# CONTROL LATERAL-DIRECCIONAL:

* Viraje horizontal estacionario con resbalamiento. Ejes estabilidad → 1
* Viraje horizontal simétrico. → Determinar $p, q, r, s$. Ejes estabilidad → 2
* Resbalamiento horizontal rectilíneo → 3
* Rotura de motor. Vuelo horizontal rectilíneo → 4
* Rotura de motor. Subida rectilínea estacionaria. Las 3 vistas → 5
* Rotura de alerón izquierdo. Vuelo rectilíneo horizontal. Viento horizontal cte. → 6
* Rotura de flap izquierdo. Vuelo rectilíneo horizontal. → 7
* Cargas fuera del plano del ala. Momento cabeceo $C_{mg} \neq 0$. Fa. Fr. Relación mecanismos → 8, 9
* Acróbata en un ala → 10 $\boxed{13.1}$
* Vuelo a cuchillo → 11
* Velocidad mínima de control direccional (VMC) → 12 y 13
* Giro uniforme de guiñada en z. Timón de dirección giro libre alrededor de charnela. Túnel → 14
* Cálculo de coeficientes adimensionales $C_{y_{\delta c}}$, $C_{l_{\delta c}}$, $C_{n_{\delta c}}$ → 15
* Cola en V → 16
* Cambio de ejes (ecuaciones). → 17

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS**

**CÁTEDRA DE MECÁNICA DEL VUELO** 22.09.03

E. Final Septiembre

H43

**PROBLEMA 3º**

Un avión efectúa un viraje horizontal estacionario con las alas a nivel y con ángulo de resbalamiento, $\beta$, conocido.

Suponiendo además que se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas necesarias para la resolución del problema (en particular, las características aerodinámicas se conocen en los ejes estabilidad, siendo $C_{Y0} = C_{l0} = C_{n0} = C_{Y\delta a} = C_{n\delta a} = 0$, los ejes estabilidad no son principales de inercia, etc.), que el empuje de los motores no contribuye a los momentos y está dirigido según el eje $x_s$, que todos los ángulos que intervienen en el problema (incluido el de resbalamiento) son pequeños, y que $\rho$ y $g$ son constantes conocidas, se pide:

1º) Determinar el radio del viraje $R$ en función del ángulo de resbalamiento y de datos del problema.

2º) Determinar las deflexiones de los mandos, $\delta_e$, $\delta_a$, $\delta_r$, en función del ángulo de resbalamiento y de datos del problema.

3º) Particularizar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores para el caso de resbalamiento nulo.

**TIEMPO CONCEDIDO**: $1^h$

①

1) $-W\cancel{\operatorname{sen}\theta} + \cancel{F_{Tx}} + \cancel{F_{Ax}} = \frac{W}{g}(\cancel{-rv+qw}) \rightsquigarrow -W\operatorname{sen}\theta + T + F_{Ax} =$

(0 (horizontal) $T$, $-D$)

$W\cos\theta\,\cancel{\operatorname{sen}\phi} + \cancel{F_{Ty}} + \cancel{F_{Ay}} = \frac{W}{g}(ru - pw) \rightsquigarrow Y = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}$

$W\cos\theta\,\cancel{\cos\phi} + \cancel{F_{Tz}} + F_{Az} = \frac{W}{g}(\cancel{-qu+pv}) \rightsquigarrow W\cancel{\cos\theta} + \cancel{F_{Az}} = 0 \;;\; L = W$

(1 (horizontal) $L$)

$$R = \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{Y_A}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\cancel{C_{y_0}} + C_{y_\beta}\beta + \cancel{C_{y\delta a}\delta a} + C_{y\delta r}\delta r\right] = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R} \quad (\mathrm{I})$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancel{C_{l_0}} + C_{l_\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r\right] = 0 \quad (\mathrm{II})$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancel{C_{n_0}} + C_{n_\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r\right] = 0 \quad (\mathrm{III})$$

$$\delta_a = \frac{\begin{vmatrix} -C_{l_\beta}\beta & C_{l\delta r} \\ -C_{n_\beta}\beta & C_{n\delta r}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{l\delta a} & C_{l\delta r} \\ C_{n\delta a} & C_{n\delta r}\end{vmatrix}} = \frac{-C_{l_\beta}\beta C_{n\delta r} + C_{n_\beta}\beta C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}} \rightsquigarrow \delta_a = \frac{\beta(C_{n_\beta}C_{l\delta r} - C_{l_\beta}C_{n\delta r})}{C_{l\delta a}C_{n\delta r}}$$

$$\delta_r = \frac{\begin{vmatrix} -C_{l_\beta}\beta & C_{l\delta a} \\ -C_{n_\beta}\beta & C_{n\delta a}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{l\delta a} & C_{l\delta r} \\ C_{n\delta a} & C_{n\delta r}\end{vmatrix}} = \frac{C_{l_\beta}\beta C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n_\beta}\beta}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}} \rightsquigarrow \delta_r = \frac{-C_{l\delta a}C_{n_\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r}}\cdot\beta$$

$$\boxed{R = \frac{WV^2}{g}\cdot\frac{2}{\rho V^2 S\left(C_{y_\beta}\beta - C_{y\delta r}\cdot\frac{C_{l\delta a}C_{n_\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r}}\cdot\beta\right)}}$$

2) $C_L = C_{L0} + \cancel{C_{L\alpha}\alpha} + C_{L\delta e}\delta e = \frac{2W}{\rho S V^2} \quad (\mathrm{I})$ (0 (Ejes de estabilidad))

$C_{mA} = C_{m0} + \cancel{C_{m\alpha}\alpha} + C_{m\delta e}\delta e = 0 \quad (\mathrm{II}) \rightsquigarrow$ (0 (Ejes de estabilidad))

$$\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta e}}$$

$$\delta_a = \frac{\beta(C_{n_\beta}C_{l\delta r} - C_{l_\beta}C_{n\delta r})}{\ldots}$$



$\delta_r = 0$

## PROBLEMA | 3º Ex-Sept. 03

Un avión efectúa un viraje horizontal estacionario con las alas a nivel y con ángulo de resbalamiento, $\beta$, conocido.

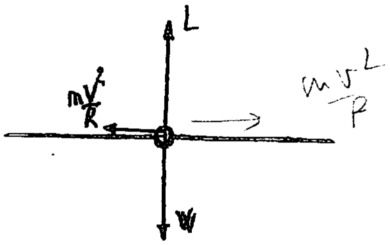
Se pide:

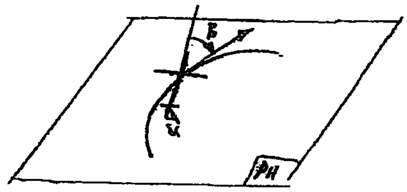
1º) Determinar el radio del viraje R en función del ángulo de resbalamiento y de datos del problema

Alas a nivel → $\phi = 0$ 

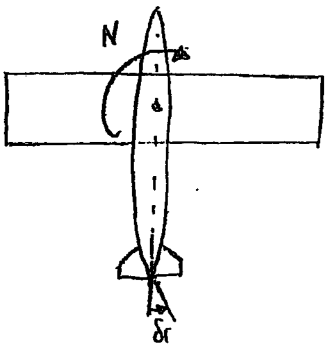
$\beta$ conocido.

Viraje horizontal estacionario




$$\begin{cases} L = W \\ Y = m\dfrac{V^2}{R} \end{cases}$$




- Fuerza lateral $\left(Y = m\frac{V^2}{R}\right)$ (1) $Y = q \cdot S\left(\cancel{C_{Y_0}}^{0} + C_{Y_\beta}\cdot\beta + \cancel{C_{Y_{\delta a}}}^{0}\cdot\delta a + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r\right) = m\dfrac{V^2}{R}$

- Balance $(L = 0)$ (2) $qSb\left(\cancel{C_{l_0}}^{0} + C_{l_\beta}\cdot\beta + C_{l_{\delta a}}\cdot\delta a + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta r\right) = 0$

- Guiñada $(N = 0)$ (3) $qSb\left(\cancel{C_{n_0}}^{0} + C_{n_\beta}\cdot\beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}\cdot\delta a}^{0} + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r\right) = 0$ → $\boxed{\delta_r = \dfrac{-C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}\cdot\beta}$

2º) Determinar las deflexiones de los mandos, $\delta_e, \delta_a, \delta_r$ en función del ángulo de resbalamiento y de datos del problema.

De (3) $\longrightarrow$ $\boxed{\delta_r = \frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta r}} \cdot \beta}$

Entrando con $\delta_r$ en (2): $C_{l\beta} \cdot \beta + C_{l\delta a} \cdot \delta_a + C_{l\delta r} \cdot \frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta r}} \cdot \beta = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\delta_a = \frac{-1}{C_{l\delta a}} \left( C_{l\beta} + \frac{C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}} \cdot C_{n\beta} \right) \cdot \beta}$$

Para calcular $\delta_e$:

$$C_{m_{cg}} = 0 = C_{m_0} + \cancel{C_{m\alpha} \cdot \alpha_{wb}} + C_{m\delta} \cdot \delta_e \longrightarrow \delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta}} \left( C_{m_0} + C_{m\alpha} \alpha_{wb} \right) \Rightarrow \boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta}} \left[ C_{m_0} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}} \cdot \frac{2W}{\rho S V^2} \right]}$$

$$L = W = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad ; \quad C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

en ejes estabilidad no debería $\alpha_{wb} = 0$?

$$C_L = \cancel{C_{L_0}} + C_{L\alpha} \cdot \cancel{\alpha_{wb}} + \cancel{C_{L\delta e}} \cdot \delta_e = \frac{2 \cdot W}{\rho S V^2} \longrightarrow \alpha_{wb} = \frac{2 \cdot W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}}$$

$+\alpha$?

$$\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta e}} = cte.$$

3º) Particularizar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores para el caso de resbalamiento nulo.

$\beta = 0$

$R \longrightarrow \infty$

$\delta_r = 0$

2

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 11.06.07
E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

**PROBLEMA 2º**

Un avión convencional, provisto de un grupo motopropulsor motor alternativo-hélice, está efectuando un viraje horizontal simétrico estacionario con ángulo de balance $\phi$ y velocidad $V$, ambos constantes conocidas. El momento cinético de las partes giratorias del grupo motopropulsor está dirigido según el eje $x_s$ y no es despreciable (la velocidad angular de la hélice y de las partes móviles respecto del avión, $\omega_m$, y el momento de inercia de todas esas partes respecto del eje de giro, $I_m$, son constantes conocidas).

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema. Por ejemplo, el peso del avión es una constante, las características másicas y aerodinámicas están referidas a los ejes estabilidad del viraje (el avión es simétrico másica y aerodinámicamente, los ejes estabilidad no són principales de inercia, etc.); $C_{n_{\delta a}} = 0$; etc.

b) El empuje producido por el grupo motopropulsor está dirigido según el eje $x_s$ y pasa por el centro de masas del avión; el rendimiento propulsivo de la hélice, $\eta_P$, es una constante conocida; y es despreciable el efecto del par motor sobre el equilibrio de momentos del avión.

c) La fuerza aerodinámica lateral es despreciable.

d) Todos los ángulos que intervienen en el problema, excepto $\phi$, son pequeños.

e) $\rho$ y $g$ són constantes conocidas.

Se pide:

1º) Determinar la potencia del motor alternativo, $P_m$, necesaria para este vuelo.

2º) Determinar las tres componentes de la velocidad angular del avión en ejes estabilidad, $p_s$, $q_s$, $r_s$.

3º) Plantear las tres ecuaciones de momentos alrededor del centro de gravedad del avión, en ejes estabilidad.

4º) Determinar las deflexiones de alerones, $\delta_a$, timón de dirección, $\delta_r$, y timón de



TIEMPO CONCEDIDO: 1 15

1)
$$P_m = \frac{P_u}{\eta_p} = \frac{T \cdot V}{\eta_p}$$

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D0} + K C_L^2\right)$$

Ejes estabilidad y viraje $\Rightarrow \alpha_{wb} = 0$

$$\boxed{P_m = \frac{\rho V^3 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right)}{2\,\eta_p}}$$

2)

Viraje horizontal simétrico estacionario:

$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{k}_h$ ; $\dot{\psi} = cte$ , $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$

$$p_s = -\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta$$
$$q_s = \dot{\psi}\cos\theta\,\text{sen}\,\phi$$
$$r_s = \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi$$

$$\left.\begin{aligned} L\,\text{sen}\,\phi &= \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_c} \\ L\cos\phi &= W \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \frac{V^2}{g R_c} \Rightarrow R_c = \frac{V^2}{g \operatorname{tg}\phi}$$

$$\dot{\psi} = \frac{V}{R_c} = \frac{g}{V}\operatorname{tg}\phi$$

$$p_s = -\frac{g}{V}\operatorname{tg}\phi\,\text{sen}\,\theta$$
$$q_s = \frac{g}{V}\operatorname{tg}\phi\cos\theta\,\text{sen}\,\phi$$

$$\delta_a = \frac{2L}{\rho v^2 S b C_{\ell\delta a}} - \frac{C_{\ell o}}{C_{\ell\delta a}} - \frac{C_{\ell\delta r}}{C_{\ell\delta a}}\left[\frac{2N}{\rho v^2 S b C_{n\delta r}} - \frac{C_{no}}{C_{n\delta r}}\right] + \left[\frac{C_{\ell\delta r} C_{np}}{C_{n\delta r}} + C_{\ell p}\right]\frac{p_s}{C_{\ell\delta a}} +$$

$$+ \left[\frac{C_{nr} C_{\ell\delta r}}{C_{n\delta r}} + C_{\ell r}\right]\frac{r_s}{C_{\ell\delta a}}$$

$$C_{meq} = C_{mo} + C_{m\alpha} K_{wb} + C_{m\delta e}\,\delta e + \underline{C_{mq}\, q} = \frac{2M}{\rho v^2 S c}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\delta_e &= \frac{2M}{\rho v^2 S c\, C_{m\delta e}} - \frac{C_{mo}}{C_{m\delta e}} - \frac{C_{mq}}{C_{m\delta e}} q_s \\
\delta_r &= \frac{2N}{\rho v^2 S b\, C_{n\delta r}} - \frac{C_{no}}{C_{n\delta r}} - \frac{C_{np}}{C_{n\delta r}} p_s - \frac{C_{nr}}{C_{n\delta r}} r_s \\
\delta_a &= \frac{2\left(C_{n\delta r} L - C_{\ell\delta r} N\right)}{\rho v^2 S b\, C_{n\delta r} C_{\ell\delta a}} - \frac{C_{\ell o}}{C_{\ell\delta a}} + \frac{C_{\ell\delta r}}{C_{\ell\delta a}}\frac{C_{no}}{C_{n\delta r}} + \left(\frac{C_{\ell\delta r} C_{np}}{C_{\ell\delta a} C_{n\delta r}} + \frac{C_{\ell p}}{C_{\ell\delta a}}\right) p + \left(\frac{C_{\ell\delta r} C_{nr}}{C_{\ell\delta a} C_{n\delta r}} + \frac{C_{\ell r}}{C_{\ell\delta a}}\right) r
\end{aligned}}$$

11-06-07

3) Momento cinético del grupo motopropulsor:

$$\vec{L}_m = I_m \, \omega_m \, \vec{i}_s$$

$$\frac{d\vec{L}_m}{dt} = \vec{\omega}_A \wedge \vec{L}_m = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_s & q_s & r_s \\ I_m \omega_m & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_s I_m \omega_m \\ -q_s I_m \omega_m \end{Bmatrix}$$

$$\vec{G} = \frac{d\vec{L}_{AV}}{dt} + \frac{d\vec{L}_m}{dt}$$

$$L = \cancel{I_x \dot{p}_s} - \cancel{J_{xz} \dot{r}_s} + (I_z - I_y) q_s r_s - J_{xz} p_s q_s$$

$$M = \cancel{I_y \dot{q}_s} - (I_z - I_x) p_s r_s + J_{xz} (p_s^2 - r_s^2) + I_m \omega_m r_s$$

$$N = \cancel{I_z \dot{r}_s} - \cancel{J_{xz} \dot{p}_s} - (I_x - I_y) p_s q_s + J_{xz} q_s r_s + q_s I_m \omega_m$$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= (J_z - J_y) q_s r_s - J_{xz} p_s q_s \\ M &= (I_x - I_z) p_s r_s + J_{xz} (p_s^2 - r_s^2) + I_m \omega_m r_s \\ N &= (I_y - I_x) p_s q_s + J_{xz} q_s r_s + I_m \omega_m q_s \end{aligned}}$$

4)

$$C_\ell = C_{\ell 0} + \cancel{C_{\ell\beta}} \beta + C_{\ell\delta a} \delta_a + C_{\ell\delta r} \delta_r + \underline{C_{\ell p} p} + \underline{C_{\ell r} r} = \frac{2L}{\rho v^2 S b}$$

$$C_N = C_{n0} + \cancel{C_{n\beta}} \beta + \cancel{C_{n\delta a}} \delta_a + C_{n\delta r} \delta_r + \underline{C_{np} p} + \underline{C_{nr} r} = \frac{2N}{\rho v^2 S b}$$



$$- \frac{C_{\ell p}}{} p_s - \frac{C_{\ell r}}{} r_s$$

$C_{\ell\delta a}$ $C_{\ell\delta a}$

②

1) $T - D = 0$ (I)

$W \operatorname{sen}\phi = \frac{W}{g} V \dot{X} \cos\phi$

$-L + W\cos\phi = \frac{-W}{g} V \dot{X} \operatorname{sen}\phi$

$\dot{X} = \frac{V}{R}$

a) $L\cos\phi = W \rightsquigarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2 \cos\phi} = \frac{2Wn}{\rho S V^2} = C_{L0} + C_{L\alpha}\cancel{\alpha}^{0}$

b) $L\operatorname{sen}\phi = \frac{W}{g} \cdot \frac{V^2}{R}$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_{L0}^2)$

$P_m = \frac{TV}{\eta_p} = \frac{\rho V^3 S (C_{D0} + K C_{L0}^2)}{2\eta_p} = \frac{\rho V^3 S \left(C_{D0} + \frac{4KW^2 n^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{2\eta_p}$

$\cos\phi = \frac{1}{n} \rightsquigarrow \operatorname{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi = 1 - \frac{1}{n^2}$

$L^2 \operatorname{sen}^2\phi = \frac{W^2}{g^2} \cdot \frac{V^4}{R^2} \rightsquigarrow n^2 \operatorname{sen}^2\phi = \frac{1}{g^2} \cdot \frac{V^4}{R^2}$ ; $n^2 = 1 + \frac{V^4}{g^2 R^2}$

$$\boxed{P_m = \frac{\rho V^3 S (C_{D0} + K C_{L0}^2)}{2\eta_p} = \frac{\rho V^3 S \left[C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4} \cdot \left(1 + \frac{V^4}{g^2 R^2}\right)\right]}{2\eta_p}}$$

2) $p_S = \cancel{\dot{\phi}}^{0 \text{ (estacionario)}} - \dot{\psi}\, \cancel{\operatorname{sen}\theta}^{0}$

$q_S = \cancel{\dot{\theta}\cos\phi}^{0} + \dot{\psi}\cos\theta \operatorname{sen}\phi$

$r_S = -\underbrace{\dot{\theta}}_{0} \operatorname{sen}\phi + \dot{\psi}\underbrace{\cos\theta}_{1}\cos\phi$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} p_S &= 0 \\ q_S &= \dot{\psi}\operatorname{sen}\phi = \frac{g}{V}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ r_S &= \dot{\psi}\cos\phi = \frac{g}{V}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \end{aligned}}$$

$\gamma = 0$, $\nu = \beta = 0$ → Ejes viento ≡ Ejes estabilidad $\begin{cases} \dot{X} = \dot{\psi} \\ \phi = \mu \end{cases}$ $\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \theta = 0$

3) $L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left[\cancel{C_{l0}}^{0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{0} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r + \cancel{C_{l\hat{p}}\hat{p}}^{0} + C_{l\hat{r}}\hat{r}\right] = (I_z - I_y)\, q_S \cdot r_S$ (1)



$L_T = I_m \cdot W_m\, r_S$ ; $\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \vec{W}_m \wedge \vec{L}_T = \begin{vmatrix} & & \\ p_S & q_S & r_S \\ & & \end{vmatrix} = I_m W_m r_S \vec{j}_S - I_m W_m q_S \vec{k}_S$

4) (3) $\rightsquigarrow$ $$\boxed{\delta_e = \frac{1}{C_{m\delta_e}}\left[-C_{m_0} - C_{m\hat{q}}\cdot\frac{gc}{2V^2}\left(n-\frac{1}{n}\right) - \frac{2J_{xz}r_s^2}{\rho S V^2 c} + \frac{2I_m\omega_m r_s}{\rho S V^2 c}\right]}$$

(2) $\rightsquigarrow$ $$\boxed{\delta_r = \frac{1}{C_{n\delta_r}}\left[-C_{n\hat{r}}\cdot\hat{r} + \frac{2J_{xz}\cdot q_s\cdot r_s}{\rho S V^2 b} + \frac{2I_m\omega_m q_s}{\rho S V^2 b}\right]}$$

(1) $\rightsquigarrow$ $$\boxed{\delta_a = \frac{1}{C_{l\delta_a}}\left[-C_{l\hat{r}}\cdot\hat{r} - C_{l\delta_r}\cdot\delta_r + \frac{2(I_z-I_y)q_s r_s}{\rho S V^2 b}\right]}$$

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – E. Final Febrero – A+B+CD 17.02.93

## PROBLEMA 3º

Un avión como el que se indica en la figura está provisto de un grupo motopropulsor (motor alternativo + hélice) cuyos efectos sobre los momentos alrededor del centro de gravedad del avión completo no son despreciables.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión. En particular: el avión es simétrico másica y geométricamente; $I_m$ es el momento de inercia de las partes móviles del grupo motopropulsor respecto a su eje de giro; los ejes estabilidad son principales de inercia con $I_x \neq I_y \neq I_z$.

b) La línea de acción de la tracción coincide con el eje $x_s$ (por tanto, pasa por el centro de gravedad del avión y está contenida en su plano de simetría).

