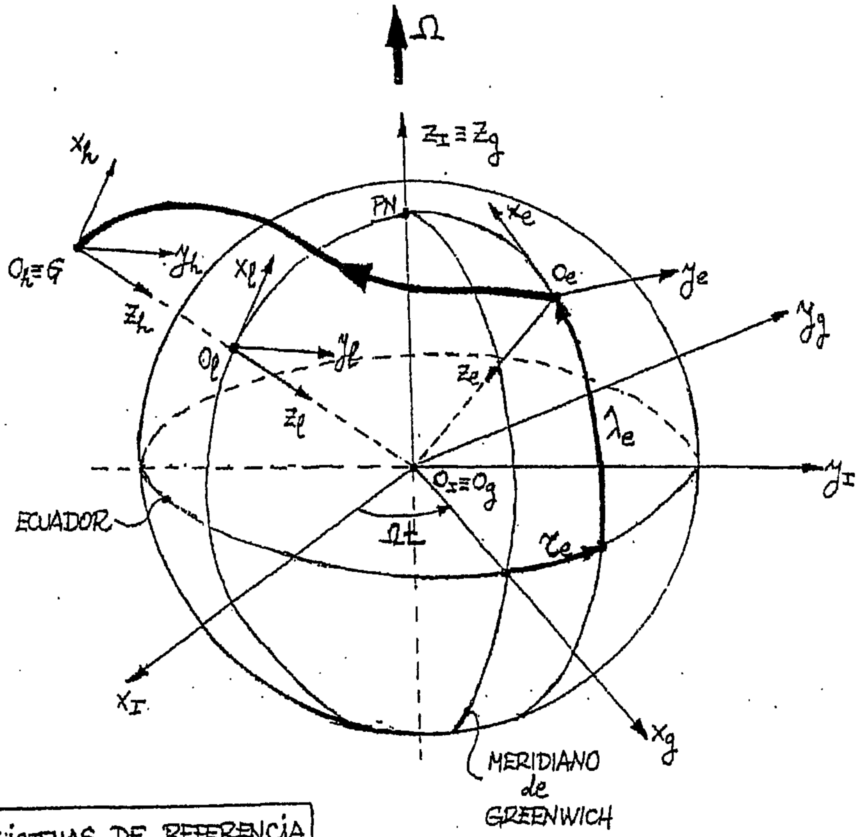
3°)Determinar las tres componentes de la velocidad absoluta de la aeronave en ejes cuerpo, u_b, v_b, w_b en función de $\psi, \theta, \phi, \tau, \lambda, h$ y sus derivadas.

4°)Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas que permiten determinar la movimiento de la aeronave en función de las componentes en ejes cuerpo de las fuerzas y momentos aerodinámicos y propulsivos:

$$F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}, F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz}, L_A, M_A, N_A, L_T, M_T, N_T \ .$$

Comentar el sistema obtenido.

x_e como "girar" alrededor de y_e



SISTEMAS DE REFERENCIA

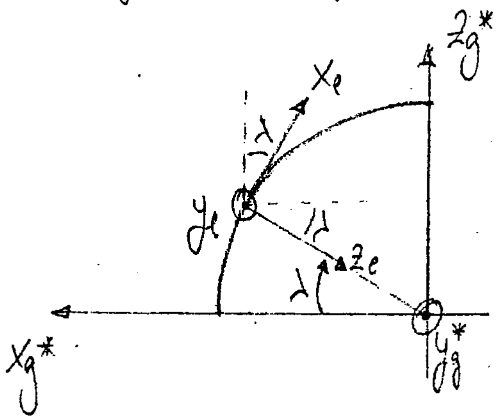
- $O_I x_I y_I z_I \equiv$ Sistema inercial ($z_I \equiv$ Eje de la Tierra; x_I en el Ecuador)
- $O_g x_g y_g z_g \equiv$ Sistema geocéntrico giratorio ($z_g \equiv$ Eje de la Tierra; $x_g \equiv$ Intersección del Ecuador con el Meridiano de Greenwich)
- $O_e x_e y_e z_e \equiv$ Sistema tierra ($O_e \equiv$ Punto inicial de la trayectoria; Sistema topocéntrico giratorio)
- $O_\ell x_\ell y_\ell z_\ell \equiv$ Sistema local ($O_\ell \equiv$ Punto subaeronave; Sistema topocéntrico con sus ejes paralelos a los ejes tierra que existirían en O_ℓ)
- $O_h x_h y_h z_h \equiv$ Sistema horizonte local

PROBLEMA 4

1) ¿l_{hI}? $= f(t, \tau, \lambda)$

$(x_h, y_h, z_h) = (x_e, y_e, z_e)$

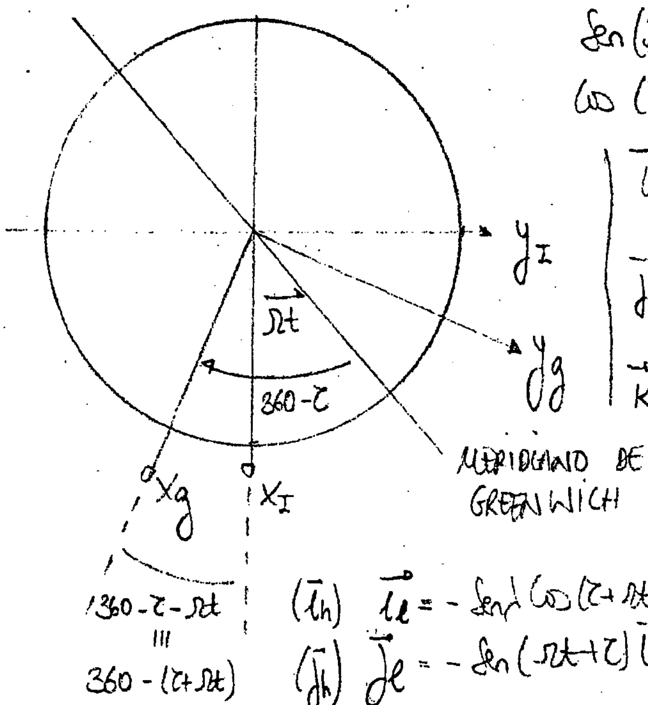
$$\left\{\begin{array}{l} \vec{i}_h = \vec{i}_e \\ \vec{j}_h = \vec{j}_e \\ \vec{k}_h = \vec{k}_e \end{array}\right.$$