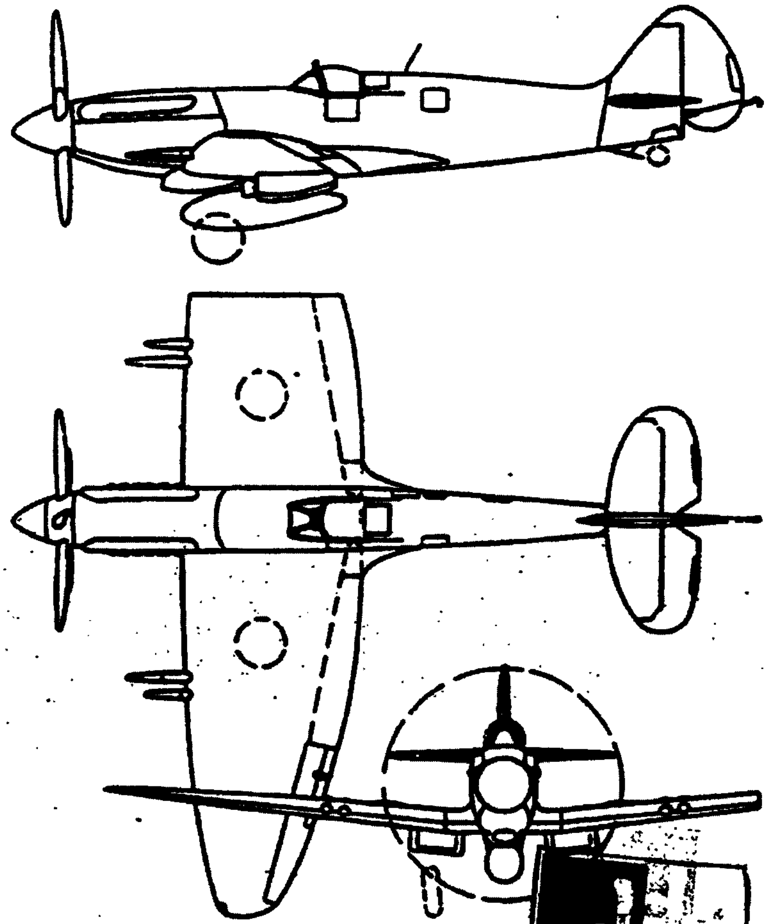
c) El motor alternativo está generando una potencia P, y sus partes móviles y la hélice giran a derechas (vistas por el piloto) con una velocidad angular $\omega$, ambas constantes conocidas.

Se pide:

1º) Determinar las componentes de la velocidad angular del avión en ejes estabilidad, p q r, durante un viraje horizontal simétrico estacionario con ángulo de balance $\phi$, no necesariamente pequeño, y velocidad V, ambos constantes conocidas. Supóngase que en esta maniobra la fuerza lateral Y es despreciable frente al resto de fuerzas que intervienen en el problema.

2º) Plantear las tres ecuaciones de momentos alrededor del centro de gravedad, en ejes estabilidad, para la maniobra descrita en el apartado anterior, incluyendo tanto los efectos giroscópicos como los debidos al par motor.

3º) Determinar, para la maniobra descrita en el apartado 1º), las deflexiones de alerones, $\delta_a$, timón de dirección, $\delta_r$, y timón de profundidad, $\delta_e$.
Discutir la influencia sobre $\delta_a, \delta_r, \delta_e$ de los efectos del grupo motopropulsor, tanto en los virajes a derechas como a izquierdas.



TIEMPO CONCEDIDO: $1^{h}15^{m}$

PROBLEMA DE EXAMEN   FINAL FEBRERO   A+B+CD   17-2-93

PROBLEMA 3º

a) Características geométricas, másicas y aerodinámicas conocidas

- Avión simétrico másica y geométricamente · $C_{Y_0} = C_{l_0} = C_{n_0}$
- $I_m$ · momento de inercia de las partes móviles del grupo motopropulsor respecto de su eje de giro. Lo suponemos paralelo a $x_b \equiv x_s$
- Ejes estabilidad: principales de inercia $I_x \neq I_y = I_z$ $J_{x_i x_j} = 0$

b) Línea de acción de la tracción coincide con $x_s$: No da momentos el empuje

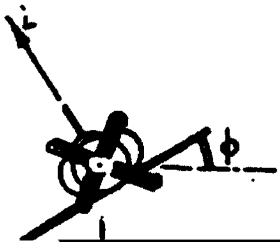
c) Motor de potencia P y velocidad angular $\omega$: Gira a derechas

1º) Vuelo horizontal simétrico estacionario.

Por ser simétrico, el resbalamiento es nulo y el eje $y_s$ es paralelo al $y_w$.

Por ser ejes de estabilidad $x_s$ tiene la dirección de la velocidad en maniobra estacionaria $x_s$ es paralelo a $x_w$.

Los ejes viento y estabilidad coinciden.



0 Alas a nivel

$p_s = \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta$   0 Alas a nivel

$\psi$ horizontal

$q_s = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi$   0 Alas a nivel

$r_s = \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi$

Ecuación de fuerzas:
$$\left.\begin{array}{l} L\cos\phi = W \\ \frac{W}{g}\cdot\dot{x}\,v = L\sin\phi \end{array}\right\} \Rightarrow tg\phi = \frac{\dot{x}\cdot v}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = \dot{\psi} = \frac{g\, tg\phi}{v}} \qquad \phi = cte \Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = 0}$$

Vuelo horizontal $\Rightarrow \gamma = \theta = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\dot{\gamma} = \dot{\theta} = 0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_s = 0 \\ q_s = \frac{g}{v}\, tg\phi \sin\phi \\ r_s = \frac{\dot{\psi}}{v}\cdot \sin\phi \end{array}}$$

2º) De las ecuaciones de Euler, y teniendo en cuenta que $I_{x_i x_j} = 0$ y que $\dot{p}_s = \dot{q}_s = \dot{r}_s = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = (I_z - I_y)\cdot q\cdot r$$
$$M = (I_x - I_z)\, p r$$
$$N = (I_y - I_x)\, p q$$

En la ecuación de L (momento alrededor de $x_s$) tenemos que añadir los términos de inercia debido al grupo motopropulsor $\bar{L}_m = I_m \bar{\omega}_m \wedge \bar{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{(I_m\cdot \bar{\omega}_m \wedge \bar{\omega}) + \left\{\begin{array}{l} \mathcal{L} = (I_z - I_y)\,\frac{g^2}{v^2}\, tg\phi \sin^2\phi \\ M = 0 \\ N = 0 \end{array}\right.}$$

En vez de expresarlo directamente, vamos a hacer el desarrollo

$$\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Es el momento de inercia total del avión; vamos a separarlo en dos partes: El momento de todo el avión sin las partes móviles del motor y el de las partes móviles: $\Rightarrow$ $\bar{\bar{I}} = \bar{\bar{I}}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M$

El momento cinético total será: $\bar{h} = \bar{h}_{SM} + \bar{h}_M = \bar{\bar{I}}_{SM}\,\bar{\omega}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M\,\bar{\omega}_M$

donde $\bar{\omega}_{SM} = (p_s, q_s, r_s)$ y $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{SM} + \bar{\omega}_m = (p_s + \omega_m, q_s, r_s)$

$$\Rightarrow \bar{h} = \bar{\bar{I}}_{SM}\cdot\bar{\omega}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M(\bar{\omega}_{SM} + \bar{\omega}_m) = (\bar{\bar{I}}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M)\,\bar{\omega}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M\cdot\bar{\omega}_m$$

$$\Rightarrow \bar{h} = \bar{\bar{I}}\,\bar{\omega}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M\cdot\bar{\omega}_m$$

Si el motor está bien equilibrado $-$ $\bar{\bar{I}}_M = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_{my} & 0 \\ 0 & 0 & I_{mz} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{I}}_M\cdot\bar{\omega}_m = I_m\,\omega\,\bar{i}_s$$

Finalmente $\dfrac{d\bar{h}}{dt} = \dfrac{d(\bar{\bar{I}}\bar{\omega}_{SM})}{dt} + \dfrac{d(I_m\omega\,\bar{i}_s)}{dt}$

$$\frac{d(\bar{\bar{I}}\bar{\omega}_m)}{dt} = \begin{Bmatrix} (I_z - I_y)\,q_s r_s \\ (I_x - I_z)\,p_s r_s \\ (I_y - I_x)\,q_s r_s \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d(I_m\omega\,\bar{i}_s)}{dt} = \cancel{\frac{\delta(I_m\omega)}{dt}}\,\bar{i}_s + \bar{\omega}_{MS}\wedge\bar{\bar{I}}_m\cdot\bar{\omega}_m = \begin{vmatrix} \bar{i}_s & \bar{j}_s & \bar{k}_s \\ p_s & q_s & r_s \\ I_m\omega & 0 & 0 \end{vmatrix} = I_m\omega(r_s\bar{j}_s - q_s\bar{k}_s)$$

Sustituyendo todos los términos ⟹

$$\boxed{\begin{aligned} L &= (I_z - I_y)\,\frac{g^2}{U^2}\,\mathrm{tg}\,\phi\,\mathrm{sen}^2\phi \\ M &= I_m\,\omega\,\frac{g}{U}\,\mathrm{sen}\,\phi \\ N &= -I_m\,\omega\,\frac{g}{U}\,\mathrm{tg}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\phi \end{aligned}}$$

3º) En las ecuaciones anteriores sustituimos:

$$L = (\cancel{C_{l_0}} + C_{l_\beta}\cdot\cancel{\beta} + C_{l\delta_a}\,\delta_a + C_{l\delta_r}\,\delta_r)\,qSb$$

$$M = (C_{m_0} + C_{m_\alpha}\cdot\alpha + C_{m\delta_e}\,\delta_e)\,q\cdot S\cdot c$$

$$N = (\cancel{C_{n_0}} + C_{n_\beta}\,\cancel{\beta} + C_{n\delta_a}\cdot\delta_a + C_{n\delta_r}\cdot\delta_r)\,qSb$$

Con $L$ y $N$ podemos obtener $\delta_a$ y $\delta_r$

$$C_{l\delta_a}\cdot\delta_a + C_{l\delta_r}\cdot\delta_r = \frac{(I_z - I_y)\,g^2}{qSb\,U^2}\,\mathrm{tg}\,\phi\cdot\mathrm{sen}^2\phi = l$$

$$C_{n\delta_a}\cdot\delta_a + C_{n\delta_r}\cdot\delta_r = -\frac{I_m\,\omega\,g}{qSb\cdot U}\,\mathrm{tg}\,\phi\cdot\mathrm{sen}\,\phi = -n$$

$$\Rightarrow \delta_a = \frac{l\,C_{n\delta_r} + n\,C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}\left(C_{n\delta_r} - C_{n\delta_a}\cdot\frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}}\right)} = \frac{g}{U}\,\mathrm{tg}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\cdot\frac{1}{qSb}\,\frac{\left[(I_z - I_y)\,\frac{g}{U}\,\mathrm{sen}\,\phi\,C_{n\delta_r} + I_m\,\omega\,C_{l\delta_r}\right]}{C_{l\delta_a}\cdot C_{n\delta_r} - C_{n\delta_a}\cdot C_{l\delta_r}}$$

$$\delta_r = -\frac{g}{U}\,\mathrm{tg}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,\frac{1}{qSb}\left[(I_z - I_y)\cdot\frac{g}{U}\,\mathrm{sen}\,\phi\,C_{n\delta_a} + I_m\,\omega\,C_{l\delta_a}\right]\frac{1}{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r} - C_{n\delta_a}C_{l\delta_r}}$$

$\delta_e$ lo obtenemos con la ecuación de momento de cabeceo:

$$\Rightarrow \frac{I_m \omega \cdot \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi}{qSc\, C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha = \delta_e$$

Donde $\alpha$ lo obtenemos de la ecuación de sustentación

$$L \cos\phi = W \Rightarrow L = qSc\, C_L = \frac{W}{\cos\phi} \Rightarrow C_L = \frac{W}{qSc \cos\phi}$$

$$\text{si } C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = + \frac{C_L}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} \Rightarrow \alpha = \frac{W}{qSC_{L\alpha} \cos\phi} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_e = \frac{I_m \omega \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi}{v qSc \cdot C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}} + \frac{C_{m\alpha} C_{L0}}{C_{m\delta_e} \cdot C_{L\alpha}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \cdot \frac{W}{qSC_{L\alpha} \cos\phi}}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{g \cdot \operatorname{tg}\phi \operatorname{sen}\phi}{v\, qSb\,(C_{l\delta_a} \cdot C_{n\delta_r} - C_{l\delta_r} \cdot C_{n\delta_a})} \left[ (I_z - I_y) \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi\, C_{n\delta_r} + I_m \omega\, C_{l\delta_r} \right]}$$

$$\boxed{\delta_r = - \frac{g \operatorname{tg}\phi \operatorname{sen}\phi}{v qSb\,(C_{l\delta_a} C_{n\delta_r} - C_{l\delta_r} C_{n\delta_a})} \left[ (I_z - I_y) \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi\, C_{n\delta_a} + I_m \omega\, C_{l\delta_a} \right]}$$

En un viraje a derechas $\phi > 0 \Rightarrow$ El $\delta_a$ que necesitamos es un valor positivo que multiplica a $[(I_z - I_y) \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi\, C_{n\delta_r} + I_m \omega\, C_{l\delta_r}]$

$I_z > I_y$ (Hay mucha más masa alejada del eje $z_b$ que del $y_b$)

$C_{n\delta_r} > 0$ y $C_{l\delta_r} < 0$ Por tanto $\delta_a = K \cdot [\operatorname{sen}\phi \cdot A - B]$

Sin embargo para $\phi < 0 \Rightarrow \delta_a = + K[- A \operatorname{sen}|\phi| + B]$

Lo mismo ocurre con $\delta_2$ $\quad C_{n\delta_a} < 0 \quad C_{l\delta_a} > 0$

$$\delta_2 = -K\left[-C \operatorname{sen}\phi + D\right]$$

Viraje a derechas $\phi > 0 \Rightarrow |\delta_2| = K\left[D - C \operatorname{sen}|\phi|\right]$

" " izquierdas $\phi < 0 \Rightarrow |\delta_2| = K\left[D + C \operatorname{sen}|\phi|\right]$

Se necesita una deflexión de mando mayor en viraje a izquierdas.
En viraje a derechas ayuda el par de inercia del motor.

2

*Ingenieros Aeronáuticos*
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

**25-06-1997** (problema 3 del 97)

Un avión como el que se indica en la figura adjunta efectúa un resbalamiento horizontal rectilíneo estacionario a velocidad $V$. Los motores proporcionan un empuje de magnitud $T$ en la dirección del eje $x_b$ y que no contribuye a los momentos alrededor del centro de masas.

Este avión presenta un acoplamiento aerodinámico direccional-longitudinal de forma que aparece una contribución adicional al momento de cabeceo de la forma $(\Delta C_m)_\beta = C_{m\beta}\,|\beta|$.

Las características conocidas del avión y los datos del problema son los indicados en la Tabla adjunta, en la que las características aerodinámicas están referidas a los ejes cuerpo de la figura.

Suponiendo que todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños, excepto el ángulo de resbalamiento $\beta$, y que puede aplicarse el modelo lineal para el cálculo de acciones aerodinámicas, se pide:

1. Plantear las ecuaciones dinámicas de fuerzas en ejes viento y determinar los ángulos de ataque $\alpha$ y de resbalamiento $\beta$.
2. Determinar las deflexiones de los mandos $\delta_e$, $\delta_r$ y $\delta_a$ necesarias para efectuar el resbalamiento.
3. Determinar el ángulo de balance $\phi$ y las componentes de las fuerzas aerodinámicas $X$, $Y$, $Z$ en los ejes cuerpo indicados.

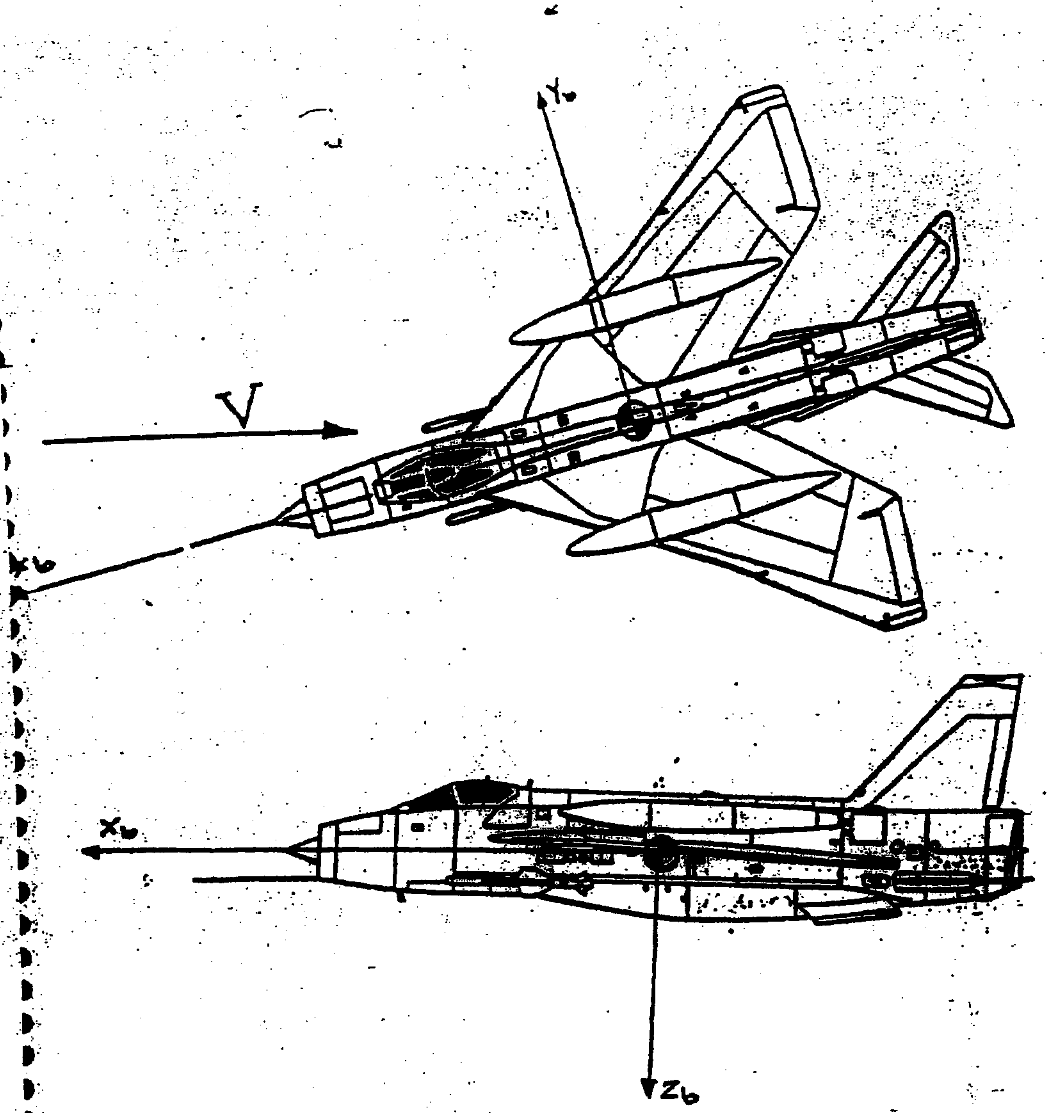
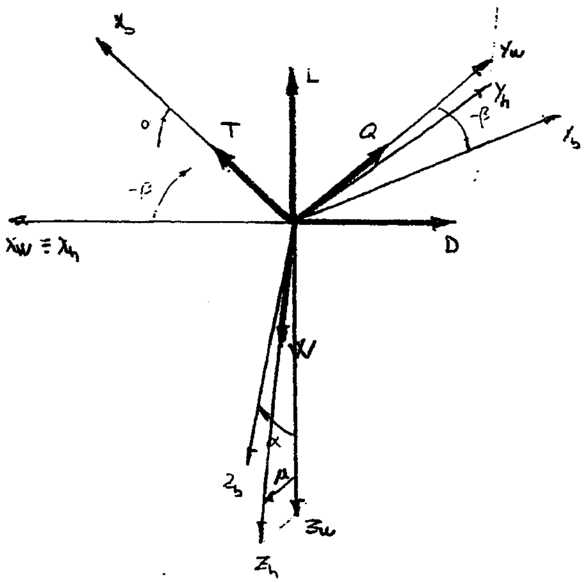



**TABLA DE DATOS**

- $V, T, m, S$
- $\rho, g$
- $C_{D0}, K$
- $C_{L0}, C_{L\alpha}, C_{L\delta_e} = 0$
- $C_{Y\beta}, C_{Y\delta_r}, C_{Y\delta_a} = 0$

1)




EJES VIENTO

$T\cos\alpha\cos\beta - D = 0$ (1)

$-T\cos\alpha\, sen\beta - Q + mg\, sen\mu = 0$ (2)

$-T\, sen\alpha - L + mg\cos\mu = 0$ (3)

$\alpha, \beta, \mu \ll 1$

$D = T\cos\beta$ (1)

$L = mg - T\alpha$ (2)

$\frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_{L\alpha}\, \alpha + T\alpha = mg \Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \dfrac{mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha} + T}}$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D0} + K C_{L\alpha}^2 \alpha^2)}{T}}$$

2)

$C_{mcg} = 0 = C_{m0} + C_{m\alpha}\,\alpha + C_{m\delta}\,\delta_e + C_{m\beta}\,\beta$

$$\boxed{\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha - \frac{C_{m\beta}}{C_{m\delta}}\beta}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} = 0 &= C_{\ell\beta}\,\beta + C_{\ell\delta a}\,\delta_a + C_{\ell\delta r}\cdot\delta_r \\ \mathcal{N} = 0 &= C_{N\beta}\,\beta + C_{N\delta a}\,\delta_a + C_{N\delta r}\,\delta_r \end{aligned}\right\}$$

3)

$$Y = \frac{1}{2}\rho v^2 S' \left( C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\delta r}}\delta_r \right) = \overbrace{\frac{1}{2}\rho v^2 S' \left( C_{Y_\beta} + C_{Y_{\delta r}} \frac{C_{N\beta}C_{\ell\delta a} - C_{N\delta a}C_{\ell\beta}}{C_{N\delta r}C_{\ell\delta a} - C_{N\delta a}C_{\ell\delta r}} \right)}^{K}\beta$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \left[ L_{bw} \right] \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & -\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\operatorname{sen}\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & \alpha\cos\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \alpha\operatorname{sen}\beta \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$-D = X\cos\beta + Y\operatorname{sen}\beta + Z\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$-L = -X\alpha + Z \Rightarrow Z = X\alpha - L$$

$$-D = (\cos\beta + \alpha^2\operatorname{sen}\beta)X + K\beta\operatorname{sen}\beta - L\operatorname{sen}\beta$$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{\tfrac{1}{2}\rho v^2 S'\left(C_{L\alpha}\alpha\operatorname{sen}\beta \mp C_{D_0} \mp K C_{L\alpha}^2\alpha^2\right) - K\beta\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta + \alpha^2\operatorname{sen}\beta} \\ Y &= K\beta \\ Z &= \frac{\tfrac{1}{2}\rho v^2 S'\left(C_{L\alpha}\alpha\operatorname{sen}\beta \mp C_{D_0} \mp K C_{L\alpha}^2\alpha^2\right) - K\beta\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta + \alpha^2\operatorname{sen}\beta}\alpha - \frac{1}{2}\rho v^2 S' C_{L\alpha}\alpha \end{aligned}}$$

$$Q = X\operatorname{sen}\beta - Y\cos\beta - Z\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$X\operatorname{sen}\beta - Y\cos\beta - Z\alpha\operatorname{sen}\beta + T\alpha\operatorname{sen}\beta$$



$\theta + \phi\psi \quad \theta\psi - \phi \quad 1$ $\quad \alpha\cos\beta \quad \alpha\operatorname{sen}\beta \quad 1$ $\quad M\mathcal{V} - M \quad 1$

③

1) $\theta = \cancel{\gamma}^{\,0\ (\text{horizontal})} + \alpha \Rightarrow \theta = \alpha$ T según $x_b \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \alpha \\ \nu = \beta \end{cases}$

En ejes viento:

$$T\cos\varepsilon\cos\nu - D - \cancel{mg\sin\gamma}^{\,0} - \cancel{m\dot V}^{\,0} = 0$$

$$T\cos\varepsilon\sin\nu - Q + mg\cos\gamma\sin\mu + mV(\cancel{\dot\gamma}^{\,0}\sin\mu - \cancel{\dot\chi}^{\,0}\cos\gamma\cos\mu) = 0$$

$$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma\cos\mu + mV(\cancel{\dot\gamma}^{\,0}\cos\mu + \cancel{\dot\chi}^{\,0}\cos\gamma\sin\mu) = 0$$

$$T\cos\beta = D \ ; \ \cos\beta = \frac{D}{T} = \frac{C_{D0} + kC_L^2}{T}$$

$$T\sin\beta - Q + W\mu = 0$$

$$-T\alpha - L + W = 0 \ ; \ -T\alpha - \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha) + W = 0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta e}\delta e}^{\,0}$$

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha} - T\right) - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L0} + W = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L0} - W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha} - T}}$$

$$\cos\beta = \frac{C_{D0} + k(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2}{T} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 S \rightsquigarrow \boxed{\beta = \arccos\left\{\frac{1}{2}\rho V^2 S \cdot \frac{C_{D0} + k(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2}{T}\right\}}$$

2)

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\cancel{C_{Y0}}^{\,0} + C_{Y\beta}\beta + \cancel{C_{Y\delta a}\delta a}^{\,0} + C_{Y\delta r}\delta r\right]$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancel{C_{l0}}^{\,0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r\right] = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancel{C_{n0}}^{\,0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r\right] = 0 \quad (\mathrm{II})$$

(I), (II) $\rightarrow$ $\boxed{\delta a = \frac{-C_{l\beta}\beta C_{n\delta r} + C_{n\beta}\beta C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}}$



$$\delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\beta}\cdot\beta\right]$$

3) Matriz de cambio de base de ejes viento a ejes cuerpo:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta & -\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\mathrm{sen}\,\beta & -\alpha \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & -\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$X = -D\cos\beta + Q\,\mathrm{sen}\,\beta + \alpha L$$

$$Y = -D\,\mathrm{sen}\,\beta - Q\cos\beta = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{y\beta}\beta + C_{y\delta r}\delta_r\right) \rightsquigarrow Q = \frac{1}{\cos\beta}\left[\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2 - C_{y\beta}\beta - C_{y\delta r}\right.\right.$$

$$Z = -D\alpha\cos\beta + Q\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta - L$$

$$X = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left\{ \mathrm{tg}\,\beta\left[\left(C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2 - C_{y\beta}\beta - C_{y\delta r}\delta_r\right)\right] - \cos\beta\left(C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2\right) + \alpha\left(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha\right)\right\}$$

$$Z = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left\{ \mathrm{tg}\,\beta\cdot\alpha\left[C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2 - C_{y\beta}\beta - C_{y\delta r}\delta_r\right] - \cos\beta\cdot\alpha\left(C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2\right) - \left(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha\right)\right\}$$

$$\mu = \frac{1}{W}\left\{\frac{\rho V^2 S}{2\cos\beta}\left[C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2\right] - C_{y\beta}\beta - C_{y\delta r}\delta_r - T\,\mathrm{sen}\,\beta\right\}$$

$$L_{bh} = L_{bw} \cdot L_{wh} \longrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \theta = \alpha \ll 1 \\ \psi = ? \quad \phi = ? \\ \chi = ? \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \phi\theta - \psi & \phi\theta\psi + 1 & \phi \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\mathrm{sen}\,\beta & -\alpha \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & \mu \\ \cdots \end{bmatrix}$$

**P.3**



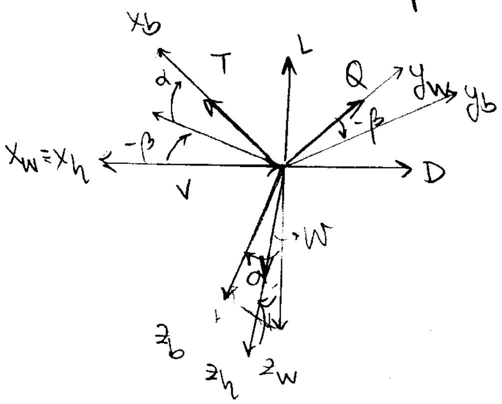
- Resbalam. horizontal rectilíneo estac. a veloc. $V$ $(\gamma = 0)$
- $T$ (motores)
- $(\Delta C_n)_\beta = C_{n\beta} |\beta|$ [contrib. adic. al mom. de cabeceo]
- Ejes cuerpo
- Ángulos peq., excepto $\beta$

DATOS

- $V, T, m, S$
- $\rho, g$
- $C_{D0}, k$
- $C_{L0}, C_{L\delta e} = 0$
- $C_{Y\beta}, C_{Y\delta r}, C_{Y\delta a} = 0$
- $C_{m0}, C_{m\alpha}, C_{m\delta e}, C_{m\beta}$
- $C_{l\beta}, C_{l\delta r}, C_{l\delta a}$
- $C_{n\beta}, C_{n\delta r}, C_{n\delta a}$
- $C_{Y0} = C_{n0} = C_{l0} = 0$

1) ¿Ecs. dinámicas en ejes viento? ¿$\alpha, \beta$?

Horizontal $\gamma = 0$
Rect $\bar{\omega}_{bw} = \bar{0}$; $\dot{\gamma} = \dot{\chi} = \dot{\mu} = 0$
Estac. $\dot{V} = 0$




$$\begin{cases} \bar{i}_w: \; T\cos\alpha\cos\beta - D = 0 \\ \bar{j}_w: \; -T\cos\alpha\sin\beta - Q + mg\sin\mu = 0 \\ \bar{k}_w: \; -T\sin\alpha - L + mg\cos\mu = 0 \end{cases}$$

ver ecs 3.5 $\left.\begin{matrix}\alpha = \varepsilon \\ +\beta = \nu\end{matrix}\right\}$

$\alpha, \mu \ll 1$

$$\begin{cases} T\cos\beta - D = 0 \\ -T\sin\beta - Q + mg\mu = 0 \\ -T\cdot\alpha - L + mg = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{D}{T} = \frac{\frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + k C_L^2)}{T}}$$

$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha$

$$+T\alpha + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L = +mg$$

2) ¿ $\delta_e, \delta_a, \delta_r$ ? Todos los fuerzos aplicados en c.d.g. ⇒ no dan momento

$$\mathcal{L} = 0 = \cancel{C_{\ell_0}}^{0} + C_{\ell_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{\ell_{\delta r}} \cdot \delta_r + C_{\ell_\beta} \cdot \beta = 0 \quad (1)$$

$$N = 0 = \cancel{C_{n_0}}^{0} + C_{n_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_r + C_{n_\beta} \cdot \beta = 0 \quad (2)$$

(1) $$\delta_a = -\frac{C_{\ell_\beta}}{C_{\ell_{\delta a}}} \beta - \frac{C_{\ell_{\delta r}}}{C_{\ell_{\delta a}}} \cdot \delta_r$$

(2) $$-C_{n_{\delta a}} \frac{C_{\ell_\beta}}{C_{\ell_{\delta a}}} \cdot \beta + \delta_r \left( C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}} \cdot \frac{C_{\ell_{\delta r}}}{C_{\ell_{\delta a}}} \right) + C_{n_\beta} \beta = 0$$

$$\hookrightarrow \delta_r = \frac{\left( C_{n_{\delta a}} \frac{C_{\ell_\beta}}{C_{\ell_{\delta a}}} - C_{n_\beta} \right) \cdot \beta}{C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}} \frac{C_{\ell_{\delta r}}}{C_{\ell_{\delta a}}}} = \boxed{\frac{(C_{n_{\delta a}} C_{\ell_\beta} - C_{n_\beta} \cdot C_{\ell_{\delta a}}) \cdot \beta}{C_{n_{\delta r}} \cdot C_{\ell_{\delta a}} - C_{n_{\delta a}} \cdot C_{\ell_{\delta r}}} = \delta_r}$$

(1)
$$\delta_a = -\frac{C_{\ell_\beta}}{C_{\ell_{\delta a}}} \cdot \beta - \frac{C_{\ell_{\delta r}}}{C_{\ell_{\delta a}}} \cdot \frac{C_{n_{\delta a}} C_{\ell_\beta} - C_{n_\beta} C_{\ell_{\delta a}}}{C_{n_{\delta r}} C_{\ell_{\delta a}} - C_{n_{\delta a}} C_{\ell_{\delta r}}} \beta =$$

$$= -\frac{\beta}{\cancel{C_{\ell_{\delta a}}}} \left[ \frac{C_{\ell_\beta} \cdot C_{n_{\delta r}} \cancel{C_{\ell_{\delta a}}} - \cancel{C_{\ell_\beta} C_{n_{\delta a}} C_{\ell_{\delta r}}} + \cancel{C_{n_{\delta a}} C_{\ell_\beta} C_{\ell_{\delta r}}} - C_{n_\beta} \cancel{C_{\ell_{\delta a}}} C_{\ell_{\delta r}}}{C_{n_{\delta r}} C_{\ell_{\delta a}} - C_{n_{\delta a}} C_{\ell_{\delta r}}} \right] =$$

$$= +\beta \left[ \frac{C_{n_\beta} C_{\ell_{\delta r}} - C_{\ell_\beta} C_{n_{\delta r}}}{C_{n_{\delta r}} C_{\ell_{\delta a}} - C_{n_{\delta a}} C_{\ell_{\delta r}}} \right]$$

$$C_{m_A} = 0 = C_{m_0} + C_{m_{\delta e}} \cdot \delta_e + \cancel{C_{m_{\hat{q}}} \cdot \hat{q}}^{0} + C_{m_\alpha} \underbrace{\alpha}_{\text{apdo 1}} + C_{m_\beta} \cdot \underbrace{|\beta|}_{\text{apdo. 1.}} = 0$$

$$\hookrightarrow \delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m_{\delta e}}} - \frac{C_{m_\alpha}}{C_{m_{\delta e}}} \cdot \alpha - \frac{C_{m_\beta}}{C_{m_{\delta e}}} \cdot |\beta|$$



$\hookrightarrow Q^{-1} = Q^T$

$$\left.\begin{aligned} X &= -\cos\beta\, D + Q\sin\beta + \alpha L \\ Y &= -D\sin\beta - Q\cos\beta \\ Z &= -D\alpha\cos\beta - Q\alpha\sin\beta - L \end{aligned}\right\}$$

Apdo. 1

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + k\left(C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha\right)^2\right) \\ Q &= mg\mu - T\sin\beta \\ L &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha\right) \end{aligned}\right\}$$

$$L_{bh} = L_{bw} \cdot L_{wh}$$

$$L_{bh} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & -\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\sin\beta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & \mu \\ \mu\chi & -\mu & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta - \chi\sin\beta - \alpha\mu\chi & \chi\cos\beta + \sin\beta - \alpha\mu & \mu\sin\beta - \alpha \\ -\sin\beta - \chi\cos\beta & -\chi\sin\beta + \cos\beta & \mu\cos\beta \\ \alpha\cos\beta - \alpha\chi\sin\beta + \mu\chi & \alpha\chi\cos\beta + \alpha\sin\beta - \mu & \alpha\mu\sin\beta + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \phi\theta - \psi & \phi\theta\psi + 1 & \phi \\ \theta + \phi\psi & \theta\psi - \phi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\phi = \mu\cos\beta}$$

**3.3** 

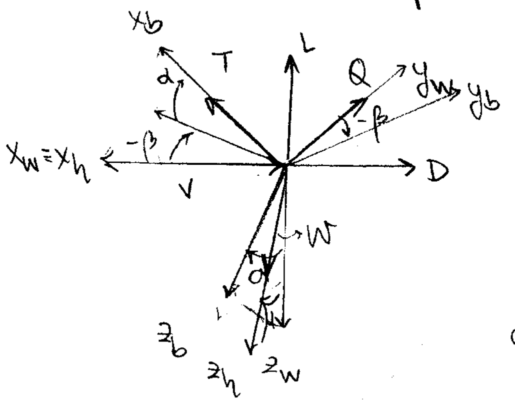
- Resbalam. horizontal rectilíneo estac. a velac. $V$ $(\gamma=0)$
- $T$ (motores)
- $(\Delta C_n)_\beta = C_{n_\beta}|\beta|$ [contrib. adic. al mom. de cabeceo]
- Ejes cuerpo
- Ángulos peq., excepto. $\beta$

DATOS

- $V, T, m, S$
- $\rho, g$
- $C_{D0}, k$
- $C_{L0}, C_{L\delta e} = 0$
- $C_{Y\beta}, C_{Y\delta r}, C_{Y\delta a} = 0$
- $C_{m_0}, C_{m_\alpha}, C_{m\delta e}, C_{m_\beta}$
- $C_{l\beta}, C_{l\delta r}, C_{l\delta a}$
- $C_{n\beta}, C_{n\delta r}, C_{n\delta a}$
- $C_{Y_0} = C_{n_0} = C_{l_0} = 0$

1) ¿Ecs. dinámicas en ejes viento? ¿$\alpha, \beta$?

Horizontal $\gamma=0$
Rect $\bar{\omega}_{bw} = \bar{0}$; $\dot{\gamma} = \dot{\chi} = \dot{\mu} = 0$
Estac. $\dot{V} = 0$




$\bar{i}_w$: $T\cos\alpha\cos\beta - D = 0$

$\bar{j}_w$: $-T\cos\alpha\sin\beta - Q + mg\sin\mu = 0$

$\bar{k}_w$: $-T\sin\alpha - L + mg\cos\mu = 0$

ver ecs 3.5
$\alpha = \varepsilon$
$+\beta = \nu$

$\alpha, \mu \ll 1$

$T\cos\beta - D = 0$

$-T\sin\beta - Q + mg\mu = 0$

$-T\alpha - L + mg = 0$

$$\cos\beta = \frac{D}{T} = \frac{\frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + k C_L^2)}{T}$$

$C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$

$+T\alpha + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L = +mg$

$$\left.\begin{aligned} X &= -\cos\beta\, D + Q\sin\beta + \alpha L \\ Y &= -D\sin\beta - Q\cos\beta \\ Z &= -D\alpha\cos\beta - Q\alpha\sin\beta - L \end{aligned}\right\}$$

Apdo. 1

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D_0} + k\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha\right)^2\right) \\ Q &= mg\mu - T\sin\beta \\ L &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha\right) \end{aligned}\right\}$$

$$L_{bh} = L_{bw}\cdot L_{wh}$$

$$L_{bh} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & -\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\sin\beta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & \mu \\ \mu\chi & -\mu & 1 \end{bmatrix} =$$

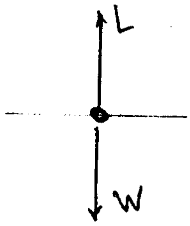
$$= \begin{bmatrix} \cos\beta - \chi\sin\beta - \alpha\mu\chi & \chi\cos\beta + \sin\beta - \alpha\mu & \mu\sin\beta - \alpha \\ -\sin\beta - \chi\cos\beta & -\chi\sin\beta + \cos\beta & \mu\cos\beta \\ \alpha\cos\beta - \alpha\chi\sin\beta + \mu\chi & \alpha\chi\cos\beta + \alpha\sin\beta - \mu & \alpha\mu\sin\beta + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \phi\theta - \psi & \phi\theta\psi + 1 & \phi \\ \theta + \phi\psi & \theta\psi - \phi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\phi = \mu\cos\beta}$$

María Jesús Jyberndó Salvá
nº exp 05299

$C_{L_S}$ = dato

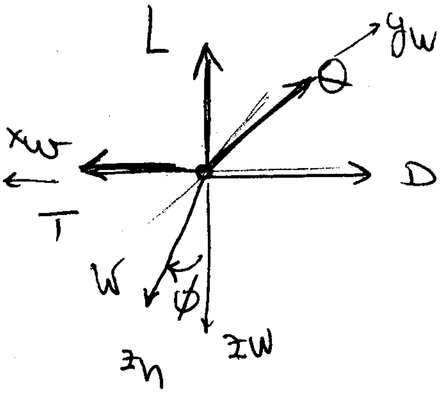
Vuelo horiz. rect. estac. con $\beta \neq$




horiz $\gamma = 0$

Rec $\dot{\gamma} = \dot{\chi} = \dot{\mu} = 0$ ó $\dot{\phi} = \dot{\psi} = \dot{\theta} = 0$

Estac $\dot{V} = 0$




$\boxed{\alpha = 0}$

$T - D = 0$ (1)

$\cancel{T\sin\beta} - Q + W\sin\phi = 0$ (2)

$\cancel{T\alpha} - L + W\cos\phi = 0$ (3)

$\boxed{L = W}$ $W = \frac{1}{2}$

$L = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left( C_{l_0} + C_{l_\beta}\cdot\beta + C_{l_{\delta a}}\delta_a + C_{l_{\delta r}}\delta_r \right) = 0$ $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_S}$

$M = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S c \left( C_{m_0} + C_{m_\alpha}\cdot\cancel{\alpha_b} + C_{m_{\delta e}}\cdot\delta_e \right) = 0$

$N = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left( C_{n_0} + C_{n_\beta}\cdot\beta + C_{n_{\delta a}}\cdot\delta_a + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta_r \right) = 0$ $W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_S}$

2) $\frac{d\phi}{d\beta}$

$\frac{d\delta_a}{d\beta}$

$\frac{d\delta_r}{d\beta}$

$$-C_{l\beta}\cdot\beta-\frac{C_{l\delta a}(C_{n\delta r}C_{l\beta}-C_{n\beta}C_{l\delta r})}{C_{n\delta a}C_{l\delta r}-C_{n\delta r}\cdot C_{l\delta a}}=$$

$$=-C_{l\beta}\cdot C_{n\delta a}C_{l\delta r}-\cancel{C_{l\delta a}\cdot C_{n\delta r}C_{l\beta}}+\cancel{C_{l\beta}\cdot C_{n\delta r}C_{l\delta a}}+C_{n\beta}C_{l\delta r}C_{l\delta a}$$

$$|C_{l\delta r}\cdot C_{n\delta a}|<<C_{n\delta r}C_{l\delta a}$$

Apdo3)

$$\frac{d\phi}{d\beta}=\frac{1}{C_{L}}\left(C_{y\beta}+C_{y\delta r}\frac{C_{n\beta}C_{l\delta a}-C_{l\beta}C_{n\delta a}}{-C_{n\delta r}C_{l\delta a}}\right)$$

$$\boxed{\frac{d\delta a}{d\beta}=\frac{C_{n\delta r}C_{l\beta}-C_{n\beta}C_{l\delta r}}{-C_{n\delta r}C_{l\delta a}}}=-\frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta a}}+\frac{C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}C_{l\delta a}}$$

$$\boxed{\frac{d\delta r}{d\beta}=-\frac{C_{l\beta}\cdot C_{n\delta a}+C_{n\beta}\cdot C_{l\delta a}}{-C_{n\delta r}C_{l\delta a}}}=+\frac{C_{l\beta}\cdot C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}C_{l\delta a}}-\frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta r}}$$

DATO DATO

Apdo4) ¿ $\frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta a}}$ ? ¿ $\frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta r}}$ ? ¿ $C_{l\delta r}/C_{l\beta}$ ? ¿ $C_{n\delta a}/C_{n\beta}$ ?