$\vec{i}_e = \cos\lambda\, \vec{k}_g^* - \operatorname{sen}\lambda\, \vec{i}_g^*$

$y_e = y_g^*$, $\vec{j}_e = \vec{j}_g^*$

$\vec{k}_e = -\cos\lambda\, \vec{i}_g^* - \operatorname{sen}\lambda\, \vec{k}_g^*$



$\operatorname{sen}(360-(\tau+\Omega t)) = -\operatorname{sen}(\tau+\Omega t)$

$\cos(360-(\tau+\Omega t)) = \cos(\tau+\Omega t)$

$$\left|\begin{array}{l} \vec{i}_g^* = \cos(360-\tau-\Omega t)\,\vec{i}_I - \operatorname{sen}(360-\tau-\Omega t)\,\vec{j}_I = \\ \quad = \cos(\tau+\Omega t)\,\vec{i}_I + \operatorname{sen}(\tau+\Omega t)\,\vec{j}_I \\ \vec{j}_g^* = \operatorname{sen}(360-\tau-\Omega t)\,\vec{i}_I + \cos(360-\tau-\Omega t)\,\vec{j}_I = \\ \quad = -\operatorname{sen}(\tau+\Omega t)\,\vec{i}_I + \cos(\tau+\Omega t)\,\vec{j}_I \\ \vec{k}_g^* = \vec{k}_I \end{array}\right.$$

$(\vec{i}_h)$ $\vec{i}_e = -\operatorname{sen}\lambda\cos(\tau+\Omega t)\,\vec{i}_I - \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}(\tau+\Omega t)\,\vec{j}_I + \cos\lambda\,\vec{k}_I$

$(\vec{j}_h)$ $\vec{j}_e = -\operatorname{sen}(\Omega t+\tau)\,\vec{i}_I + \cos(\tau+\Omega t)\,\vec{j}_I$

$(\vec{k}_h)$ $\vec{k}_e = -\cos\lambda\cos(\tau+\Omega t)\,\vec{i}_I - \cos\lambda\operatorname{sen}(\tau+\Omega t)\,\vec{j}_I - \operatorname{sen}\lambda\,\vec{k}_I$

$$3)\quad \vec{V} = \frac{d(\overline{O_I G})}{dt} = \frac{d(\overline{O_I O_E} + \overline{O_E G})}{dt} = \frac{d[(-R-h)\vec{K_h}]}{dt}$$

$$\vec{K_h} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i_b} + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\vec{j_b} + \cos\phi\cos\theta\,\vec{k_b}$$

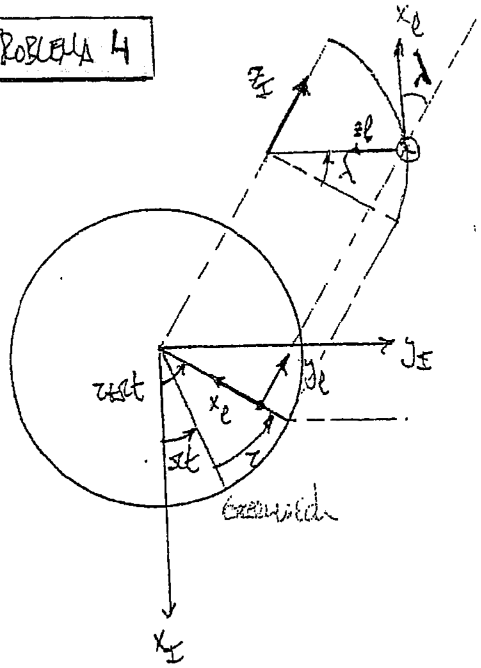
$$\vec{V} = -\Big[\dot{h}\vec{K_h} + (R+h)\Big(-\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{i_b} + (\cos\phi\,\dot{\phi}\cos\theta + \operatorname{sen}\phi(-\operatorname{sen}\theta)\,\dot{\theta})\vec{j_b} +$$
$$+ [-\operatorname{sen}\phi\,\dot{\phi}\cos\theta + \cos\phi(-\operatorname{sen}\theta)\,\dot{\theta}]\,\vec{K_b}\Big)\Big] = (u_b, v_b, w_b)$$

$$u_b = (R+h)\cos\theta\,\dot{\theta} + \dot{h}\operatorname{sen}\theta$$
$$v_b = (R+h)(\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} - \cos\phi\cos\theta\,\dot{\phi}) - \dot{h}\operatorname{sen}\phi\cos\theta$$
$$w_b = (R+h)(\operatorname{sen}\phi\,\dot{\phi}\cos\theta + \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}) - \dot{h}\cos\phi\cos\theta$$

$$4)\quad \begin{cases} -mg\operatorname{sen}\theta + f_{TX} + f_{AX} = m(\dot{u} - rv + qw) \\ mg\operatorname{sen}\phi\cos\theta + f_{TY} + f_{AY} = m(\dot{v} + ru - pw) \\ mg\cos\phi\cos\theta + f_{TZ} + f_{AZ} = m(\dot{w} - qu + pv) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_T + L_A = I_x\dot{p} - J_{xz}\dot{r} + (I_z - I_y)qr - J_{xz}pq \\ M_T + M_A = I_y\dot{q} - (I_z - I_x)pr + J_{xz}(p^2 - r^2) \\ N_T + N_A = I_z\dot{r} - J_{xz}\dot{p} - (I_x - I_y)pq + J_{xz}qr \end{cases}$$

PROBLEMA 4



$\boxed{1}$ $[L_{hI}] = f(t, \tau, \lambda)$; $\begin{Bmatrix} \vec{i}_h \\ \vec{j}_h \\ \vec{k}_h \end{Bmatrix} = [L_{hI}] \begin{Bmatrix} \vec{i}_I \\ \vec{j}_I \\ \vec{k}_I \end{Bmatrix}$