A B C

$$\frac{d\delta a}{d\beta}=\text{dato}$$



$$\frac{d\delta r}{d\beta}=\ldots$$



$$\frac{d\delta r}{d\beta}=A\cdot D\cdot B-B$$

$$\overset{B}{\frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta r}}} \cdot \overset{C}{\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}} \cdot \overset{A}{\frac{C_{l\beta}}{C_{l\beta}}}$$

$$\frac{d\delta a}{d\beta} = -A + B \cdot C \cdot A = \cancel{-A(B \cdot C)} + A(BC-1)$$

$$\overset{A}{\frac{C_{l\beta}}{C_{n\delta r}}} \cdot \overset{D}{\frac{C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}} \cdot \overset{B}{\frac{C_{n\beta}}{C_{n\beta}}} = -B + A \cdot D \cdot B = \frac{d\delta r}{d\beta}$$

$$B(AD-1) = \frac{d\delta r}{d\beta};$$

$$C_1 \cdot C_3 = \left(\frac{d\delta a}{d\beta}\right)^2 \cdot D$$

$$B = \frac{d\delta r}{d\beta} \cdot \frac{1}{AD-1}$$

$$A\left(\frac{d\delta r}{d\beta} \cdot \frac{1}{AD-1} \cdot C - 1\right) = \frac{d\delta a}{d\beta}$$

$$C_2^2 = \left(\frac{d\delta r}{d\beta} C - \frac{d\delta a}{d\beta} \cdot D + 1\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{d\delta r}{d\beta}\right)^2 C - \left(\frac{d\delta a}{d\beta}\right)^2 D + 1 - \frac{d\delta r}{d\beta}\frac{d\delta a}{d\beta} CD + \frac{d\delta r}{d\beta} C - \frac{d\delta a}{d\beta} \cdot D$$

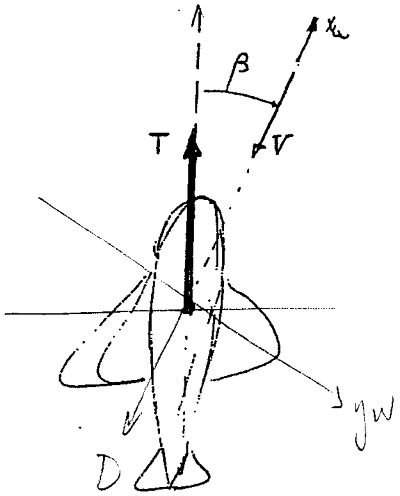
~~A·D =~~

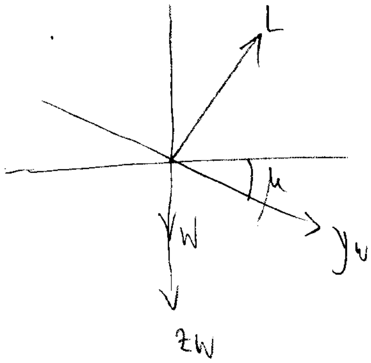
$$A\left(\frac{d\delta r}{d\beta} \cdot C - (AD-1)\right) = \frac{d\delta a}{d\beta} \cdot (AD-1)$$



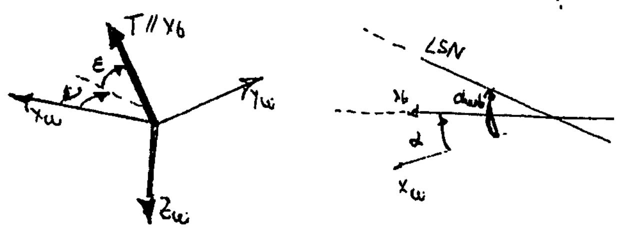
$$A = \frac{}{-2 \cdot C_1}$$

H.24/25-06-1997




$$C_{mcg} = C_{m0} + C_{m\alpha}\,\alpha_{wb} + C_{m\delta_e}\,\delta_e + \underbrace{C_{m\beta}\,|\beta|}_{(\Delta C_m)_\beta}$$




## 1 PLANTEAR EC.$^{nes}$ DINÁMICAS.

- Para las ecs de fuerza → ecs 4.4./3 pero en este caso $\begin{cases} \nu = -\beta \\ \varepsilon = \theta = \alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\,\text{sen}\,\gamma = m\cancel{\dot V}^{\,0} \quad (\text{vuelo horizontal rectilíneo estacionario}) \\ T\cos\varepsilon\,\text{sen}\,\nu - Q + mg\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu - mV\left(-\cancel{\dot\gamma}^{\,0}\,\text{sen}\,\mu + \cancel{\dot\chi}^{\,0}\cos\gamma\cos\mu\right) = 0 \\ -T\,\text{sen}\,\varepsilon - L + mg\cos\gamma\cos\mu + mV\left(\cancel{\dot\gamma}\cos\mu + \cancel{\dot\chi}\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu\right) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} \nu = -\beta \\ \varepsilon = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases}$ →

$$\begin{cases} T\cos\alpha\cos\beta - D = 0 & (1) \\ -T\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta - Q + mg\,\text{sen}\,\mu = 0 & (2) \\ -T\,\text{sen}\,\alpha - L + mg\cos\mu = 0 & (3) \end{cases}$$

- Para ángulos pequeños (excepto el $\beta$):

· De (1):

$$\boxed{\cos\beta = \frac{qS}{T}\left[C_{D} + K\left(C_{L0} + C_{L\alpha}\,\frac{-qSC_{L0} + mg}{T+qSC_{L\alpha}}\right)^2\right]}$$

## 2 CÁLCULO DE $\delta_e, \delta_r, \delta_a$

- Avión equilibrado: $C_{mcg} = 0$

$$* \; C_{mcg} = C_{m0} + \underbrace{C_{m\alpha}\cdot\alpha}_{\text{conocido}} + C_{m\delta}\cdot\delta_e + \underbrace{C_{m\beta}|\beta|}_{\text{conocido}} = 0 \longrightarrow \boxed{\delta_e = \frac{1}{C_{m\delta}}(\ldots)}$$

2º Momentos:

- conocido

$$\left.\begin{aligned} C_{l\beta}\cdot\beta + C_{l\delta_r}\cdot\delta_r + C_{l\delta_a}\cdot\delta_a &= 0 \\ C_{n\beta}\cdot\beta + C_{n\delta_r}\cdot\delta_r + C_{n\delta_a}\cdot\delta_a &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\delta_a = \ldots} \quad \boxed{\delta_r = \ldots}$$

## 3 CÁLCULO DE $\phi, x, y, z$.

$$\left|\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right|_b = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ \mathrm{sen}\alpha\cos\beta & -\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}}_{=[L_{bw}]} \left|\begin{matrix} -D \\ -Q \\ -L \end{matrix}\right|_w \longrightarrow \boxed{X, Z, Q}$$

- D, L, Y son conocidas
  ↳ $Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta_a}\delta_a + C_{Y\delta_r}\delta_r)$

- Conocido $Q$ $\xrightarrow[\text{en }(2)]{}$ $\boxed{\mu = \frac{T\,\mathrm{sen}\beta + Q}{mg}}$

$\boxed{\phi = \mu\cos\beta}$

3

1)

$$\gamma=0\ \begin{cases} T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\,\operatorname{sen}\gamma - m\cancel{\dot V} = 0 \\ T\cos\varepsilon\,\operatorname{sen}\nu - Q + mg\cos\gamma\,\operatorname{sen}\mu + mV(\cancel{\dot\gamma\,\operatorname{sen}\mu} - \cancel{\dot\chi\cos\gamma\cos\mu}) = 0 \\ -T\operatorname{sen}\varepsilon - L + mg\cos\gamma\cos\mu + mV(\cancel{\dot\gamma\cos\mu} + \cancel{\dot\chi\cos\gamma\,\operatorname{sen}\mu}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\varepsilon=\alpha \\ \nu=-\beta\end{matrix} \begin{cases} T\cos\alpha\cos\beta - D = 0 \ ; \\ T\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta - Q + mg\,\operatorname{sen}\mu = 0 \ ; \\ -T\operatorname{sen}\alpha - L + mg\cos\mu = 0 \ ; \quad -T\alpha - L + mg = 0 \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)$$

$$\alpha\left(-T + \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha}\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L0} - mg \sim \boxed{\alpha = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L0} - mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha} - T}}$$

$$T\cos\beta = D \sim \boxed{\cos\beta = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S}{T}\left[C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha)^2\right]}$$

2)

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta_e + C_{m\beta}\beta = 0$$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\beta}\cdot\beta\right]}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancel{C_{l0}} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r) = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancel{C_{n0}} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta_a + C_{n\delta r}\delta_r) = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(\cancel{C_{y0}} + C_{y\beta}\beta + C_{y\delta a}\cancel{\delta_a} + C_{y\delta r}\delta_r) = Y$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{C_{n\beta}C_{l\delta r} - C_{l\beta}C_{n\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\beta}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{C_{n\beta}C_{l\delta a} - C_{l\beta}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\beta}$$



$$X = \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\left[\frac{1}{2}\rho V^2 (C_{L\alpha}\alpha\cos\beta - C_{D0} - K C_{L\alpha}^2\alpha^2) - K\beta\cos\beta\right]$$

$$\mu = \frac{1}{mg}\left[ \alpha \operatorname{sen}\beta - y \cos\beta - z\alpha \operatorname{sen}\beta + T\alpha \operatorname{sen}\beta \right]$$

$$\phi = \mu \cos\beta$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – 2º E. Parcial – B+CD 06.02.93

PROBLEMA 2º

Un avión provisto de cuatro turborreactores, cuyas características aerodinámicas geométricas y másicas se consideran conocidas (en particular, el avión es completamente simétrico y $C_{Y\delta a}=0$), se encuentra en condiciones de vuelo horizontal rectilíneo estacionario sin resbalamiento y con empuje nulo en el motor exterior izquierdo.

Se pide:

1º) Determinar la velocidad mínima a la que es posible mantener el avión en vuelo en las condiciones indicadas.

2º) Determinar $\delta a, \delta r, \delta e$ para la velocidad calculada en el apartado anterior.

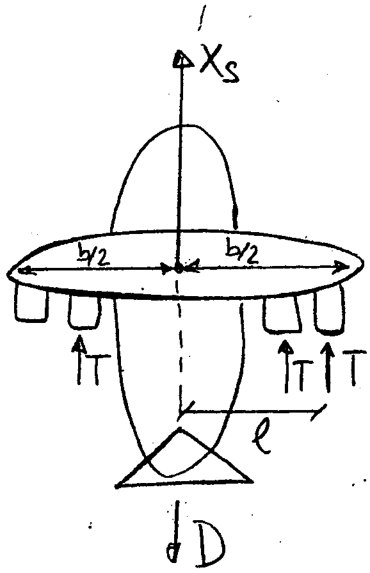
3º) En el caso de que sea necesario volar con un ángulo de balance $\phi$, determinar $\phi$ en función de la velocidad de vuelo.

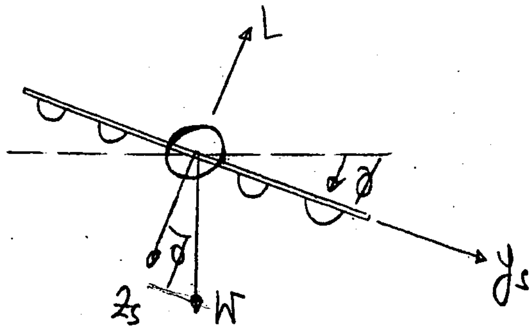
TIEMPO CONCEDIDO: 45 m

6-02-1993 (PROBLEMA 2/ 2º E. PARCIAL B+CD)

- Avión es completamente simétrico $C_{y0}=C_{l0}=C_{n0}=0$
- $C_{y\delta_a}=0$
- VUELO HORIZONTAL RECTILÍNEO ESTACIONARIO, $\beta=0$, $T=0$ en el motor exterior izquierdo.

1)




$$3T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0}+KC_L^2) \; ; \; V=\sqrt{\frac{6T}{\rho S C(C_{D0}+KC_L^2)}}$$

Si $C_L = C_{L_{MAX}} \longrightarrow V=V_{MIN} \longrightarrow$ $\boxed{V_{MIN} = \sqrt{\frac{6T}{\rho S(C_{D0}+KC_{L_{MAX}}^2)}}}$.

2) $Y+W\sin\phi=0$ ; $\boxed{Y = qSC(\cancel{C_{y0}}+C_{y\beta}\cancel{\beta}+C_{y\delta a}\cancel{\delta_a}+C_{y\delta r}\delta_r)}$ (0, 0, 0)

$$qSC_{y\delta r}\delta_r + W\sin\phi = 0 \longrightarrow \delta_r = -\frac{W\sin\phi}{qSC_{y\delta r}}$$

Del equilibrio del peso y la sustentación: $qS = \frac{3T}{C_{D0}+KC_{L_{MAX}}^2}$

• Equilibrio de momentos de balance:

$$\boxed{\mathcal{L}=0 = qSb\left(\cancel{C_{l_0}} + C_{l\delta a}\,\delta_a + C_{l\delta r}\,\delta_r + \cancel{C_{l\beta}\beta}\right)=0} \rightarrow \delta_a = -\frac{C_{l\delta r}\,\delta_r}{C_{l\delta a}}$$

0 0

$$\boxed{\delta_a = -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\,\frac{C_{L_{MAX}}}{C_{y\delta r}}\sqrt{1-\left(\frac{W(C_{D_0}+KC_{L_{MAX}}^2)}{3T\,C_{L_{MAX}}}\right)^2}}$$

• Equilibrio de momentos de guiñada:

$$\boxed{N_{TOTAL} = N + (-T\cdot \ell) = 0}$$

$$* N = qSb\left(\cancel{C_{n_0}} + \cancel{C_{n\beta}\beta} + C_{n\delta a}\,\delta_a + C_{n\delta r}\,\delta_r\right)$$

0 0

Por tanto: $qSb\left(C_{n\delta a}\,\delta_a + C_{n\delta r}\,\delta_r\right) - T\cdot\ell = 0 \qquad (*)$

De aquí sacamos otra relación entre $\delta_a$ y $\delta_r$ que no tiene porqué cumplirse, por tanto, hay fuerza lateral y el vuelo horizontal no será rectilíneo, por ello $C_{L_{MAX}}$ NO DETERMINA $V_{MIN}$, a no ser que consideremos T como incógnita (la necesaria para que $\Sigma T = D$)

De (*) $\quad \ell = \frac{+3b}{(C_{D_0}+KC_{L_{MAX}}^2)}\left(-C_{n\delta a}\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\frac{C_{L_{MAX}}}{C_{y\delta r}} + C_{n\delta r}\frac{C_{L_{MAX}}}{C_{y\delta r}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{W(C_{D_0}+KC_{L_{MAX}}^2)}{3T\,C_{L_{MAX}}}\right)^2}$

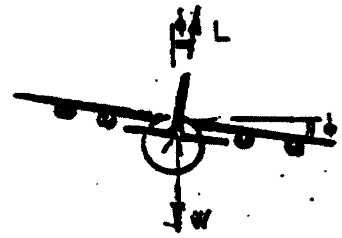
• Momento de cabeceo (vuelo equilibrado):

PROBLEMA DE EXAMEN 2º PARCIAL B+CD 6-2-93

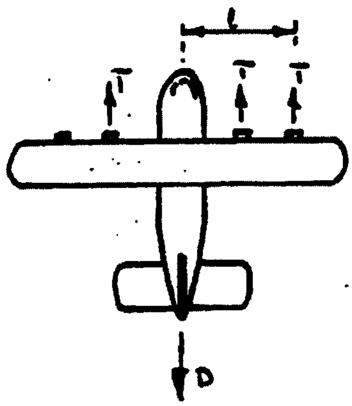
PROBLEMA 2º

- Avión con cuatro turborreactores
- Características aerodinámicas, geométricas y másicas conocidas
  (Avión simétrico → $C_{Y_0} = C_{l_0} = C_{n_0} = 0$ y $C_{Y_\beta} = 0$)
- Vuelo horizontal rectilíneo estacionario
- $\beta = 0$
- Empuje nulo en el motor exterior izquierdo

1º Si no hay estabilizamiento, para equilibrar la asimetría, tiene que haber balance




El vuelo se mantiene horizontal rectilíneo y estacionario mientras el empuje compense a la resistencia y haya sustentación → Limita la marca $C_{L_{max}}$




(2) $3T = D = q S C_D = q S (C_{D_0} + K C_L^2)$

$D_{min}$) Para $C_{L_{max}}$ → $\boxed{q = \dfrac{3T}{S(C_{D_0} + K C_{L_{max}}^2)}}$

→ $\boxed{U_{max} = \sqrt{\dfrac{6T}{\rho S (C_{D_0} + K C_{L_{max}}^2)}}}$

2º) De las ecuaciones de fuerzas y momentos lateral-direccionales

En esta ecuación $C_{Y_\beta} = C_{Y\delta a} = 0$ $\beta = 0$

⇒ Para la velocidad mínima $C_L = C_{L\,MAX}$

y $\sin\phi$ lo obtenemos del equilibrio de peso y sustentación:

(1) $L\cos\phi = W \Rightarrow q S C_{L\,MAX} \cos\phi = W \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{W}{qSC_{L\,MAX}}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\phi = \frac{W(C_{D0} + K C_{L\,MAX}^2)}{3T\, C_{L\,MAX}}} \qquad qS = \frac{3T}{C_D}$$

(3) $Y = -L\sin\phi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta_r = -\frac{C_{L\,MAX}\sin\phi}{C_{Y\delta r}} \Rightarrow \boxed{\delta_r = -\frac{C_{L\,MAX}}{C_{Y\delta r}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{W C_{D\,MAX}}{3T C_{L\,MAX}}\right)^2}}$$

Equilibrio de momento de balance ⇒

(4) $\mathcal{L} = 0 = qSb\,(C_{l\delta a}\,\delta_a + C_{l\delta r}\cdot\delta_r) \Rightarrow \delta_a = -\dfrac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}} \cdot \delta_r$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_a = \frac{C_{l\delta r}\, C_{L\,MAX}}{C_{Y\delta r}\, C_{l\delta a}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{W C_{D\,MAX}}{3T C_{L\,MAX}}\right)^2}}$$

Equilibrio de momento de guiñada:

(5) $-T \cdot l + qS\cancel{b}\,(\delta_a C_{n\delta a} + C_{n\delta r}\cdot\delta_r) = 0$

$\Rightarrow T \cdot l = \dfrac{3T}{C_{D\,MAX}}\,\cancel{b}\,(C_{n\delta a}\cdot\delta_a + C_{n\delta r}\cdot\delta_r)$

Hay una relación más entre $\delta_a$ y $\delta_r$ que no tiene por qué cumplirse por tanto hay fuerza lateral y el vuelo horizontal no será rectilíneo.