Sea $\tau' = \tau + \Omega t$

$$\begin{cases} \vec{i}_h = \operatorname{sen}\lambda\,(-\cos\tau'\,\vec{i}_I - \operatorname{sen}\tau'\,\vec{j}_I) + \cos\lambda\,\vec{k}_I \\ \vec{j}_h = -\operatorname{sen}\tau'\,\vec{i}_I + \cos\tau'\,\vec{j}_I \\ \vec{k}_h = \cos\lambda\,(-\cos\tau'\,\vec{i}_I - \operatorname{sen}\tau'\,\vec{j}_I) - \operatorname{sen}\lambda\,\vec{k}_I \end{cases}$$

$$[L_{hI}] = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\lambda\cos\tau' & -\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\tau' & \cos\lambda \\ -\operatorname{sen}\tau' & \cos\tau' & 0 \\ -\cos\lambda\cos\tau' & -\cos\lambda\operatorname{sen}\tau' & -\operatorname{sen}\lambda \end{bmatrix}$$

$\{\vec{u}_h\} = [L_{hI}]\{\vec{u}_I\}$

$\boxed{2}$ p_b, q_b, r_b

$\vec{\omega}_{bI} = \vec{\omega}_{bh} + \vec{\omega}_{hI}$

: $\vec{\omega}_{bh} = p\,\vec{i}_b + q\,\vec{j}_b + r\,\vec{k}_b$

: $\vec{\omega}_{hI} = \vec{\omega}_{\ell e} + \vec{\Omega} = (\dot{\tau}\,\vec{k}_I - \dot{\lambda}\,\vec{j}_e) + \Omega\,\vec{k}_I = (\Omega+\dot{\tau})\,\vec{k}_I - \dot{\lambda}\,\vec{j}_\ell = (\Omega+\dot{\tau})(\cos\lambda\,\vec{i}_\ell - \operatorname{sen}\lambda\,\vec{k}_\ell) - \dot{\lambda}\,\vec{j}$

$$\{\vec{\omega}_{hI}\}_b = [L_{bh}]\{\vec{\omega}_{hI}\}_{\underset{h\equiv\ell}{h}} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\Omega+\dot{\tau})\,c\lambda\,c\theta\,c\psi - (\Omega+\dot{\tau})\,s\lambda\,c\theta\,s\psi - \dot{\lambda}\,s\theta \\ (\Omega+\dot{\tau})\,c\lambda\,(s\phi\,s\theta\,c\psi - c\phi\,s\psi) - (\Omega+\dot{\tau})\,s\lambda\,(s\phi\,s\theta\,s\psi + c\phi\,c\psi) - \dot{\lambda}\,s\phi\,c\theta \\ (\Omega+\dot{\tau})\,c\lambda\,(c\phi\,s\theta\,c\psi + s\phi\,s\psi) - (\Omega+\dot{\tau})\,s\lambda\,(c\phi\,s\theta\,s\psi - s\phi\,c\psi) - \dot{\lambda}\,c\phi\,c\theta \end{bmatrix}$$

$$\{\vec{\omega}\} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\dot{\phi} - \dot{\psi}\,s\theta}^{p} + \overbrace{(\Omega+\dot{\tau})(c\lambda\,c\theta\,c\psi - s\lambda\,c\theta\,s\psi) - \dot{\lambda}\,s\theta}^{\{\vec{\omega}_{hI}\}_b\,\vec{i}_b} \\ \dots + (\Omega+\dot{\tau})[c\lambda(s\phi\,s\theta\,c\psi - c\phi\,s\psi) - s\lambda(s\phi\,s\theta\,s\psi + c\phi\,c\psi)] - \dot{\lambda}\,s\phi\,c\theta \\ \dots \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ u_b, v_b, w_b

$$\vec{V}^G_{bI} = \vec{V}^G_{bl} + \underbrace{\vec{V}^{O_l}_{lI} + \vec{\omega}_{lI} \wedge \vec{O_l G}}_{\equiv \vec{V}^G_{lI}}$$

$$\vec{V}^G_{bl} = \vec{V}^G_{bh} + \vec{V}^G_{hl} = u\vec{i}_b + v\vec{j}_b + w\vec{k}_b - \dot{h}\vec{k}_h$$

$$\vec{V}^{O_l}_{lI} = (\Omega + \dot{\tau}) R\cos\lambda \, \vec{j}_h + \dot{\lambda} R \, \vec{i}_h \quad (h \| l)$$

$$\vec{\omega}_{lI} \wedge \vec{O_l G} = \begin{vmatrix} \vec{i}_h & \vec{j}_h & \vec{k}_h \\ (\Omega+\dot{\tau})c\lambda & -\dot{\lambda} & -(\Omega+\dot{\tau})s\lambda \\ 0 & 0 & -h \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\{\vec{V}^G_{bI}\}_h \xrightarrow{[L_{bh}]} \{\vec{V}^G_{bI}\}_b = \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$

$q_b = \dot{\phi} - \dot{\psi} s\theta + (\Omega + \dot{\tau}) O(\lambda) - \dot{\lambda} O(\lambda) \Rightarrow$ ejes pseudoinerciales $(F_I) \Rightarrow$ análogo

a las ecs deducidas en 3.3, donde los ejes pseudoinerciales eran $F_E \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sustituir $\bar{v}, \bar{\omega}$ por $\bar{v}_b, \bar{\omega}_b$.

$$\begin{cases} -mg\,sen\theta + F_{T_X} + F_{A_X} = m\left(\dot{u}_b - r_b v_b + q_b w_b\right) \\ \\ \end{cases}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – 1er E. Parcial – B+CD. 02.12.88

PROBLEMA 2º

Con objeto de evaluar la capacidad de un avión en combate aire-aire se ha desarrollado el denominado "Parámetro de Combate Cercano", B*, definido de la siguiente forma:

$$B^* = (STR)^{1.5} \cdot ITR \cdot SEP(1),$$

en donde para una altitud h y una velocidad V dadas:

$STR = \dot{\chi}_{ESTAC.} \equiv$ Velocidad angular de viraje horizontal estacionario (o sostenido)

$ITR = (\dot{\chi}_{INSTANT.})_{MAX} \equiv$ Velocidad angular máxima de viraje horizontal instantáneo.