Las ecuaciones que utilizamos son:

$$qSC_L \cos\phi = W \quad (1)$$

$$\delta T = qS(C_{D0} + KC_L^2) \quad (2)$$

$$qSC_{Y\delta r}\delta_r + qSC_L \sin\phi \Rightarrow C_{Y\delta r}\delta_r + C_L \sin\phi = 0 \quad (3)$$

$$C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r = 0 \quad (4)$$

$$Ti = qSc(C_{N\delta a}\delta_a + C_{N\delta r}\delta_r) \quad (5)$$

Incógnitas: $q, \phi, C_L, \delta_r, \delta_a, T$

Entre (2) y (5) podemos eliminar una ecuación y la incógnita $T$ es

$$3c(C_{N\delta a}\delta_a + C_{N\delta r}\delta_r) = i(C_{D0} + KC_L^2) \quad (6)$$

Con 3, 4 y 6 podemos calcular $q, \phi, \delta_r, \delta_a, C_L$, una vez que fijemos uno de las incógnitas, por que esta alcanza un valor máximo conocido.

En nuestro caso si $C_L = C_{Lmax}$ se debe cumplir que $\delta_r < \delta_{r\,max}$ y $\delta_a < \delta_{a\,max}$ y finalmente al obtener el valor de $T$: $T < T_{max}$

$$i = \frac{3c}{C_{Dmax}}\left(C_{N\delta a}\cdot\frac{C_{l\delta r}C_{Lmax}}{C_{Y\delta r}\cdot C_{l\delta a}} - C_{N\delta r}\cdot\frac{C_{Lmax}}{C_{Y\delta r}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{W C_{Dmax}}{3T C_{Lmax}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{W C_{Dmax}}{3C_{Lmax}\sqrt{1-\left[\dfrac{iC_{Dmax}/3c}{\dfrac{C_{Lmax}}{C_{Y\delta r}}\left(C_{N\delta a} - C_{N\delta r}\dfrac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\right)}\right]^2}}}$$

$\delta_e$ se calcula con la ecuación de momento de cabeceo; en vuelo

$$\Rightarrow \boxed{\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\cdot \alpha_{MAX}}$$ y $\alpha_{MAX}$ es el correspondiente a $C_{L\,MAX}$

3º) Dividiendo ③ entre ①: $\frac{C_{Y\delta r}}{W} = -\frac{\sin\phi}{qS\cos\phi} \Rightarrow tg\phi = -q\left(\frac{S}{W}\right)C_{Y\delta r}\,\delta_r$

Podemos sacar ⑥ de la primera: $C_{l\delta a}\,\delta_a - C_{N\delta a}\cdot\delta_r = \frac{\ell C_D}{2b}$

y operando con esta ecuación y ⑦ $\Rightarrow$ $$\delta_r = \frac{\frac{\ell}{2b}C_D}{C_{N\delta r} - C_{N\delta a}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}}$$

$$\Rightarrow tg\phi = -q\left(\frac{S}{W}\right)C_{Y\delta r}\cdot\frac{\frac{\ell}{2b}\left[C_{D_0} - K\left(\frac{W}{qS}\frac{1}{\cos\phi}\right)^2\right]}{C_{N\delta r} - C_{N\delta a}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{tg\phi}{q}\left(\frac{W}{S}\right)\right] = -\frac{C_{Y\delta r}\frac{\ell}{2b}}{C_{N\delta r} - C_{N\delta a}\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}}\cdot\left[C_{D_0} + K\left(\left(\frac{W}{S}\right)^2\frac{1}{q^2}tg^2\phi + \left(\frac{W}{qS}\right)^2\right)\right]$$

Si $\frac{tg\phi}{q}\cdot\frac{W}{S} = x$ , $A = -\frac{\frac{\ell}{2b}C_{Y\delta r}}{C_{N\delta r} - C_{N\delta a}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}}$

$$\Rightarrow x = A\left[C_{D_0} + Kx^2 + K\left(\frac{W}{qS}\right)^2\right] \Rightarrow Kx^2 - \frac{x}{A} + C_{D_0} + K\left(\frac{W}{qS}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = +\frac{1}{2AK} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2AK}\right)^2 - \left(\frac{W}{qS}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{tg\phi = \frac{q}{W/S}\left(\frac{1}{2AK} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2AK}\right)^2 - \left(\frac{W/S}{q}\right)^2}\right)}$$

4

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 21.06.06

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

## PROBLEMA 3º

Un avión provisto de cuatro turborreactores, cada uno de los cuales proporciona en condiciones nominales el mismo empuje, se encuentra en condiciones de vuelo horizontal rectilíneo estacionario sin resbalamiento y con el motor exterior derecho parado.

Suponiendo que se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el avión es completamente simétrico, son datos $W$, $S$, $\rho$, $C_{L\delta e} = C_{Y\delta a} = 0$, los coeficientes de la polar parabólica $C_{D0}$ y $k$, etc.), el empuje de cada motor está dirigido según el eje $x_w$ y no contribuye ni al momento de cabeceo ni al de balance, y que, en el caso de que sea necesario volar con ángulo de balance, este es pequeño, se pide:

1º) Determinar la velocidad mínima, $V_{min}$, a la que se puede mantener el avión en vuelo en las condiciones indicadas, suponiendo que esta venga limitada por la máxima o la mínima deflexión del timón de dirección, $\delta_{rmax}$ o $\delta_{rmin}$.

2º) Determinar las deflexiones de los mandos, $\delta_a$, $\delta_e$ y $\delta_r$, para la velocidad calculada en el apartado 1º).

3º) En el caso de que sea necesario volar con ángulo de balance, determinar este ángulo $\phi$ en función de la velocidad de vuelo.

④

1) $T\cancel{\cos\varepsilon}\cancel{\cos\nu} - D - \cancel{mg\,\mathrm{sen}\gamma} - \cancel{m\dot{V}} = 0$

2) $T\cos\varepsilon\,\cancel{\mathrm{sen}\nu} - Q + mg\,\cancel{\cos\gamma}\,\mathrm{sen}\mu + \cancel{mV(-r_w)} = 0$

3) $-T\,\cancel{\mathrm{sen}\varepsilon} - L + mg\,\cancel{\cos\gamma}\cos\mu + \cancel{mVq_w} = 0$

Eje, viento

Vuelo $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \dot{V} = 0 \\ q_w = 0 = r_w \\ \beta = 0 \end{cases}$

T según $x_w$ ; $T_{1e}$ = Empuje de cada motor

$T - D = 0 \rightarrow T = D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2)$; $V_{MIN} = \sqrt{\dfrac{6T_{1e}}{\rho S V^2 (C_{D0} + K C_{LMAX}^2)}}$

$-Q + W\,\mathrm{sen}\mu = 0 \rightarrow Q = W\,\cancel{\mathrm{sen}\mu}$

$-L + W\cos\mu = 0$

$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta e}\cancel{\delta e} = \dfrac{2W\cancel{\cos\mu}}{\rho S V} \rightarrow \alpha = \alpha_0 + \dfrac{2W\cancel{\cos\mu}}{\rho S C_{L\alpha} V^2}$

$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S(\cancel{C_{Y0}} + \cancel{C_{Y\beta}\beta} + \cancel{C_{Y\delta a}\delta a} + C_{Y\delta r}\delta r) = W\mu \rightarrow \boxed{\mu = \dfrac{\rho V^2 S}{2W} C_{Y\delta r}\delta_r}$

$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\, C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b(\cancel{C_{l0}} + \cancel{C_{l\beta}\beta} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = 0$ (I) $\rightarrow \delta a = -\dfrac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta r$

$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\, C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\, C_n[\cancel{C_{n0}} + \cancel{C_{n\beta}\beta} + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = -T_{1e}\,l$ (II)

$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\, C_n\left[-\dfrac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\delta_r + C_{n\delta r}\delta_r\right] = -T_{1e}\,l$ ; $\frac{1}{2}\rho V^2 S b\, C_n\left[\delta_r\left(C_{n\delta r} - \dfrac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right)\right] = -T_{1e}\,l$

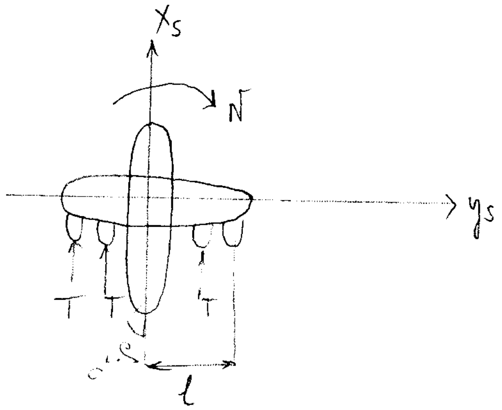
$\delta_r = \dfrac{-\cancel{\frac{1}{2}\rho S V^2}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho S V^2}\right) l \cdot \frac{1}{4}}{\cancel{\frac{1}{2}\rho S V^2} b \cdot \left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]} = \dfrac{\left(-C_{D0} - \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) l \cdot \frac{1}{4}}{b\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]} = \dfrac{\rho^2 S^2 V^4(-C_{D0} - 4KW^2)\, l \cdot \frac{1}{4}}{b \cdot \left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]}$

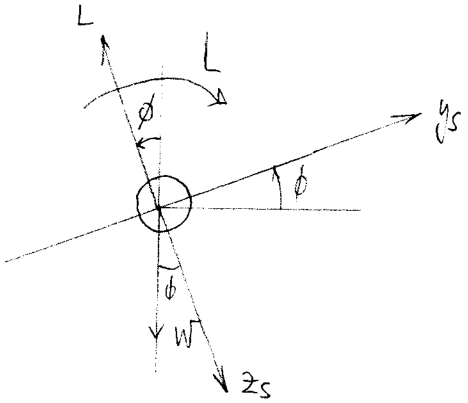
$V^4 = \dfrac{4b \cdot \left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]\delta_r}{\rho^2 S^2 l(-C_{D0} - 4KW^2)} \rightarrow \boxed{V_{MIN} = \sqrt[4]{\dfrac{4b\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]\delta_{rMIN}}{\rho^2 S^2 l(-C_{D0} - 4KW^2)}}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_r &= \delta_{rMIN} \\ \delta_a &= -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta_{rMIN} \end{aligned}}$$

$C_{M1} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0 \rightarrow \delta e = \dfrac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha\right]$

4




1) Avión simétrico $\Rightarrow C_{y0} = C_{l0} = C_{n0} = 0$

$C_{y\delta a} = 0$

$\beta = 0$

$$3T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + KC_L^2) \rightarrow V = \sqrt{\frac{6T}{\rho S (C_{D0}+KC_L^2)}}$$

$$V_{MIN} \Leftrightarrow C_{LMAX} \rightarrow V_{MIN} = \sqrt{\frac{6T}{\rho S (C_{D0}+KC_{LMAX}^2)}}$$

2) $q S(\cancel{C_{y0}} + \cancel{C_{y\beta}\beta} + \cancel{C_{y\delta a}\delta a} + C_{y\delta r}\delta r) - \underbrace{W \sin\phi}_{W\phi} = 0$;

$$qSC_{y\delta r}\cdot\delta r = W\phi \rightarrow \delta r = \frac{W}{qSC_{y\delta r}}\phi$$

$qSb(\cancel{C_{l0}} + \cancel{C_{l\beta}\beta} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = 0$;

$$qSb(C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\cdot\delta r) = 0 \rightarrow \delta a = -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\cdot\delta r$$

$$L = W\cos\phi \Rightarrow L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\cancel{\rho S}\frac{6T}{\cancel{\rho S}(C_{D0}+KC_{LMAX}^2)}\cdot C_{LMAX} = \frac{3T C_{LMAX}}{C_{D0}+KC_{LMAX}^2}$$

$$qSb(\cancel{C_{n0}} + \cancel{C_{n\beta}\beta} + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) + Tl = 0$$

$qSb(C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = -Tl$; $qSb\left(C_{n\delta a}\cdot -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta r + C_{n\delta r}\delta r\right) = -Tl$;

3) $\phi = \frac{7\, \tilde{S}\, C_{y\delta_r}}{W} \cdot \delta_r$

**11-02-1995**

Un avión turbohélice de cuatro motores, tal y como el que se muestra en la figura, efectúa una subida rectilínea estacionaria con ángulo de asiento de velocidad $\gamma \ll 1$, con resbalamiento nulo, a una velocidad un 25 % superior a la velocidad de pérdida en esas condiciones de vuelo y, en el caso en que sea necesario, un ángulo de balance de velocidad $\mu$ ($|\mu| \ll 1$). Las hélices proporcionan cada una un empuje $T$ dirigido según el eje $x_w$, y su velocidad angular es $\omega$ constante (en el sentido de las agujas del reloj vistas desde atrás) y su rendimiento es $\eta$ constante. El empuje de los motores no pasa por el centro de gravedad y el efecto del par motor sobre el equilibrio del avión no es despreciable.

En un momento dado se para el motor exterior derecho (nº 4) y el piloto acciona los mandos de vuelo, sin tocar los mandos del motor, de modo que continúa una subida en las mismas condiciones que antes y con la misma velocidad.

Se pide determinar:

- el ángulo de asiento de velocidad $\gamma$,
- la deflexión del timón de profundidad $\delta_e$,
- la deflexión de alerones $\delta_a$,
- la deflexión del timón de dirección $\delta_r$, y
- el ángulo de balance de velocidad $\mu$

antes de pararse y después de pararse el motor exterior derecho.

NOTA: Los datos de los que se dispone son los siguientes:

$W$, $S$, $b$, $c$

$T$ (empuje por motor), $\omega$, $\eta$, $d$, $y_1$, $y_2$

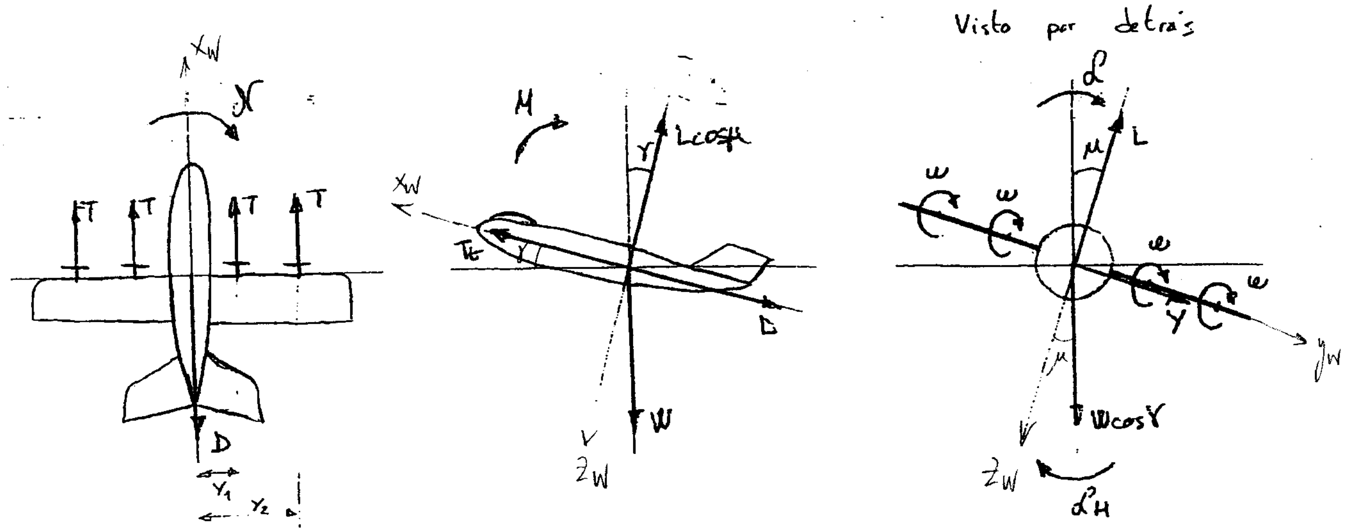
$C_{D0}$, $k$ (constantes de la polar parabólica)

$C_{Lmax}$ (coeficiente de sustentación máximo), $C_{L0}$, $C_{L\alpha}$, $C_{L\delta_e} = 0$

$C_{m0}$, $C_{m\alpha}$, $C_{m\delta_e}$

$C_{Y\delta_r}$, $C_{Y\delta_a} = 0$, $C_{\ell\delta_r}$, $C_{\ell\delta_a}$, $C_{n\delta_r}$, $C_{n\delta_a}$, $C_{Y0} = C_{\ell 0} = C_{n0} = 0$

$V = 1'25\, V_s$




Par producido por las hélices:

$$P_{1m} = M_H \cdot \omega = \frac{P_{1\,hélice}}{\eta} = \frac{T.V}{\eta} \Rightarrow M_{1H} = \frac{T.V}{\eta\,\omega}$$

4 motores $\rightarrow$ $\mathcal{L}_H = \dfrac{4T.V}{\eta\,\omega}$

3 motores $\rightarrow$ $\mathcal{L}_H = \dfrac{3TV}{\eta\,\omega}$

Antes del fallo

$$\mathcal{N} = 0 = \cancel{C_{N0}} + \cancel{C_{N\beta}\beta} + C_{N\delta a}\,\delta_a + C_{N\delta r}\,\delta_r$$

$$L\cos\mu = W\cos\gamma$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\rho S' b V^2 \left(\cancel{C_{\mathcal{L}0}} + \cancel{C_{\mathcal{L}\beta}\beta} + C_{\mathcal{L}\delta a}\,\delta_a + C_{\mathcal{L}\delta r}\,\delta_r\right) = \frac{4.TV}{\eta\,\omega}$$

$$W\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu = Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S' \left(\cancel{C_{Y0}} + \cancel{C_{Y\beta}}\beta + \cancel{C_{Y\delta a}\delta_a} + C_{Y\delta r}\,\delta_r\right)$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\,\alpha + C_{m\delta}\,\delta e = 0$$

$L\cos\mu\ \ldots\ W\,\text{sen}\,\gamma$



$$\alpha = \frac{\quad}{\rho\, S' V^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

$$\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\left(\frac{2W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}\right)$$

$$4T = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right) + W\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{W}\left[4T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\right]$$

$$\delta_r = -\frac{C_{N\delta a}}{C_{N\delta r}}\delta_a \Rightarrow C_{\ell\delta a}\delta_a - C_{\ell\delta r}\frac{C_{N\delta a}}{C_{N\delta r}}\delta_a = \frac{4.T.V}{\eta\,\omega}$$

$$\delta_a = \frac{4TV}{\eta\,\omega}\frac{C_{N\delta r}}{C_{\ell\delta a}C_{N\delta r} - C_{\ell\delta r}C_{N\delta a}}$$

$$\delta_r = \frac{4TV}{\eta\,\omega}\frac{C_{N\delta a}}{C_{\ell\delta r}C_{N\delta a} - C_{\ell\delta a}C_{N\delta r}}$$

$$W\mu = \frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_{Y\delta r}\,\delta_r$$

$$\mu = \frac{2T\rho V^3 S}{2W\omega}\frac{C_{N\delta a}C_{Y\delta r}}{C_{\ell\delta r}C_{N\delta a} - C_{\ell\delta a}C_{N\delta r}}$$

Después del fallo.