$SEP(1) = \left[\frac{(T-D)}{W} V\right]_{n=1} \equiv$ Exceso de potencia específico para $n=1$

Se pide demostrar que para h y V dadas, B* es función de los siguientes parámetros del avión: T/W, W/S, C_{D0}, k, C_{Lmax}.

Discutir como influiría sobre el valor de B* el hecho de que a dicha altitud y velocidad el avión estuviera limitado estructuralmente por un factor de carga n_L.

NOTA: Supóngase polar parabólica de coeficientes constantes $C_D = C_{D0} + kC_L^2$

TIEMPO CONCEDIDO: 1h

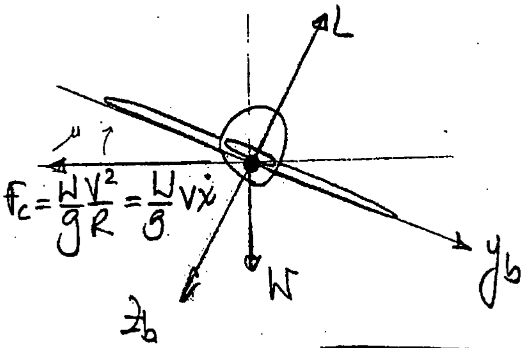
2-DICIEMBRE-1988 (PROBLEMA 2/ 1er Parcial B+CD)

$$B^* = (STR)^{1'5} \cdot ITR \cdot SEP(1)$$

(*) $STR = \dot{X}_{ESTAC}$ = Velocidad angular de viraje horizontal estacionario.

Ecuaciones (para el viraje horizontal)

$$\begin{cases} T - D = 0 & (1) \\ L \operatorname{sen}\mu - \frac{W}{g} V\dot{x} = 0 & (2) \\ L \cos\mu - W = 0 & (3) \end{cases}$$



$$(1)\ T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D0} + K C_L^2) \longrightarrow C_L = \sqrt{\left(\frac{2T}{\rho V^2 S} - C_{D0}\right)\cdot\frac{1}{K}}$$

$$(3)\ L\cos\mu = W \longrightarrow n = \frac{L}{W} = \frac{1}{\cos\mu}\ ;\ n = \frac{L}{W} = \frac{\rho V^2 S\, C_L}{2W}$$

$$\longrightarrow n = \frac{\rho V^2 S}{2W}\sqrt{\left(\frac{2T}{\rho V^2 S} - C_{D0}\right)\frac{1}{K}} = \frac{\rho V^2}{2\left(W/S\right)}\cdot\sqrt{\left[\frac{2}{\rho V^2}\left(\frac{T}{W}\right)\left(\frac{W}{S}\right) - C_{D0}\right]\cdot\frac{1}{K}}$$

Sabemos que $\operatorname{sen}\mu = \sqrt{1-\cos^2\mu} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}$

Sustituyendo en (2):

$$\frac{V\dot{x}}{g} = \underbrace{\left(\frac{L}{W}\right)}_{n}\operatorname{sen}\mu = \cancel{n}\,\frac{1}{\cancel{n}}\sqrt{n^2-1} \longrightarrow \dot{X}_{ESTAC} = STR = \frac{g}{V}\sqrt{\left(\frac{\rho V^2}{2}\right)^2\frac{1}{\left(\frac{W}{S}\right)^2}\left[\frac{2}{\rho V^2}\left(\frac{T}{W}\right)\left(\frac{W}{S}\right) - C_{D0}\right]\frac{1}{K} - 1}$$

⊛ $ITR = (\dot{\chi}_{INST})_{MAX}$ = Velocidad angular máxima de viraje horizontal instantáneo.

Ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ll} L\cos\mu = W & (1) \\ L\,\mathrm{sen}\,\mu = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R} = \frac{W}{g}V\dot{\chi} & (2) \\ T - D = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} & (3) \end{array}\right.$$

Hipótesis: $C_{L_{max}}$

$$T - D = T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D_0} + K C_{L_{max}}^2) = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$$

Para V dado tenemos: $(1) \rightarrow n\cos\mu = 1 \rightarrow n = \frac{1}{\cos\mu}$

$(2) \rightarrow n\,\mathrm{sen}\,\mu = \frac{V\dot{\chi}}{g}$

Como $\mathrm{sen}\,\mu = \sqrt{1-\cos^2\mu} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-1} \rightarrow \frac{V\dot{\chi}}{g} = \sqrt{n^2-1}$

$\dot{\chi}_{max}$ si $n_{max} \rightarrow n_{max} = \frac{L}{W} = \frac{\rho V^2 S\, C_{L_{max}}}{2W} \rightarrow \dot{\chi}_{max} = \frac{g}{V}\sqrt{\left(\frac{\rho V^2 S C_{L_{max}}}{2W}\right)^2 - 1}$

$$\boxed{ITR = \frac{g}{V}\sqrt{\left(\frac{\rho V^2 C_{L_{max}}}{2}\right)^2 \frac{1}{(W/S)^2} - 1}}$$

⊛ $SEP(1) = \left[\frac{(T-D)}{W}V\right]_{n=1}$ = Exceso de potencia específico para $n=1$

$n = 1 \quad L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$

Sustituyendo:

$$\boxed{SEP(1) = \left[\frac{T}{W} - \frac{D}{W}\right]V} = \boxed{\left[\frac{T}{W} - \frac{1}{2}\rho V^2 C_{D0}\frac{1}{(W/S)} - K\left(\frac{W}{S}\right)\frac{2}{\rho V^2}\right]\cdot V}$$

Como $B^* = (STR)^{1'5} \cdot ITR \cdot \underbrace{SEP(1)}_{f\left(\frac{T}{W}, \frac{W}{S}, C_{D0}, K\right)} = f\left(\frac{W}{S}, \frac{T}{W}, C_{D0}, K, q_{max}\right)$ (Para V dado)

$ITR \to f(q_{max}, W/S)$

$STR \to f\left(\frac{T}{W}, \frac{W}{S}, C_{D0}, K\right)$

⊛ Análisis de la influencia de la limitación estructural; n_L.

STR: Si $n_{X_{EST}} = n_{STR} > n_L \longrightarrow STR)_{X_{EST}} > STR_{n=n_L}$ No se puede realizar la maniobra a dicha altura y velocidad debido a que superamos la limitación estructural

ITR: Si $n_{ITR} > n_L \longrightarrow ITR)_{X_{INT})_{MAX}} > ITR)_{n=n_L}$ ocurre lo mismo, no se puede realizar la maniobra.

$SEP)_{n=1}$: Si $n_L < 1$ No se puede realizar la maniobra, lo cual es absurdo puesto que para $n=1$ tenemos un vuelo horizontal

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO - 1er E. Parcial - A+B+CD 23.11.92

PROBLEMA 2º

En las especificaciones de las actuaciones de un determinado avión de combate aparece el siguiente párrafo: "A la altitud h, a velocidad V y con factor de carga n, $SEP(h,V,n) = A$" (*)

Supuniendo además que:

a) La polar de dicho avión es parabólica de coeficientes constantes y conocidos.

b) h, V, n, A $(A>0)$ son datos del problema

c) El peso del avión, W, la densidad atmosférica, ρ, y la constante de la gravedad, g, son constantes y datos del problema.

d) El empuje del turborreactor coincide con la dirección de la velocidad y no depende ni de la velocidad ni de la altura.

e) Toda la maniobra es estacionaria y se efectúa sin resbalamiento y con ángulos de asiento y balance de velocidad no necesariamente pequeños.

Se pide:

1º) Determinar la carga alar, W/S, que hace que en las condiciones descritas el ángulo γ sea máximo.

2º) Determinar la relación empuje/peso, T/W, que tiene que tener dicho avión para realizar la maniobra en las condiciones del apartado anterior, y el valor de γ_{max} correspondiente.

3º) Describir razonadamente la trayectoria que efectúa el avión y obtener el ángulo de balance de velocidad, μ, en ella.

4º) Determinar el número de vueltas, N, que debe efectuar el avión para incrementar su altitud en H metros, a partir de la altitud inicial h, y el tiempo que tarda en hacerlo, en la maniobra descrita en el apartado 3º).

(*) NOTA: En general se define:

$$SEP(h,V,n) = \frac{T(h,V) - D(h,V,n)}{W} V$$

TIEMPO CONCEDIDO: $1^h 15^m$

$\boxed{23-11-1992}$ (PROBLEMA 2/ 1º PARCIAL A+B+CD)

$C_D = C_{D0} + K C_L^2$

MANIOBRA ESTACIONARIA Y SIN RESBALAMIENTO

1) Ecuaciones dinámicas en ejes viento: $(mg = W)$

$$\left.\begin{aligned} &T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\,\text{sen}\,\gamma - m\dot V = 0\\ &T\cos\varepsilon\,\text{sen}\,\nu - Q + mg\,\text{sen}\,\mu\cos\gamma - mV(\dot\chi\cos\gamma\cos\mu - \dot\gamma\,\text{sen}\,\mu) = 0\\ &-T\,\text{sen}\,\varepsilon - L + mg\cos\mu\cos\gamma + mV(\dot\gamma\cos\mu + \dot\chi\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu) = 0\end{aligned}\right\}$$

Como nos dicen que es estacionaria, sin resbalamiento y $T // V$ queda:

$$\left(\begin{aligned} &\dot V = 0\\ &\varepsilon = \nu = 0 \longrightarrow \left|\begin{aligned}&\cos\varepsilon = \cos\nu = 1\\ &\text{sen}\,\varepsilon = \text{sen}\,\nu = 0\end{aligned}\right.\\ &(Q = 0)\end{aligned}\right)$$

$$T - D - W\,\text{sen}\,\gamma = 0 \qquad (1)$$

$$-\cancel{Q} + W\,\text{sen}\,\mu\cos\gamma = +\frac{W}{g}V(\dot\chi\cos\gamma\cos\mu - \dot\gamma\,\text{sen}\,\mu) \qquad (2)$$

$$-L + W\cos\mu\cos\gamma = -\frac{W}{g}V(\dot\gamma\cos\mu + \dot\chi\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu) \qquad (3)$$

De la ecuación (1):

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + K\cdot C_L^2) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\frac{4n^2}{(\rho V^2)^2}\left(\frac{W}{S}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{2Kn^2 W^2}{\rho V^2 S}$$

$$\frac{L}{W} = n = \frac{\rho V^2 C_L S}{2W} \rightarrow C_L = \frac{2n}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right)$$

$$T - D - W\,\text{sen}\,\gamma = T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - \frac{2Kn^2}{\rho V^2}\frac{W^2}{S} - W\,\text{sen}\,\gamma = 0$$

$$\text{sen}\,\gamma = \frac{T}{W} - \frac{1}{2}\frac{\rho V^2 C_{D0}}{(W/S)} - \frac{2Kn^2}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right)$$

γ ... $\text{sen}\,\gamma)$ ... $\frac{d(\text{sen}\,\gamma)}{...} = 0$ ... $\rho V^2 C_{D0}$ ... $2Kn^2$ ... $= 0$

2)

2°) La condición de γ_{max} del apartado anterior se cumple para cualquier $\rho(h)$ v, n que se presenten; en particular

$$SEP(h^*, v^*, n^*) = \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = \left(\frac{T-D}{W}\right) v^* \quad \Rightarrow \quad \text{si } T = \text{constante}$$

$$\frac{T}{W} = \frac{\Delta}{v^*} + \frac{D(h^*, v^*, n^*)}{W}$$

$$\frac{D}{W} = \frac{1}{2}\rho v^2 \left(\frac{S}{W}\right)\left(C_{D_0} - K\left(\frac{2}{\rho v^2}\left(\frac{W}{S}\right)n\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho v^2 \frac{1}{\frac{\rho v^2}{2}\sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}}\left(C_{D_0} - K\left(\frac{2}{\rho v^2}\frac{\rho v^2}{2n}\sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}\, n\right)^2\right) =$$

$$= \frac{2C_{D_0}}{\sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}\,\frac{1}{n}} = 2n\sqrt{C_{D_0}K} = \frac{n}{E_{max}}$$

$$\boxed{\frac{T}{W} = \frac{\Delta}{v^*} + \frac{n^*}{E_{max}}}$$

En general para otras condiciones de vuelo:

$$\sin\gamma_{max} = \frac{T}{W} - \frac{D}{W} = \frac{\Delta}{v^*} + \frac{n^*}{E_{max}} - \frac{n}{E_{max}} \Rightarrow \boxed{\sin\gamma_{max} = \frac{\Delta}{v^*} - \frac{n^*-n^2}{E_{max}}}$$