$\delta_e$ y $\gamma \rightarrow$ Iguales (con $3T$.)

$$\mathcal{N} + Ty_2 = 0 = \frac{1}{2}\rho S b V^2\left(C_{N\delta a}\delta_a + C_{N\delta r}\delta_r\right) + Ty_2$$

$$\delta_r = -\frac{2T\,y_2}{\ldots} - \frac{C_{N\delta a}}{\ldots}\delta_a$$



$$\ldots\ \delta_a \ldots \quad C_{N\delta r} \quad \eta\,\omega \quad \rho S b V^2 C_{N\delta r}$$

$$\delta_a = \left( \frac{3TV}{\eta \omega} + \frac{2T Y_2 C_{\ell \delta r}}{\rho S b v^2 C_{N\delta r}} \right) \frac{C_{N\delta r}}{C_{\ell\delta a} C_{N\delta r} - C_{\ell\delta r} C_{N\delta a}}$$

$$\delta_r = \left( \frac{3TV}{\eta \omega} + \frac{2T Y_2 C_{\ell \delta r}}{\rho S b v^2 C_{N\delta r}} \right) \frac{C_{N\delta a}}{C_{\ell\delta r} C_{N\delta a} - C_{\ell\delta a} C_{N\delta r}} - \frac{2T Y_2}{\rho S b v^2 C_{N\delta r}}$$

$$\mu = \frac{\rho v^2 S}{2W} C_{Y\delta r} \left[ \left( \frac{3TV}{\eta \omega} + \frac{2T Y_2 C_{\ell \delta r}}{\rho S b v^2 C_{N\delta r}} \right) \frac{C_{N\delta a}}{C_{\ell\delta r} C_{N\delta a} - C_{\ell\delta a} C_{N\delta r}} - \frac{2T Y_2}{\rho S b v^2 C_{N\delta r}} \right]$$

⑤

$$3T\cancel{\cos\varepsilon}\cancel{\cos\nu} - D - mg\,\cancel{\operatorname{sen}\gamma} - m\cancel{\dot V} = 0$$
$$3T\cos\varepsilon\,\cancel{\operatorname{sen}\nu} - Q + mg\,\cancel{\cos\gamma}\,\cancel{\operatorname{sen}\mu} + mV\cancel{(-r_w)} = 0$$
$$-3T\,\cancel{\operatorname{sen}\varepsilon} - L + mg\,\cancel{\cos\gamma}\,\cancel{\cos\mu} + mV\cancel{(q_w)} = 0$$

Eje viento
$$\begin{cases} 3T - D - W\gamma = 0 \quad (I) \\ -Q + W\mu = 0 \\ L = W \end{cases}$$

$$V = 1'25\,V_s = 1'25\cdot\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lmax}}}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta e}\delta e} = \frac{2W}{\rho S V^2} \sim\!\!\to \alpha = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}}$$

$$P = \frac{3TV}{\eta} = M\cdot\omega \Rightarrow M = M_{hélice} = \frac{3TV}{\omega\eta}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(\cancel{C_{Y0}} + \cancel{C_{Y\beta}\beta} + \cancel{C_{Y\delta a}\delta a} + C_{Y\delta r}\delta_r) = W\mu \quad (IV)$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancel{C_{l0}} + \cancel{C_{l\beta}\beta} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = \frac{3TV}{\omega\eta} \quad (II)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancel{C_{n0}} + \cancel{C_{n\beta}\beta} + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = -T y_2 \quad (III)$$

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0 \sim\!\!\to \boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(\alpha_0 + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2}\right)\right]}$$

$$(I) \sim\!\!\to \gamma = \frac{3T-D}{W} = \frac{3T - \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2)}{W} = \boxed{\frac{3T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{W}}$$

(II), (III)

$$\delta a = \frac{\begin{vmatrix} \frac{6TV}{\omega\eta}\frac{1}{\rho S V^2 b} & C_{l\delta r} \\ -2Ty_2\frac{1}{\rho S V^2 b} & C_{n\delta r}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{l\delta a} & C_{l\delta r} \\ C_{n\delta a} & C_{n\delta r}\end{vmatrix}} = \boxed{\frac{\frac{6V}{\omega\eta}C_{n\delta r} + 2y_2 C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{l\delta r}C_{n\delta a}}\cdot\frac{T}{\rho S V^2 b}}$$

$$\delta_r = \frac{\begin{vmatrix} C_{l\delta a} & \frac{6TV}{\omega\eta}\frac{1}{\rho S V^2 b} \\ C_{n\delta a} & -2Ty_2\frac{1}{\rho S V^2 b}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{l\delta a} & C_{l\delta r} \\ C_{n\delta a} & C_{n\delta r}\end{vmatrix}} = \boxed{\frac{\frac{6V}{\omega\eta}C_{n\delta a} - 2y_2 C_{l\delta a}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\frac{T}{\rho S V^2 b}}$$

$$(IV) \sim\!\!\to \mu = \frac{\rho S V^2}{2W}\cdot C_{Y\delta r}\delta_r = \frac{\rho S V^2}{2W}\cdot C_{Y\delta r}\cdot\left[\frac{\frac{6V}{\omega\eta}C_{n\delta a} - 2y_2 C_{l\delta a}}{\ldots}\cdot\frac{T}{\rho S V^2 b}\right]$$

$$Y=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Y\delta_r}\delta_r = W\mu \quad (\text{VI})$$

$$L_A=\frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l=\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[C_{l\delta_a}\delta_a+C_{l\delta_r}\delta_r\right]=\frac{4TV}{w\eta} \quad (\text{VII})$$

$$N_A=\frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n=\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[C_{n\delta_a}\delta_a+C_{n\delta_r}\delta_r\right]=0 \quad (\text{VIII}) \rightarrow \delta_a=-\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\delta_r$$

$$(\text{VII}) \rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[C_{l\delta_r}\delta_r-\frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}\delta_r}{C_{n\delta_a}}\right]=\frac{4TV}{w\eta}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\delta_r\left[C_{l\delta_r}-\frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\right]\right]=\frac{4TV}{w\eta} \rightarrow \boxed{\delta_r=\frac{8TV}{w\eta\rho V^2 S b\left[C_{l\delta_r}-\frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\right]}}$$

$$\boxed{\delta_a=\frac{-8TVC_{n\delta_r}}{w\eta\rho V^2 S b\left[C_{n\delta_a}C_{l\delta_r}-C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}\right]}}$$

$$(\text{VI}) \rightarrow \mu=\frac{\cancel{\rho V^2 S}}{2W}\cdot\frac{\cancel{8}^{4}TVC_{Y\delta_r}}{w\eta\cancel{\rho V^2 S}b\left[C_{l\delta_r}-\frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\right]}=\boxed{\frac{4TVC_{Y\delta_r}}{w\eta W b\left[C_{l\delta_r}-\frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\right]}}$$

6

*Ingenieros Aeronáuticos* Lateral - Direccional
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

4.21 **11-02-1995** Visto

Un avión turbohélice de cuatro motores, tal y como el que se muestra en la figura, efectúa una subida rectilínea estacionaria con ángulo de asiento de velocidad $\gamma \ll 1$, con resbalamiento nulo, a una velocidad un 25 % superior a la velocidad de pérdida en esas condiciones de vuelo y, en el caso en que sea necesario, un ángulo de balance de velocidad $\mu$ ($|\mu| \ll 1$). Las hélices proporcionan cada una un empuje $T$ dirigido según el eje $x_w$, y su velocidad angular es $\omega$ constante (en el sentido de las agujas del reloj vistas desde atrás) y su rendimiento es $\eta$ constante. El empuje de los motores no pasa por el centro de gravedad y el efecto del par motor sobre el equilibrio del avión no es despreciable.

En un momento dado se para el motor exterior derecho (nº 4) y el piloto acciona los mandos de vuelo, sin tocar los mandos del motor, de modo que continúa una subida en las mismas condiciones que antes y con la misma velocidad.

Se pide determinar:

- el ángulo de asiento de velocidad $\gamma$,
- la deflexión del timón de profundidad $\delta_e$,
- la deflexión de alerones $\delta_a$,
- la deflexión del timón de dirección $\delta_r$, y
- el ángulo de balance de velocidad $\mu$

antes de pararse y después de pararse el motor exterior derecho.

<u>NOTA</u>: Los datos de los que se dispone son los siguientes:

$W$, $S$, $b$, $c$

$T$ (empuje por motor), $\omega$, $\eta$, $d$, $y_1$, $y_2$

$C_{D0}$, $k$ (constantes de la polar parabólica)

$C_{Lmax}$ (coeficiente de sustentación máximo), $C_{L0}$, $C_{L\alpha}$, $C_{L\delta_e} = 0$

$C_{m0}$, $C_{m\alpha}$, $C_{m\delta_e}$

$C_{Y\delta_r}$, $C_{Y\delta_a} = 0$, $C_{\ell\delta_r}$, $C_{\ell\delta_a}$, $C_{n\delta_r}$, $C_{n\delta_a}$, $C_{Y0} = C_{\ell 0} = C_{n0} = 0$

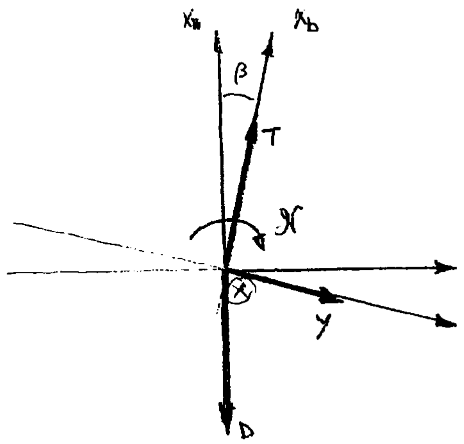
27-01-1997

Una avioneta convencional efectúa un vuelo horizontal rectilíneo estacionario con velocidad respecto a tierra $V_g$ contenida en su plano de simetría y en presencia de un viento horizontal cruzado por la derecha de módulo $V_w$ ($V_w \ll V_g$) constante y conocido. En cierto instante se rompe la transmisión entre el sistema de mando lateral y el alerón izquierdo (quedando éste flotando alrededor de sus charnelas, por lo que el piloto solamente mantiene mando lateral sobre el alerón derecho) y se pretende seguir volando en las mismas condiciones de vuelo de antes de la rotura y a la misma velocidad $V_g$.

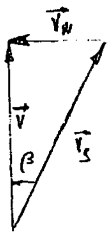
Suponiendo además que:

- Las características geométricas, aerodinámicas y másicas de la avioneta son conocidas (en concreto, las deflexiones de los alerones no cambian la sustentación total del avión, $C_{L0} = C_{L\delta_e} = 0$, $C_{l\delta_r} C_{n\beta} - C_{n\delta_r} C_{l\beta} > 0$).
- Las derivadas de los coeficientes de fuerza y momentos lateral-direccionales respecto a $\delta_a$ se conocen referidas a la semisuma de las deflexiones de los alerones derecho e izquierdo. Además, para la avioneta sin rotura del sistema de mando, no existe deflexión diferencial de alerones.
- El empuje del motor pasa por el centro de masas de la avioneta y está dirigido según el eje $x_s$.
- Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

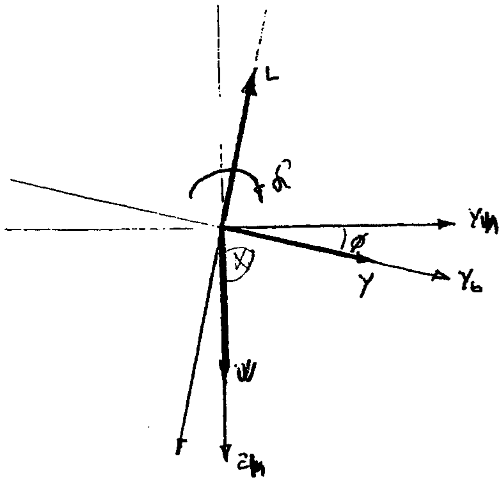
Se pide determinar en función de $V_g$, los siguientes incrementos entre magnitudes después de la rotura (subíndice "r") y antes de la rotura (sin subíndice): $\Delta\delta_{ad} = (\delta_{ad})_r - \delta_{ad}$ (el subíndice "d" significa alerón derecho), $\Delta\delta_r = (\delta_r)_r - \delta_r$, $\Delta\delta_e = (\delta_e)_r - \delta_e$, $\Delta\phi = \phi_r - \phi$. Comentar físicamente los resultados obtenidos y la dependencia con los distintos parámetros del problema.













$\beta = \frac{V_W}{V_g}$ (ang. peq)

- Antes de la rotura: $|\delta_{ad}| = |\delta_{ai}| \longrightarrow \delta_a = \frac{|\delta_{ad}| + |\delta_{ai}|}{2}$

$C_{m_{cg}} = 0 = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{wb} + C_{m_\delta} \cdot \delta_e$

$W \overset{\simeq 1}{\cos\phi} = L = \frac{1}{2}\rho V^2 S' C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S' (\cancel{C_{L_0}} + C_{L_\alpha}\alpha_{wb}) \Rightarrow \alpha_{wb} = \frac{W\cos\phi}{\frac{1}{2}\rho(V_g^2 + V_W^2) S' C_{L_\alpha}}$

$Y + W \operatorname{sen}\phi = 0$

$\mathcal{L} = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S' b \left( C_{\mathcal{L}_0} + C_{\mathcal{L}_\beta}\beta + C_{\mathcal{L}_{\delta_r}}\delta_r + \overbrace{\frac{C_{\mathcal{L}_{\delta_a}}}{2}\delta_{ad} + \frac{C_{\mathcal{L}_{\delta_a}}}{2}\delta_{ai}}^{C_{\mathcal{L}_{\delta_a}}\delta_a} \right)$

$\mathcal{N} = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S' b \left( C_{N_0} + C_{N_\beta}\beta + C_{N_{\delta_r}}\delta_r + \frac{C_{N_{\delta_a}}}{2}\delta_{ad} + \frac{C_{N_{\delta_a}}}{2}\delta_{ai} \right)$

se rompe transmisión entre mando lat y alerón izquierdo

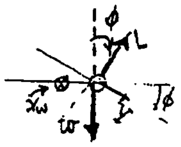
- Después de la rotura: $C_h|_{ai} = 0 \Rightarrow \delta_{ai}|_f = -\frac{1}{C_{h_{\delta_a}}}(C_{h_0} + C_{h_\alpha}\alpha)$

$(\delta_{ad})_r = 2\delta_a - \delta_{ai}|_f \Rightarrow \Delta\delta_{ad} = (\delta_{ad})_r - \delta_{ad} = 2\delta_a - \delta_{ai}|_f - \delta_a$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L} = 0 \\ \mathcal{N} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_a = \frac{C_{N_0} C_{\mathcal{L}_{\delta_r}} - C_{\mathcal{L}_0} C_{N_{\delta_r}}}{C_{\mathcal{L}_{\delta_a}} C_{N_{\delta_r}} - C_{N_{\delta_a}} C_{\mathcal{L}_{\delta_r}}} + \frac{C_{N_\beta} C_{\mathcal{L}_{\delta_r}} - C_{\mathcal{L}_\beta} C_{N_{\delta_r}}}{C_{\mathcal{L}_{\delta_a}} C_{N_{\delta_r}} - C_{N_{\delta_a}} C_{\mathcal{L}_{\delta_r}}} \frac{V_W}{V_g}$$

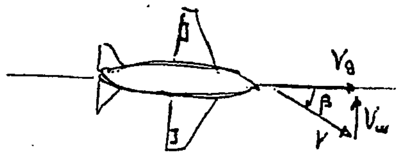
$\boxed{\#20/27\text{-}01\text{-}1997}$

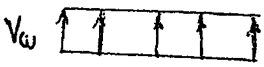
vista de atrás




$L = W\cos\phi$

vista de arriba




- $\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_\omega}$ ; $V^2 = V_g^2 + V_\omega^2$ , donde $V_g$ ... [illegible]
- $tg\,\beta = \frac{V_\omega}{V_g} \xrightarrow[\text{ángulos pequeños}]{} \beta \simeq \frac{V_\omega}{V_g}$

* Se conocen : $\left\{ \begin{array}{l} C_{y\delta_a} \\ C_{n\delta_a}, C_{l\delta_a} \end{array} \right.$ referidos a $\delta_a = \frac{\delta_{ai} + \delta_{ad}}{2}$

- Antes

\# $C_{mcg} = 0 = C_{m0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha_{wb} + C_{m\delta}\cdot\delta_e$

\# $C_L = \underset{0\ (\text{dato})}{\cancel{C_{L0}}} + C_{L\alpha}\cdot\alpha_{wb} + \underset{NO}{\cancel{C_{L\delta e}}}\cdot\delta_e = \frac{2W\cos\phi}{\rho V^2 S} \longrightarrow \alpha_{wb} = \frac{2W\cos\phi}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}$

$\longrightarrow \boxed{\delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta}}\left(C_{m0} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\frac{2W\cos\phi}{\rho S V^2}\right)}$

* $\mathcal{L} = q S b\left(C_{l\beta}\cdot\beta + C_{l\delta a}\cdot\underset{\frac{\delta_{ad}+\delta_{ai}}{2}}{\delta_a} + C_{l\delta_r}\cdot\delta_r\right) = 0$

\# $N = q S b\ (C_{n\beta}\cdot\beta + C \ldots$



$C_{l\delta_r}\cdot C_{n\delta a} - C_{n\delta r}\cdot C_{l\delta a}$ ... $V_g$

son iguales pq no hay deflexión diferencial de

$$L \operatorname{sen}\phi = Y\cos\phi \longrightarrow \boxed{\underbrace{tg\,\phi}_{\sim\phi} = \frac{Y}{L} = \frac{qSC_Y}{qSC_L} = \frac{C_Y}{C_L}}$$

donde
$$C_Y = C_{Y\beta}\cdot\beta + C_{Y\delta_r}\cdot\delta_r + C_{Y\delta_a}\cdot\delta_a$$
$$C_L = \frac{2W\cos\alpha}{\rho S V^2} \simeq \frac{2W}{\rho S V^2}$$

- **Después**

* Todo es lo mismo pero ahora en vez de usar $\delta_a$ se usan la $\delta_{ad}$, $\delta_{ai}$ por separado; tenemos 1 incógnita + pero a cambio tenemos la ecuación del momento de charnela nulo en el alerón izquierdo (que se queda flotando al romperse la transmisión).

* $C_{h\delta_{ai}} = 0 = C_{h_0} + C_{h_\alpha}\cdot\alpha_{wb} + C_{h\delta_{ai}}\cdot\delta_{ai} \longrightarrow \delta_{ai} = -\frac{C_{h_0}}{C_{h\delta_{ai}}} - \frac{C_{h\alpha}}{C_{h\delta_{ai}}}\cdot\alpha_{wb}$

\# $\Delta\delta_r = 0$

$\Delta\delta_e = 0$

$\Delta\alpha_{wb} = 0$

$\Delta\delta_a = 0$

$(\delta_{ad})_r = 2\delta_a - \delta_{ai} \longrightarrow \Delta\delta_{ad} = (\delta_{ad})_r - \delta_{ad} = (2\delta_a - \delta_{ai}) - \underbrace{\delta_{ad}}_{\delta_a} =$

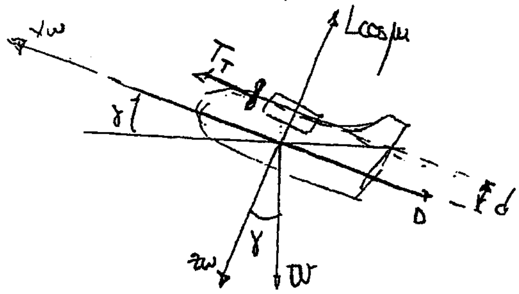
el de sin rotura (las ecs para $(\delta_a)_{medio}$ son iguales antes y después de la rotura)

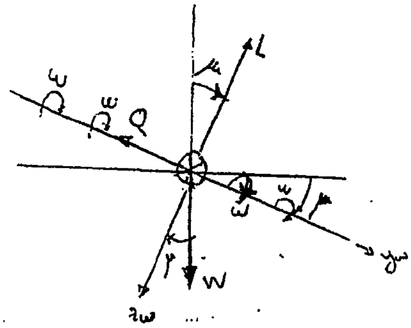
$= \delta_a - \delta_{ai} = \dots$

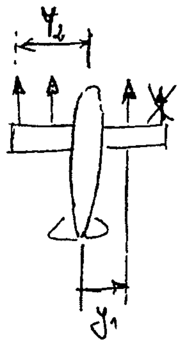
H.21/11-02-1995

• Nos indican que los motores hélice girar en sentido de las agujas del reloj, vistos desde atrás porque las hélices nos darán momento de balance

Visto del atrás — visto del arriba




$T_T = \begin{cases} 4T \text{, antes de rotura} \\ 3T \text{, dp de rotura} \end{cases}$

→ 6 ecs con 6 incógnitas $(\alpha, \gamma, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \mu)$. En ejes viento:

(1) $T_T - D - W\sin\gamma \simeq T_T - D - W\gamma = 0 \quad x_w)$

(2) $-L\cos\gamma + W\cos\gamma\cos\mu \approx -L + W = 0 \quad z_w)$ → $\boxed{V_s = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S C_{L_{max}}}}}$

$-L + W\cos\mu\cdot\cos\gamma = 0$

(3) $-Q + W\cos\gamma\sin\mu \approx -Q + W\mu = 0 \quad y_w)$ ; con ángulos pequeños, en este caso : Q ≃ -

(4) $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_T = 0$ donde $\mathcal{L}_T = \begin{cases} 4T_m \text{, antes de rotura} \\ 3T_m \text{, dp de rotura} \end{cases}$ ($T_m$ = par de 1 motor)

(5) $M_A + M_T = 0$ donde $M_T = \begin{cases} -4T\cdot d \text{, antes de rotura} \\ -3T d \text{, dp de rotura} \end{cases}$

(6) $N \quad N$

$\frac{T}{m}$ ω — par motor — 2 ω

$$(1) \Rightarrow T_T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + k\frac{4W^2}{\rho^2 V^4 S^2}\right) = W\gamma \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\gamma = \frac{T_T}{W} - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\frac{C_{D_0}}{W} + \frac{4k}{\rho^2 V^4 S^2}\right)\right]$$

$$(5) \Rightarrow \left[\delta_e = \frac{1}{C_{m\delta}}\left[\frac{2M_T}{\rho V^2 S b} - C_{m0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho V^2 S} - C_{L0}\right)\right]\right]$$

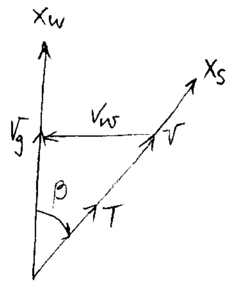
$$(6) \Rightarrow \left[\delta_r = \frac{2W\mu}{\rho V^2 S\, C_{Y\delta_r}}\right]$$ (aunque faltaría sustituir la $\mu$)

$$(4) \Rightarrow \left[\delta_a = -\frac{C_{N\delta_r}}{C_{N\delta_a}}\cdot\delta_r\right]$$ donde $$\delta_r = \frac{2 M_T}{\rho V^2 S b}\cdot\frac{1}{C_{l\delta_r} - C_{l\delta_a}\cdot\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}}$$

$$(3) \Rightarrow \left[\mu = \frac{C_{Y\delta_r}}{W}\cdot\frac{\cancel{\rho V^2 S}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2} M_T}{\cancel{\rho V^2 S}\, b}\cdot\frac{1}{C_{l\delta_r} - C_{l\delta_a}\cdot\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}}\right]$$