3°) Dice que el vuelo del problema $\Rightarrow$ $n = n^*$ $\Rightarrow$ $\gamma = \gamma_{max} = \arcsin\frac{\Delta}{v^*}$ y v^* es cte. el ángulo γ es cte $\Rightarrow$ $\dot\gamma = 0$. Por otro lado $\dot\chi = $ cte y $\dot\chi = \frac{v}{R_{giro}}$ $\Rightarrow$ $R_{giro} = \frac{v}{\dot\chi}$ (cte)

El avión describe una trayectoria en un cilindro circular de radio $R = \frac{v}{\dot\chi}$ y con un ángulo de ascenso de velocidad constante $\Rightarrow$ La trayectoria es una hélice.

· De la segunda ecuación dinámica: $\sin\mu \cancel{\cos\gamma} = \frac{v}{g}\dot\chi \cancel{\cos\gamma}\cos\mu$

· De la tercera: $n - \cos\mu\cos\gamma = \frac{v}{g}\dot\chi\cos\gamma\sin\mu$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\mu = \frac{v}{g}\dot\chi \\ \end{cases}$$

PROBLEMA DE EXAMEN 1er PARCIAL A + B + CD 23-11-92

- $SEP(h^{*}, v^{*}, n^{*}) = \Delta$ Valores dependientes y fijos de h, v, y, n que definen SEP.
- $C_D = C_{D0} + KC_L^2$
- W, S, g ctes conocidas
- $\vec{T} = T\,\vec{i}_w$ T cte
- Maniobra estacionaria $\Rightarrow \dot{V} = 0;\ V, \dot{\gamma}, \dot{\chi}$ ctes $\beta = 0$
- γ, μ no pequeños

1º Ec las ecuaciones dinámicas del vuelo en ejes viento.

$\nu = \varepsilon = 0$ $\dot{V} = 0$ $Q = 0$ (No hay encabalgamiento $\Rightarrow$ No hay fuerza lateral)

$$T - D - W\sin\gamma = 0$$

$$W\sin\mu\cos\gamma = -\frac{W}{g}V\left(\dot{\gamma}\sin\mu - \dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu\right)$$

$$L - W\cos\mu\cos\gamma = \frac{W}{g}V\left(\dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\sin\mu\right)$$

- De la primera $\frac{T-D}{W} = \sin\gamma$ $\gamma_{max} \Rightarrow \sin(\gamma_{max})_{max}$

$\Rightarrow \frac{T}{W} - \frac{1}{2W}\rho S V^2 (C_{D0} + KC_L^2) = \sin\gamma \Rightarrow$

$\frac{L}{W} = n \Rightarrow n = \frac{\rho S V^2}{2W} C_L \Rightarrow$

$$\left.\right\} \frac{T}{W} - \frac{\rho V^2 C_{D0}}{2}\frac{1}{(W/S)} - \frac{2Kn^2}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right) = \sin\gamma$$

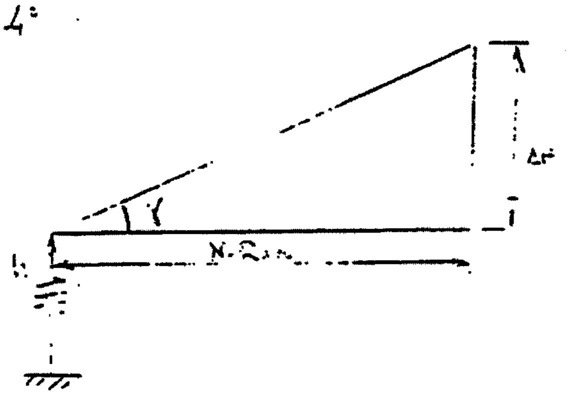
Si todos los términos T, W, ρ, V, C_{D0}, K son constantes y n es una característica del vuelo que conocemos a realizar, no depende de $\frac{W}{S}$ $\Rightarrow$

$$\gamma_{max} \Rightarrow \frac{d\sin\gamma}{d(W/S)} = 0 \Rightarrow \frac{\rho V^2 C_{D0}}{2}\frac{1}{\left(\frac{W}{S}\right)^2} - \frac{2Kn^2}{\rho V^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = \cos\gamma \left(\cos\mu + \frac{\sin^2\mu}{\cos\mu}\right) = \frac{\cos\gamma}{\cos\mu} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\mu = \frac{\cos\gamma_{max}}{n^*} = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{v^{*2}}} \Big/ n^*}$$

4°



$p = cte \Rightarrow \frac{\Delta H}{h} \sim c \rightarrow$ separa cte

$$\Rightarrow \Delta H = N\, 2\pi R \cdot tg\,\gamma_{max}$$

$$R_{giro} = \frac{v^2}{\ddot{x}} = \frac{v^{*2}}{g\, tg\,\mu}$$

$$tg^2\mu = \frac{1}{\cos^2\mu} - 1 = \frac{n^{*2}}{1-\left(\frac{\Delta}{v^*}\right)^2} - 1 = \frac{n^{*2}-1+\left(\frac{\Delta}{v^*}\right)^2}{1-\left(\frac{\Delta}{v^*}\right)^2}$$

$$tg^2\gamma = \frac{(\Delta/v^*)^2}{1-\left(\frac{\Delta}{v^*}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta H = N \cdot \frac{v^{*2}}{g} \sqrt{\frac{\cancel{1-\left(\frac{\Delta}{v^*}\right)^2}}{n^{*2}-1+\left(\frac{\Delta}{v^*}\right)^2}} \; \frac{\Delta/v^*}{\cancel{\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{v^*}\right)^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{g\,\Delta H}{v^{*2}} \sqrt{\frac{(n^{*2}-1)\,v^{*2}}{\Delta^2} - 1}}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = tg\,\mu\, \frac{g}{v^*} \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi N = tg\,\mu\, \frac{g}{v^*} \cdot t$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 2\pi \Delta H \frac{\sigma^{2}}{\Delta^{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\sigma^{2}}\right)^{2}}}$$

PROBLEMA 36 (26.02.91)

Las curvas características de una cierta hélice de paso fijo son de la forma:

$$C_Q = a - bJ^2$$
$$C_T = c - bJ^2$$

donde $a, b, c > 0$; $c < a$.

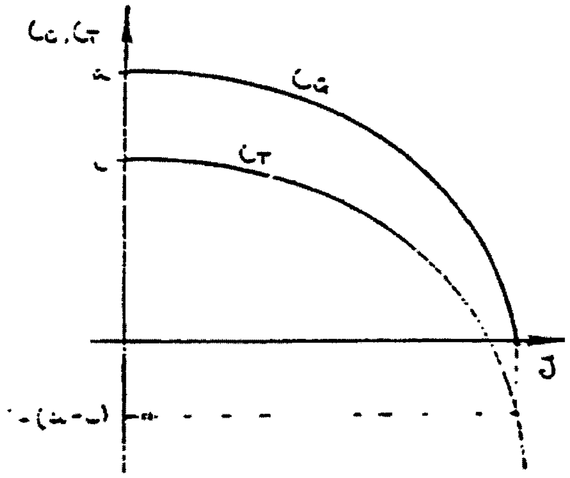
Determinar el coeficiente de resistencia aerodinámico de la hélice en condiciones de par absoluto nulo.

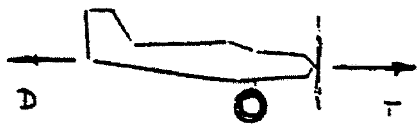
Resuelto en pág anterior

PROBLEMA 36

$C_Q = a - bJ^2$ $\qquad a, b, c > 0 \qquad c < a.$

$C_T = c - bJ^2$





Par motor nulo $\Rightarrow C_Q = 0$

$\Rightarrow C_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a - b J^2$

$J_{C_Q=0} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

En este punto $C_T = c - b J^2_{C_Q=0} = c - a = -(a-c)$ por tanto la hélice es 'freno' de la avioneta. (Ya que la hélice podría ser útil en el aterrizaje, para frenar la carrera en tierra)

Si suponemos que la hélice únicamente $T = D \Rightarrow$

$C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} \qquad D = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_D \qquad \Rightarrow \boxed{\rho n^2 D^4 C_T = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_D}$ *

Si conocemos $J = \frac{U}{nD} \Rightarrow U^2 = J^2_{C_Q=0} \cdot n^2 D^2 = \frac{a}{b} n^2 D^2 \Rightarrow$

y $S = \pi D^2/4$

Sustituyendo en la ecuación * : $-\rho n^2 D^4 (a-c) = \frac{1}{2}\rho \frac{a}{b} n^2 D^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D \Rightarrow$

$$\boxed{C_D = -\frac{8 b (a-c)}{a \pi}}$$

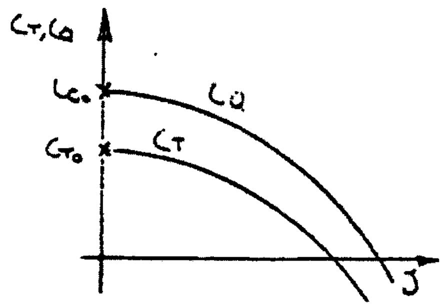
PROBLEMA 37 (26.02.91)

Una hélice de paso fijo y características conocidas está actuada por un motor de gomas (cordón de goma retorcida) que proporciona un par en el árbol proporcional al número de vueltas N de "retorcimiento" que tiene el cordón en cada instante.

Supuesta conocida la constante K del cordón de torsión ($Q_c = kN$) y suponiendo asimismo que la hélice funciona a punto fijo ($V=0$) y que $I_p = 0$, determinar la ley de variación de la tracción con el tiempo.

Problema 37

- Goma proporciona un par $C_c = KN$ K: conocida
- Funcionamiento de la hélice a punto fijo $\Rightarrow V=0 \Rightarrow J=0$
- $I_p = 0$ No influyen en los cálculos la inercia de la hélice.
- Hélice de paso fijo y características conocidas $\Rightarrow C_T = C_T(J)$, $C_Q = C_Q(J)$



Pto de funcionamiento $J=0 \Rightarrow$

$$C_{Q_0} = C_Q(J=0)$$
$$C_{T_0} = C_T(J=0)$$

$$T = \rho n^2 D^4 C_T$$
$$Q = \rho n^2 D^5 C_Q$$

- En el punto de funcionamiento, según la ley de torsión-par $\Rightarrow$

$Q = Q_c \Rightarrow KN = \rho n^2 D^5 \cdot C_{Q_0}$

- Existe una relación entre el número de vueltas y las revoluciones por minuto. El número de vueltas que tiene la goma es el que tenía inicialmente cuando se suelta la hélice y menos el número de vueltas que ha dado $\Rightarrow nt$, pero como n varía con el tiempo $\Rightarrow \int n\,dt \Rightarrow$ $N = N_0 - \int_0^t n\,dt \Rightarrow dN/dt = -n$

- ¡Ojo! el par que proporciona la goma (el motor) se invierte en un par para la propulsión y un par de inercia.