⑥

## Antes de la rotura:




$\mu = \emptyset$, $\beta = \nu$

$\tan\beta = \dfrac{V_w}{V_g}$

$V^2 = V_w^2 + V_g^2$

$\beta = \dfrac{V_w}{V_g}$

$$T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\sin\gamma - m\dot V = 0$$

$$T\cos\varepsilon\sin\nu - Q + mg\cos\gamma\sin\mu + mV(r_w) = 0$$

$$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma\cos\mu + mV(q_w) = 0$$

$$T - D = 0 \sim T = D = \frac{1}{2}\rho(V_w^2+V_g^2)S\,(C_{D0} + KC_L^2)$$

$$T\beta - Q + W\emptyset = 0 \;;\; Y = -\underset{L_{,T}}{D\beta - Q} \Rightarrow Y = -W\emptyset$$

$$-L + W = 0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta e}\delta e = \frac{2W}{\rho S V^2} \sim \alpha = \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}(V_w^2+V_g^2)}$$

$$C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0 \longrightarrow \delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}(V_w^2+V_g^2)}\right]$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{y0} + C_{y\beta}\beta + C_{y\delta a}\delta a + C_{y\delta r}\delta r) = -W\emptyset$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b(C_{l0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b(C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = 0 \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}) \Rightarrow \delta a = \frac{-C_{l\beta}C_{n\delta r} + C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\beta \sim \delta_{ad} = \delta_{ai} \Rightarrow \delta a = \frac{\delta_{ai}+\delta_{ad}}{2} = \delta_{ad}$$

$$\delta r = \frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\beta$$

$$\emptyset = \frac{-1}{W}\left[\frac{1}{2}\rho(V_w^2+V_g^2)S\left(C_{y\beta}\beta + C_{y\delta a}\delta a + C_{y\delta r}\delta r\right)\right]$$

$$\emptyset = \frac{-1}{W}\left[\frac{1}{2}\rho(V_w^2+V_g^2)S\left(C_{y\beta}\beta + \frac{-C_{l\beta}C_{n\delta r} + C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}C_{y\delta a}\beta + \frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}C_{y\delta r}\beta\right)\right]$$

## Después de la rotura:



$$\delta e_r = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}(V_w^2+V_g^2)}\right]$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{\,0} + C_{y\beta}\beta + C_{y\delta a}\delta a_r + C_{y\delta r}\delta_{r_r}\right) = -W\phi_r$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l b = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{\,0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a_r + C_{l\delta r}\delta r_r\right) = 0$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n b = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{\,0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a_r + C_{n\delta r}\delta r_r\right) = 0$$

$$H_{a_i} = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_a}{2} C_a\left(C_{ha0} + C_{h\alpha}\alpha_r + C_{h\delta a}\delta a_i\right) \rightsquigarrow \delta a_{i_f} = -\frac{C_{ha0}}{C_{h\delta a}} - \frac{C_{h\alpha}}{C_{h\delta a}}\cdot\alpha_r$$

$$\delta a_r = \frac{\delta a_{dr}}{2} + \frac{\delta a_{if}}{2} = \frac{\delta_a}{2} + \frac{\delta_{aif}}{2} = \frac{-C_{l\beta}C_{n\delta r} + C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\frac{\beta}{2} - \frac{C_{ha0}}{2C_{h\delta a}} - \frac{C_{h\alpha}}{C_{h\delta a}}\cdot\frac{\alpha}{2}$$

$$\delta a_{d_r} = \frac{-C_{l\beta}C_{n\delta r} + C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\frac{\beta}{2} - \frac{C_{ha0}}{2C_{h\delta a}} - \frac{C_{h\alpha}}{C_{h\delta a}}\cdot\frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}(\cancel{V_W^2}^{\,0} + V_g^2)\cancel{2}}$$

$$\boxed{\Delta\delta_{ad} = \frac{C_{l\beta}C_{n\delta r} - C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\frac{\beta}{2} + \frac{C_{ha0}}{2C_{h\delta a}} + \frac{C_{h\alpha}}{C_{h\delta a}}\,\frac{W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\delta_r &= 0\\ \Delta\delta_e &= 0\\ \Delta\phi &= 0\end{aligned}}$$

7

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 12.09.09

E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

### PROBLEMA 2º

Se considera un avión en fase de aproximación final con sus dos flaps izquierdo y derecho deflectados la misma cantidad $\delta_{f0}$ conocida, volando rectilínea, simétrica y estacionariamente a velocidad $V_0$ conocida y con las alas a nivel. En cierto instante se rompe la barra de transmisión del flap izquierdo (quedándose este enganchado por sus soportes en condiciones de flotación) y el piloto pretende seguir descendiendo rectilínea, simétrica y estacionariamente sin tocar el flap derecho, con la misma velocidad de antes de la rotura. Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el avión es simétrico, la curva del coeficiente de sustentación del avión completo, para deflexión nula de flaps, tiene la forma $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, y la deflexión de cada flap genera incrementos de los coeficientes de sustentación y de resistencia del avión completo dados por $\Delta C_{Lf} = a_1\ \delta_f$ e $\Delta C_{Df} = a_2\ \delta_f^2$, aplicados en el punto O, donde $\delta_f$ es la deflexión del flap, y $a_1$ y $a_2$ son constantes conocidas, $C_{n\delta a} = C_{Y\delta a} = 0$, etc.).

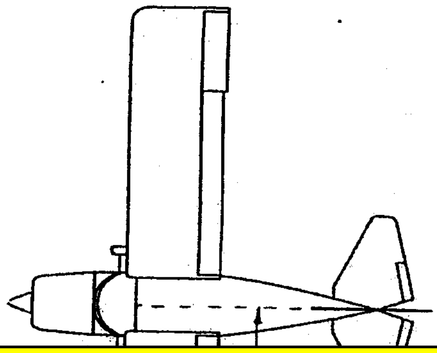
b) El empuje del motor está dirigido según el eje $x_w$ y pasa por el centro de masas del avión.

c) El mando direccional es convencional, mecánico y reversible, y el timón de dirección no tiene tab de compensación.

d) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

e) $\rho$ es una constante conocida.

Se pide determinar la deflexión del timón de dirección, $\delta_r$, la deflexión de los alerones, $\delta_a$, el ángulo de balance, $\phi$, y la fuerza en pedales, $F_r$, para el descenso antes de la rotura de la barra del flap izquierdo y para el descenso después de la rotura.



7

Antes de la rotura:

$$T\cos\varepsilon\cos\nu - D - W\sin\gamma - m\dot{V} = 0$$

$$T\cos\varepsilon\sin\nu - Q + W\cos\gamma\sin\mu + mV(\dot{\chi}\cos\gamma) = 0$$

$$-T\sin\varepsilon - L + W\cos\gamma\cos\mu + mV(\dot{\gamma}) = 0$$

Ejes viento

$\beta = 0$ Simétrico

$\gamma \neq 0 ;\ \gamma \ll 1$

$\mu = 0$ Alas a nivel $\Rightarrow \boxed{\phi = 0}$

$$T - D - W\gamma = 0$$

$$-Q = 0$$

$$-L + W = 0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \Delta C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + 2a_1\delta_{f0} = \frac{2W}{\rho S V_0^2} \rightsquigarrow \alpha = \frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} - 2a_1\frac{\delta_{f0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_0^2}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S(C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta a}\delta_a + C_{Y\delta r}\delta_r) = 0$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b(C_{l0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r) = 0 \rightsquigarrow \delta_a = -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta_r \rightsquigarrow \boxed{\delta_a = 0}$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b(C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta_a + C_{n\delta r}\delta_r) = 0 \Rightarrow \boxed{\delta_r = 0}$$

$$F_r = -G_r H_r = -G_r \frac{1}{2}\rho V_0^2 S_r \bar{c}_r [C_{h\beta}\beta + C_{h\delta r}\delta_r + C_{h\delta tr}\delta_{tr}] \Rightarrow \boxed{F_r = 0}$$

Después de la rotura:

$$T - D - W\gamma = 0$$

$$-Q + W\mu = 0$$

$$-L + W = 0$$

Ejes viento

$\beta = 0$

$\gamma \neq 0 ;\ \gamma \ll 1$

$\mu \neq 0 ;\ \mu = \phi$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \Delta C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + a_1\delta_{f0} + a_1\delta_{f_{iF}} = \frac{2W}{\rho S V_0^2} \rightsquigarrow \alpha = \frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{a_1}{C_{L\alpha}}(\delta_{f0} + \delta_{f_{iF}}) + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_0^2}$$

$$H_{fi} = \frac{1}{2}\rho V_0^2 \frac{S_{fi}}{2} c_{fi}(C_{hf0} + C_{hf\alpha}\alpha + C_{hf\delta f}\cdot\delta_{fi}) = 0 \quad \delta_{f_{iF}} = \frac{-1}{C_{hf\delta f}}[C_{hf0} + C_{hf\alpha}\alpha]$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + a_1\delta_{f0} - \frac{a_1}{C_{hf\delta f}}(C_{hf0} + C_{hf\alpha}\alpha) = \frac{2W}{\rho S V_0^2}$$



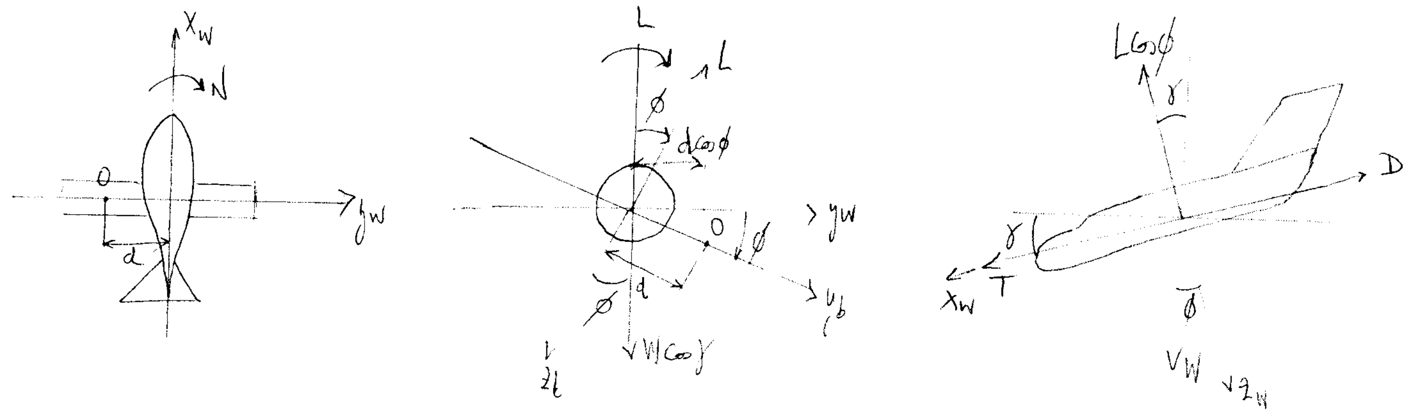
$$\delta_{f_{iF}} = \frac{-1}{C_{hf\delta f}}\left[C_{hf0} + C_{hf\alpha}\left(\frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{a_1}{C_{L\alpha}}\delta_{f0} - \frac{a_1}{C_{L\alpha}}\delta_{f_{iF}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_0^2}\right)\right]$$

$$\delta_r = \frac{a_2 d}{C_{n\delta r}} \left[\delta_{f_{iF}}^2 - \delta_{f_0}^2\right]$$

$$\phi = \frac{\rho V_0^2 S}{2W} \cdot C_{y\delta r} \cdot \frac{a_2 d}{C_{n\delta r}} \left[\delta_{f_{iF}}^2 - \delta_{f_0}^2\right]$$

$$\delta_a = -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}} \delta_r - \frac{a_1 d}{C_{l\delta a}} \left[\delta_{f_{iF}} - \delta_{f_0}\right] = -\frac{a_2 d\, C_{l\delta r}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r}} \left[\delta_{f_{iF}}^2 - \delta_{f_0}^2\right] - \frac{a_1 d}{C_{l\delta a}} \left[\delta_{f_{iF}} - \delta_{f_0}\right]$$

7




ANTES DE LA ROTURA:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + 2a_1\delta_{f0} \rightsquigarrow \alpha_{wb} = \frac{2W}{\rho S V_0^2 a_\alpha} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{2a_1}{a_\alpha}\delta_{f0}$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{0} + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) = 0 \rightsquigarrow \delta_a = -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta_r$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{0} + \cancel{C_{n\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\delta_r = 0} \rightsquigarrow \boxed{\delta_a = 0}$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{0} + \cancel{C_{y\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{y\delta a}\delta_a}^{0} + \cancel{C_{y\delta r}\delta_r}^{0}\right) - \underbrace{W\cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\phi}_{W\phi} = 0\ ;\quad \boxed{\phi = 0}$$

$$F_r = -G_r H_r = -G_r \frac{1}{2}\rho V_0^2 S_r \eta_r \bar{c}_r\left(\cancel{C_{h\beta}\beta}^{0} + C_{h\delta_r}\delta_r + \cancel{C_{h\delta tr}\delta_{tr}}^{0}\right) \text{ (NO TIENE TAB) } \Rightarrow \boxed{F_r = 0}$$

DESPUÉS DE LA ROTURA:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + a_1\delta_{f0} + a_1\delta_{f_{iFLOT}} \rightsquigarrow \alpha_{wb} = \frac{2W}{\rho S V_0^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{a_1}{C_{L\alpha}}\left(\delta_{f0} + \delta_{f_{iFLOT}}\right)$$

$$H_{fi} = 0 \Rightarrow \delta_{f_{iFLOT}} = \frac{-1}{C_{h\delta f}}\left(C_{h0} + C_{h\alpha}\alpha_{wb}\right)$$

$$\delta_{f_{iFLOT}} = \frac{-1}{C_{h\delta f}}\left[C_{h0} + \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho S V_0^2} - C_{L0} - a_1\delta_{f0} - a_1\delta_{f_{iFLOT}}\right)\right];$$

$$\delta_{f_{iFLOT}}\left(1 - \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}C_{h\delta f}}a_1\right) = \frac{-1}{C_{h\delta f}}\left[C_{h0} + \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho S V_0^2} - C_{L0} - a_1\delta_{f0}\right)\right];$$

$$\delta_{f_{iFLOT}} = \frac{-C_{h0} - \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho S V_0^2} - C_{L0} - a_1\delta_{f0}\right)}{C_{h\delta f} - C_{h\alpha} \ldots}$$



$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{0} + \cancel{C_{n\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) - D_{ad}\, d = 0$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{a_2}{b\,C_{n\delta_r}}\left(\delta_{f_{TIFLOT}}^{\,2} - \delta_{f_0}^{\,2}\right)}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{-a_1 d}{b\,C_{l\delta_a}}\left(\delta_{f_{TIFLOT}} - \delta_{f_0}\right) - \frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}} \cdot \frac{a_2}{b\,C_{n\delta_r}}\left(\delta_{f_{TIFLOT}}^{\,2} - \delta_{f_0}^{\,2}\right)}$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left(\cancelto{0}{C_{y_0}} + \cancelto{0}{C_{y\beta}\beta} + \cancelto{0}{C_{y\delta_a}}\delta_a + C_{y\delta_r}\delta_r\right) - W\phi = 0$$

$$\boxed{\phi = \frac{2 a_2 C_{y\delta_r}}{\rho V_0^2 S\, b\, C_{n\delta_r} W} \cdot \left(\delta_{f_{TIFLOT}}^{\,2} - \delta_{f_0}^{\,2}\right)}$$

$$F_r = -G_r H_r = -G_r \cdot \frac{1}{2}\rho V_0^2 S_r \eta_r c_r \bar{c}_r \left(C_{h\beta}\cancelto{0}{\beta} + C_{h\delta_r}\delta_r + \cancel{C_{h\delta_{tr}}}\cancelto{0}{\delta_{tr}}\right);$$

$$\boxed{F_r = -G_r \cdot \frac{1}{2}\rho V_0^2 S_r \eta_r c_r \bar{c}_r \frac{a_2 C_{h\delta_r}}{b\, C_{n\delta_r}}\left(\delta_{f_{TIFLOT}}^{\,2} - \delta_{f_0}^{\,2}\right)}$$

· Ángulo de ataque del avión antes de la rotura

$$\frac{2W}{\rho v^2 S} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_0 + 2a_1\delta_{f0} \rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho V_0^2 S} - C_{L0} - 2a_1\delta_{f0}\right)$$

· Ángulo de ataque del avión después de la rotura y ángulo de flotación del flap izquierdo.

$$\left.\begin{aligned} &C_{h0f} + C_{h\alpha f}\alpha_1 + C_{h\delta_f}\delta_{f_{flot}} = 0 \\ &\frac{2W}{\rho V_0^2 S} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_1 + \underbrace{a_1\delta_{f0}}_{\text{dcho}} + \underbrace{a_1\delta_{f_{flot}}}_{\text{izdo}} \end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{C_{L\alpha}}\left(\delta_{f_{flot}} - \delta_{f0}\right) + \alpha_0$$

$$\delta_{f_{flot}} = \frac{\frac{C_{h\alpha f}}{C_{h\delta f}}\left(\frac{a_1}{C_{L\alpha}}\delta_{f0} - \alpha_0\right) - \frac{C_{h0f}}{C_{h\delta f}}}{1 + \frac{C_{h\alpha f}}{C_{h\delta f}}\cdot\frac{a_1}{C_{L\alpha}}}$$

· deflexiones de los mandos antes de la rotura

$\boxed{\phi = \delta_a = \delta_r = F_r = 0}$ AVIÓN sim $\rightarrow C_{l0} = C_{..} = 0.$

· equilibrio de momentos de balance y guiñada



$$\delta_r = \frac{u_2 q}{C_{n\delta_r} b}\left(\delta_{f_{flot}}^2 - \delta_{f0}^2\right)$$

$$\delta_a = \frac{a_1 d}{C_{l\delta_a} b}\left(\delta_{f0} - \delta_{ffot}\right) - \frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}}\frac{a_2\ d}{C_{n\delta_r} b}\left(\delta_{ffot}^2 - \delta_{f0}^2\right)$$

- $Y + W\cos\phi = 0 \longrightarrow \phi = \frac{-\rho S}{2W} V_0^2 C_{y\delta_r}\delta_r$
- $F_r = -G_r H_r = -G_r \frac{1}{2}\rho V_0^2 \eta_v S_r c_r C_{h\delta_r}\delta_r$

PROBLEMA 2 → TOTAL: 10 puntos

- Ángulo de ataque del avión antes de la rotura:

• $\frac{2W}{\rho V_0^2 S} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_0 + 2a_{\alpha}\delta_{t0} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left[\frac{2W}{\rho V_0^2 S} - C_{L0} - 2a_{\alpha}\delta_{t0}\right]$ → 1

- Ángulo de ataque del avión después de la rotura y ángulo de [illegible]

• $\frac{2W}{\rho V_0^2 S} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_1 + a_{\alpha}\delta_{t0} + a_{\alpha}\delta_{t1}$ → 1

• $\alpha_1 = \frac{a_{\alpha}}{C_{L\alpha}}(\delta_{t0} - \delta_{t1}) + \alpha_0$ → 2

→ 1

→ 2

$a_2(\delta_{t0} - \delta_{t1}) = 0$

→ 1



→ 0.5

8

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS**

**UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO** 10-09-04

E. Final Septiembre "Mecánica del Vuelo I"

**PROBLEMA 3º**

Un avión lleva suspendidos debajo de las alas dos contenedores lanzables, cada uno de peso $W_B$, colocados simétricamente con respecto al plano de simetría del avión a una distancia $d$ de éste y a una altura $h$ por debajo del plano $x_b$-$y_b$.

El avión se encuentra en una condición inicial de vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con las alas a nivel a velocidad conocida $V$. En un momento dado el piloto suelta el contenedor izquierdo y acciona los mandos de manera que continúa el vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario a la misma velocidad $V$.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión sin contenedores (en particular el avión es simétrico, su polar es parabólica de coeficientes constantes conocidos, $C_{n\delta a} = C_{l\delta a} = C_{L\delta e} = 0$, etc.).

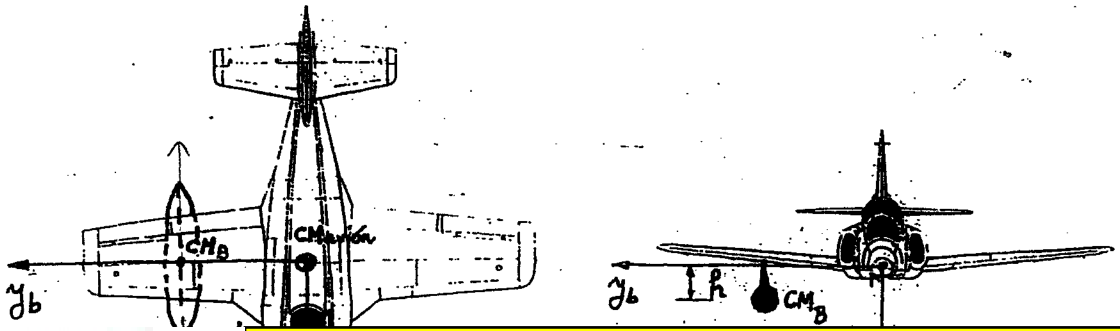
b) Las acciones aerodinámicas sobre cada contenedor se reducen a una resistencia $\Delta C_{DB}$ constante y conocida (referida a la superficie alar del avión y aplicada en el centro de masas del contenedor) y el peso de estos no es despreciable frente al del avión.

c) El empuje de los motores pasa por el centro de masas del avión y el ángulo de ataque del empuje es despreciable.

d) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

e) $\rho$ es una constante conocida.