$Q_c = Q + I_p \cdot \ddot{\theta} = Q + I_p \cdot \dot{n}$, y si n no es cte debería aparecer $I_p \cdot \dot{n}$ pero en este caso directamente $I_p = 0$

· Derivando en $Q = Q_c$ ⇒ $K \cdot \frac{dN}{dt} = \rho D_s C_{Q_0} 2 u \, du/dt$ ⇒

⇒ $-K N = \rho_0 D_s C_{Q_0} 2 N \frac{du}{dt}$ ⇒ $\boxed{-A\,dt = dn}$ donde $A = \frac{K}{2\rho D^5 C_{Q_0}}$

⇒ $\boxed{n = n_0 - At}$ n_0 lo calculamos de la condición que se inicialmente: $t = 0$ $n = n_0$ ⇒

$K N_0 = \rho D_s^5 n_0^2 C_{Q_0}$ ⇒ $n_0 = \sqrt{\frac{K N_0}{\rho D^5 C_{Q_0}}}$

Por tanto la ley de variación de la tracción con el tiempo es:

$$\boxed{T = \rho (n_0 - At)^2 D^4 C_{T_0}}$$

· El número de vueltas que está enrollada la goma lo tenemos integrando.

$$N = N_0 - \int_0^t n\,dt = N_0 - \int_0^t (n_0 - At)\,dt \Rightarrow$$

$$N = N_0 + \frac{1}{2A}(n_0 + At)^2 \Big]_0^t = N_0 - n_0 t + \frac{A}{2} t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{N = N_0 - n_0 t + \frac{A}{2} t^2}$$

PROBLEMA 38 (26.02.91)

Adaptar una hélice de velocidad constante de 4 palas, factor de actividad de la pala A.F. = 140, coeficiente de sustentación integrado C_{Li} = 0.500, para un avión que vuela en las siguientes condiciones:

- Velocidad de vuelo: V = 250 KTAS
- Altitud de vuelo: H_p = 0 (nivel del mar)
- Potencia del motor: P_m = 900 H.P.

Se pide determinar:

1) Diámetro, revoluciones de la hélice, rendimiento y ángulo de paso para las condiciones de adaptación. Compruébese que no se alcanza M_{tip} = 0.85 en estas condiciones.
2) Dibujar las curvas de rendimiento y tracción suministrada desde V = 0 hasta V = 380 KTAS, suponiendo que el sistema de control de paso es por control de potencia. ¿A qué velocidad se alcanza M_{tip} = 0.85?

<u>NOTA</u>: Utilizar las figuras 13 y 50 de Hamilton Standard.

PROBLEMA 38

Helice de 4 palas Velocidad constante

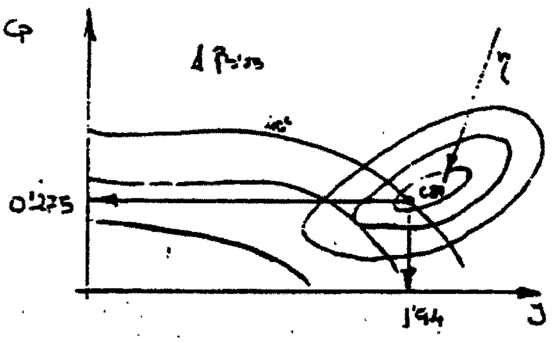
A.F. = 140 C_{Li} = 0'5

Condiciones de vuelo del avión: Velocidad de vuelo $V = 250$ KTAS

Altitud de vuelo $H_p = 0$ (N.M)

Potencia de motor $P_m = 900$ H.P

1.) Utilizando el diagrama $C_p = C_p(J)$ el punto de funcionamiento es el de η_{max}



$\eta_{max} = 0'89$

$J = 1'94$

$C_p = 0'275$

$\beta_{0'75} = 40°$

$$D = \sqrt{\frac{P_m}{\rho C_p}\left(\frac{J}{V}\right)^3}$$

Primero expresamos los datos en el sistema internacional:

$P_m = 900\,HP = 900 \cdot 745'7\,W = 671130\,W$

$\rho\,(NM) = 1'225\ Kg/m^3$

$V = 250$ KTAS $= 250 \cdot 0'514\ \frac{m}{s} = 128'6\ m/s$

$\Rightarrow \boxed{D = 2'61\ m}$

$J = \frac{V}{nD} \Rightarrow n = \frac{V}{JD} = 25'398\ \frac{rad}{s} \rightarrow n = \rightarrow$ Ojo, Preguntar a Antonio

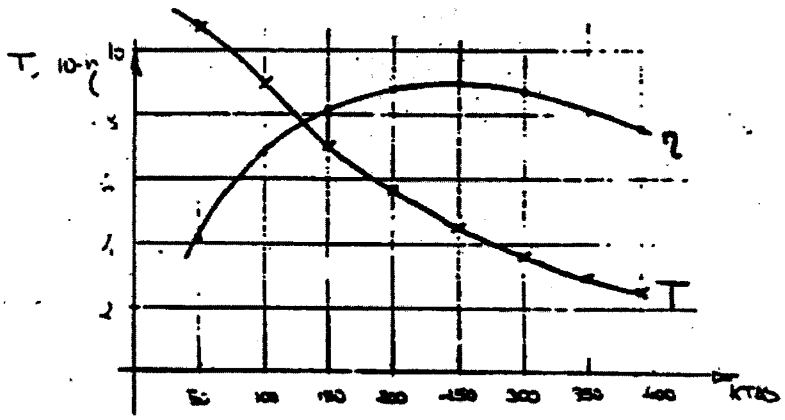
$$M = \frac{v}{c} = 0'378 \Rightarrow D_{lim} = \frac{c}{\pi n}\sqrt{M_t^2 - M^2} = 3'24\,m$$

$D_{lim} > D$.

2.) Hélice de velocidad constante (D no conocido) con control de potencia → D_n = cte ⇒ C_p = cte = 0'275

Se realizamos una tabla con los siguientes valores:

- $J = \frac{v}{nD} = 7'76 \cdot 10^{-3} \cdot v$ (en KTAS)
- Entrando con J en la figura 50 de Hamilton Standard para $C_p = 0'275$ determinamos el valor de η
- En la figura C del Hamilton Standard, para $C_p = 0'275$ y $C_L = 0'5$
  $C_T/C_P = 1'15 \Rightarrow C_T = 0'316$
- $T = \eta P_u / v = 1304'6\,\frac{\eta}{v}$ v (en KTAS) T en KN



v	50	100	150	200	250	300	350	400	340
J	0'388	0'776	1'164	1'552	1'94	2'328	2'716	3'104	2'64
η	0'41	0'69	0'82	0'87	0'89	0'86	0'81	/	0'77
T	10'7	9'0	7'1	5'7	4'6	3'7	3'0	/	2'6