Se pide determinar los incrementos de timón de dirección $\Delta\delta_r$, de alerones $\Delta\delta_a$, de empuje $\Delta T$ y de timón de profundidad $\Delta\delta_e$ que debe introducir el piloto para pasar de la situación inicial a la situación final indicadas anteriormente. Comentar físicamente los resultados obtenidos.



Situación inicial → vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con alas a nivel

$$L = W_T = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta_e}\delta_e}\right)$$

$$Y = 0 \Rightarrow \cancelto{0}{C_{Y_0}} + \cancel{C_{Y\beta}\beta} + \cancel{C_{Y\delta_a}\delta_a} + C_{Y\delta_r}\delta_r = 0$$

$$\ell = 0 \Rightarrow \cancelto{0}{C_{\ell_0}} + \cancel{C_{\ell\beta}\beta} + C_{\ell\delta_a}\delta_a + C_{\ell\delta_r}\delta_r = 0$$

$$T = D + 2D_B = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D_0} + K C_L^2 + 2\Delta C_{DB}\right)$$

$$\delta_r^0 = -\frac{C_{Y_0}}{C_{Y\delta_r}} = 0$$

$$\delta_a^0 = -\frac{C_{\ell_0}}{C_{\ell\delta_a}} + \frac{C_{\ell\delta_r}}{C_{\ell\delta_a}}\frac{C_{Y_0}}{C_{Y\delta_r}} = 0$$

$$C_L = \frac{2W_T}{\rho V^2 S} \quad ; \quad \alpha = -\frac{C_{L_0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W_T}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}$$

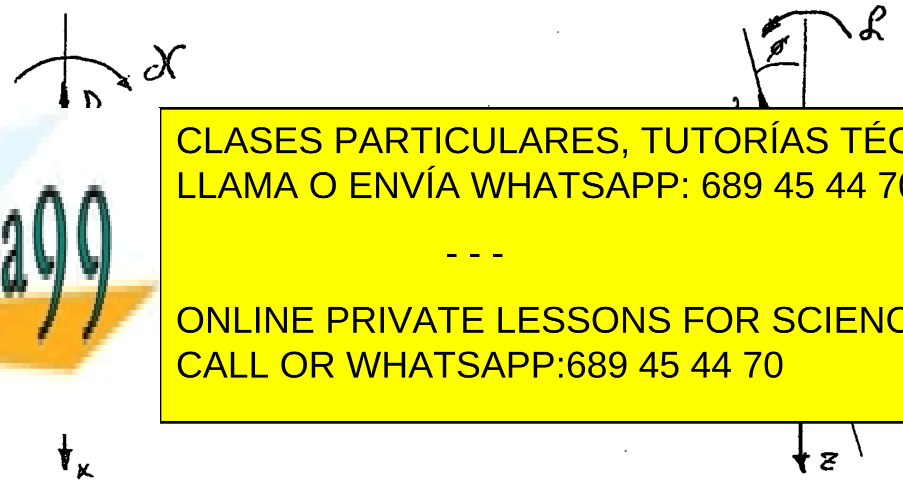
$$T^0 = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D_0} + \frac{4W_T^2 K}{\rho^2 V^4 S^2} + 2\Delta C_{DB}\right)$$

$$C_{m_{cg}} = C_{m_0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_e}\delta_e = \underline{\frac{h}{c}2\Delta C_{DB}}$$

$$\delta_e^0 = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}\left(-\frac{C_{L_0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W_T}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}\right) + \frac{2h}{c}\frac{\Delta C_{DB}}{C_{m\delta_e}}$$

$$W_T = W_A + 2W_B$$

Situación final → vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario



$$\mathcal{N} + d\,D_B = 0$$

$$L = W_a\cos\phi + W_B\cos\phi = (W_a + W_B)\cos\phi \simeq W + W_B = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)$$

$$\mathcal{L} = d\,W_B = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancel{C_{\mathcal{L}0}}^{\,0} + \cancel{C_{\mathcal{L}\beta}\beta} + C_{\mathcal{L}\delta a}\,\delta_a + C_{\mathcal{L}\delta r}\,\delta_r)$$

$$T = D + D_B$$

$$Y = -(W_a + W_B)\,\mathrm{sen}\,\phi \simeq -(W_a + W_B)\,\phi$$

$$T = D + D_B = \frac{1}{2}\rho S V^2\,(C_{D0} + K C_L^2 + \Delta C_{DB})$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancel{C_{N0}}^{\,0} + \cancel{C_{N\beta}\beta} + \cancel{C_{N\delta a}\delta_a} + C_{N\delta r}\,\delta_r) = -d\,\frac{1}{2}\rho S V^2\,\Delta C_{DB}$$

$$C_{N0} + C_{N\delta r}\,\delta_r = -\frac{d}{b}\,\Delta C_{DB} \Rightarrow \delta_r^{1} = -\frac{d}{b}\frac{\Delta C_{DB}}{C_{N\delta r}} - \frac{C_{N0}}{C_{N\delta r}}$$

$$C_{\mathcal{L}0} + C_{\mathcal{L}\delta a}\,\delta_a + C_{\mathcal{L}\delta r}\,\delta_r = \frac{2W_B}{\rho V^2 S}\,\frac{d}{b}$$

$$\delta_a^{1} = \frac{2W_B}{\rho V^2 S C_{\mathcal{L}\delta a}} - \frac{C_{\mathcal{L}0}}{C_{\mathcal{L}\delta a}} + \frac{C_{\mathcal{L}\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}}\,\frac{d}{b}\,\frac{\Delta C_{DB}}{C_{N\delta r}} + \frac{C_{\mathcal{L}\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}}\,\frac{C_{N0}}{C_{N\delta r}}$$

$$T^{1} = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + K\,\frac{4(W + W_B)^2}{\rho^2 V^4 S^2} + \Delta C_{DB}\right)$$

$$C_{mcg} = C_{m0} + C_{m\alpha}\,\alpha + C_{m\delta e} = \frac{h}{c}\,\Delta C_{DB}$$

$$\delta_e^{1} = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta e}}\left(-\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2(W + W_B)}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}\right) + \frac{h}{c}\,\Delta C_{DB}$$

$$\Delta\delta_r = \delta_r^{1} - \delta_r^{0} \Rightarrow \boxed{\Delta\delta_r = -\frac{d}{b}\,\frac{\Delta C_{DB}}{C_{N\delta r}}}$$

$$\boxed{\Delta T = -\frac{1}{2}\rho V^2 S' \left[ \frac{4K}{\rho^2 V^4 S'^2} \left(3W_B^2 + 2WW_B\right) + \Delta C_{DB} \right]}$$

$$\Delta\delta_e = \delta_e' - \delta_e^0 = -\frac{2\, C_{m\alpha}}{\rho V^2 S' C_{L\alpha} C_{m\delta e}} \left( W + W_B - W - 2W_B \right) - \frac{h}{c} \frac{\Delta C_{DB}}{C_{m\delta e}}$$

$$\boxed{\Delta\delta_e = \frac{2\, C_{m\alpha} W_B}{\rho V^2 S C_{L\alpha} C_{m\delta e}} - \frac{h}{c} \frac{\Delta C_{DB}}{C_{m\delta e}}}$$

(8)

ANTES DE LA SUELTA: (Alas a nivel $\Rightarrow \phi = 0$ y sin resbalamiento $\beta = 0$)

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + \cancel{C_{L\delta e}}^{0} \rightsquigarrow \alpha_{wb} = \frac{2W_T}{\rho S V^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} \qquad W_T = W + 2W_B$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{wb} + C_{m\delta e}\delta_e = 2\frac{h}{b}\Delta C_{DB}$$

$$\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W_T}{\rho S V^2} - C_{L0}\right) + 2\frac{h}{b}\Delta C_{DB}\right]$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{0} + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) = 0 \rightsquigarrow \delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[\cancel{C_{l0}}^{0} + C_{l\delta r}\delta_r\right] = 0$$

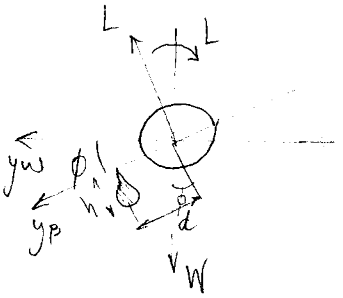
$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{0} + \cancel{C_{n\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) = 0$$

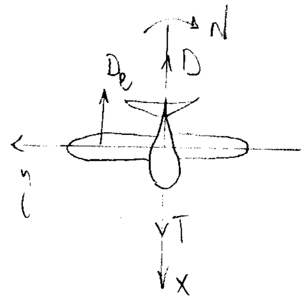
$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{0} + \cancel{C_{y\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{y\delta a}\delta_a}^{0} + C_{y\delta r}\delta_r\right) = 0 \rightsquigarrow \delta_r = -\frac{\cancel{C_{y0}}^{0}}{C_{y\delta r}} = -\frac{\cancel{C_{n0}}^{0}}{C_{n\delta r}} = 0$$

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[C_{l0} - \frac{C_{l\delta r}}{C_{y\delta r}}C_{y0}\right] = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[\cancel{C_{l0}}^{0} - \cancel{\frac{C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}C_{n0}}^{0}\right] = 0$$

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2 + 2\Delta C_{DB}\right)$$

DESPUÉS DE LA SUELTA:




$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + \cancel{C_{L\delta e}\delta_e}^{0} = \frac{2(W+W_B)}{\rho V^2 S}$$

$$\alpha_{wb} = \frac{2(W+W_B)}{\rho S V^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{wb} + C_{m\delta e}\delta_e = \frac{h}{c}\Delta C_{DB} \rightsquigarrow \delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2(W+W_B)}{\rho S V^2} - C_{L0}\right) + \frac{h}{b}\Delta C_{DB}\right]$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{0} + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) - W_B d = 0 \rightsquigarrow \delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[\cancel{C_{l0}}^{0} + C_{l\delta r}\delta_r - \frac{W_B}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\cdot\frac{d}{b}\right]$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{0} + C_{n\beta}\beta^{0} + C_{n\delta a}\delta_a^{0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) + D_B d = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{0} + C_{y\beta}\beta^{0} + C_{y\delta a}\delta_a + C_{y\delta r}\delta_r\right) + (W+W_B)\,\mathrm{sen}\,\phi = 0 \ldots$$

$$\ldots C_{l\delta a}\ \ldots\ \frac{\ldots}{C_{n\delta r}}\left(C_{n0} + \Delta C_{DB}\frac{d}{b}\right) - \frac{\ldots W_B}{\rho V^2 S}\cdot\frac{d}{b}\Big]$$

$$\boxed{\Delta\delta_r} = -\cancel{\frac{C_{y0}}{C_{y\delta_r}}} + \frac{1}{C_{n\delta_r}}\left[\cancel{C_{n0}} + \Delta C_{DB}\frac{d}{b}\right] = \boxed{\frac{-1}{C_{n\delta_r}}\Delta C_{DB}\frac{d}{b}}$$

$$\boxed{\Delta\delta_a} = \frac{1}{C_{l\delta_a}}\left[C_{l\delta_r}\left(\frac{C_{y0}}{C_{y\delta_r}} - \frac{C_{n0}+\Delta C_{DB}\, d/b}{C_{n\delta_r}}\right) - \frac{2W_B}{\rho V^2 S}\cdot\frac{d}{b}\right] = \boxed{\frac{1}{C_{l\delta_a}}\left[-\frac{C_{l\delta_r}}{C_{n\delta_r}}\Delta C_{DB}\frac{d}{b} - \frac{2W_B}{\rho V^2 S}\cdot\frac{d}{b}\right]}$$

$$\boxed{\Delta\delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta_e}}\left[\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\cdot\frac{2W_B}{\rho S V^2} + \frac{h}{b}\Delta C_{DB}\right]}$$

$$\boxed{\Delta T} = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[K\left(C_L^2 - C_{L0}^2\right) + \Delta C_{DB}\right] = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[K\left(\frac{4(W+2W_B)^2}{\rho^2 V^4 S^2} - \frac{4(W+W_B)^2}{\rho^2 V^4 S^2}\right) + \Delta C_{DB}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\frac{4K}{\rho^2 V^4 S^2}\left(3W_B^2 + 2WW_B\right) + \Delta C_{DB}\right]}$$

D-264

## PROBLEMA 27

Un avión dispone de un sistema de mando lateral, mediante palanca, completamente reversible y sin tab de compensación y de un sistema de mando direccional, mediante pedales, completamente reversible y con tab de compensación.

Mediante cierta ligadura mecánica, cuando el piloto deflecta los alerones también deflecta el compensador del timón de dirección (con objeto de compensar la guiñada adversa) sin necesidad de ningún mando adicional.

Suponiendo que el avión tiene una asimetría másica (peso colgado del ala izquierda), que el piloto sólo actúa sobre los alerones y que se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión, se pide:

1º) Determinar la fuerza en palanca $F_{sa}$ necesaria para volar horizontal rectilínea, horizontal y estacionariamente a velocidad $V$ y con $\beta$ nulo.

2º) Determinar la relación de mecanismos que debe existir entre la deflexión de alerones $\delta_a$ y la deflexión del compensador del timón de dirección $\delta_{t_r}$ en las condiciones del apartado anterior, y comentar su signo.

⑨

1) $T = D$

$-Q + (W+W_p)\mu = 0$

$-L + (W+W_p) = 0$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \longrightarrow Y = -\cancel{D\beta}^{\,0} - Q$$

$$Y = -(W+W_p)\cancel{\mu}^{\,\phi}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y = \frac{1}{2}\rho S V^2 (\cancel{C_{y0}}^{\,0} + \cancel{C_{y\beta}\beta}^{\,0} + C_{y\delta a}\delta a + C_{y\delta r}\delta r) = -(W+W_p)\cancel{\phi}$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{l0} = \frac{1}{2}\rho S V^2 b(\cancel{C_{l0}}^{\,0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{\,0} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = W_p \cdot l_p \quad (I)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{n0} = \frac{1}{2}\rho S V^2 b(\cancel{C_{n0}}^{\,0} + \cancel{C_{n\beta}\beta}^{\,0} + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = \cancel{D_p l_p}^{\,0} \rightsquigarrow \delta_r = \frac{-C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\delta a$$

$$D_p = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0p} + \cancel{K C_{Lp}^2}^{\,0}) \simeq 0$$

$$(I) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\rho S V^2 b\left[C_{l\delta a}\delta a - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}\delta a\right] = W_p l_p$$

$$\delta_a\left[C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}\right] = \frac{2W_p l_p}{\rho S V^2 b}$$

$$\delta_a = \frac{2W_p l_p}{\rho S V^2 b}\,\frac{1}{C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}}$$

$$F_{sa} = -G_a \cdot \frac{1}{2}\cancel{\rho S V^2} S_a c_a C_{h\delta a}\,\frac{2W_p l_p}{\cancel{\rho S V^2} b}\cdot\frac{1}{C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}}$$

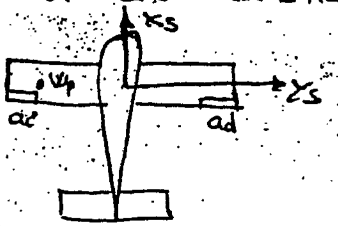
$$\boxed{F_{sa} = \frac{-2W_p l_p}{C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\cdot C_{l\delta r}}\cdot\frac{G_a S_a c_a C_{h\delta a}}{b}}$$

2) $\quad -2W_p l_p \quad 1$

$$\boxed{\frac{\delta_{tr}}{\delta_a}} = \frac{\dfrac{C_{hr\delta_r}}{C_{hr\delta_{tr}}}\left[\cancel{\dfrac{2 w_p l_p}{\rho S V^2 b}} \cdot \dfrac{C_{n\delta_a}}{\cancel{C_{l\delta_a} C_{n\delta_r} - C_{n\delta_a} C_{l\delta_r}}}\right]}{\cancel{\dfrac{2 w_p l_p}{\rho S V^2 b}} \cdot \dfrac{C_{n\delta_r}}{\cancel{C_{l\delta_a} C_{n\delta_r} - C_{n\delta_a} C_{l\delta_r}}}} = \boxed{\frac{C_{hr\delta_r}}{C_{hr\delta_{tr}}} \cdot \frac{C_{n\delta_a}}{C_{n\delta_r}}}$$

# PROBLEMA 27

• Avión con asimetría másica.

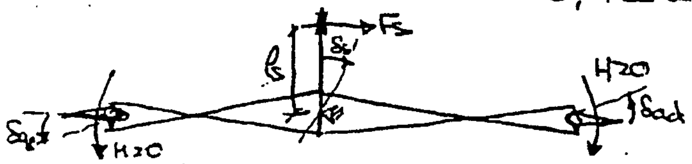



Piloto solo actúa sobre los alerones

Compensador en timón de dirección para compensar guiñada adversa.

1.- Det. fuerza en palanca $F_{sa}$ para vuelo horizontal, rectilíneo estacionario a $V$=cte y $\beta=0$

Fuerza en palanca

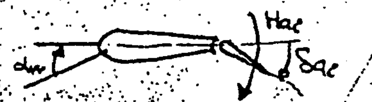



La deflexión del alerón derecho es positiva hacia arriba y la del alerón izqdo es positiva hacia abajo.

Tomamos $H>0$ cuando va según el eje $y_s$

Ppio de trabajos virtuales $F_s G_s d\delta_s + H_{ai} d\delta_{ai} - H_{ad} d\delta_{ad} = 0$

Se desprecia la fuerza sobre el 'tab' de compensación.




$H_{ai} = q S_{ai} c_{ai} (C_{h0} + C_{h\alpha} \cdot \alpha_w + C_{h\delta} \cdot \delta_{ai})$

$H_{ad} = q S_{ad} c_{ad} (C_{h0} + C_{h\alpha} \cdot \alpha_w + C_{h\delta} \cdot \delta_{ad})$

Entonces: $F_s = \dfrac{-d\delta_{ai}}{G_s d\delta_s} H_{ai} + \dfrac{d\delta_{ad}}{G_s d\delta_s} H_{ad}$

Tomamos: $\delta_a = \dfrac{\delta_{ai}+\delta_{ad}}{2}$

Si los dos alerones tienen la misma geometría $H_a = H_{ad} = H_{ai} = q S_a c_a (C_{h0} + C_{h\alpha} \alpha_w + C_{h\delta} \delta_a)$

Tomamos $C_{h0} = 0$ y las contribuciones de $\alpha_w$ se anulan en los dos alerones $\Rightarrow$ $\boxed{H_a = q S_a c_a C_{h\delta} \cdot \delta_a}$

Como $H_{ai} = -H_{ad}$ $\Rightarrow$ $F_s = -\dfrac{d\delta_{ai}}{G_s d\delta_s} H_a - \dfrac{d\delta_{ad}}{G_s d\delta_s} H_a = -\dfrac{2 d\delta_a}{G_s d\delta_s} H_a = -G_a H_a$

$G_a = \dfrac{2 d\delta_a}{G_s d\delta_s}$ $\Rightarrow$ $F_s = -G_a q S_a c_a C_{h\delta} \delta_a$

Planteamos 3 ecuaciones:

$$C_{l\delta a} \cdot \delta a + C_{l\delta r} \cdot \delta r = \frac{W y_p l_p}{q S b}$$

$$C_{n\delta a} \cdot \delta a + C_{n\delta r} \cdot \delta r = 0 \rightarrow \delta r = -\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}} \delta a \Rightarrow C_{l\delta a} \cdot \delta a - C_{l\delta r} \frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}} \delta a = \frac{W y_p l_p}{q S b}$$

$$\boxed{\delta a = \frac{W y_p l_p}{q S b} \frac{1}{C_{l\delta a} - C_{l\delta r} \frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}}} \Rightarrow \boxed{F_{s_a} = -G_a W y_p l_p \frac{S_a c_a}{S b} \frac{C_{h\delta a}}{C_{l\delta a} - C_{l\delta r} \frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}}}$$

2. RELACIÓN DE MECANISMOS ENTRE $\delta a$ Y $\delta t_r$ EN LAS CONDS. DEL APARTADO ANTERIOR

Sabemos que $\delta r = -\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}} \delta a$

$\delta t_r$ se pone para que el momento de charnela sea nulo en el timón de dirección. $\cancel{C_{hr_0}} + \cancel{C_{hr_\beta} \cdot \beta} + C_{hr_{\delta r}} \cdot \delta r + C_{hr_{\delta t_r}} \cdot \delta t_r = 0$

$$C_{hr_{\delta r}} \left(-\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\right) \delta a + C_{hr_{\delta t_r}} \delta t_r = 0 \Rightarrow \boxed{\delta t_r = \frac{C_{hr_{\delta r}}}{C_{hr_{\delta t_r}}} \cdot \frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}} \delta a}$$

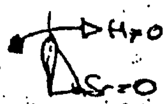
$$\text{Relación de mecanismos} = \frac{C_{hr_{\delta r}}}{C_{hr_{\delta t_r}}} \frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}};$$

$C_{n\delta a} < 0$ pq para $\delta a > 0 \Rightarrow N < 0$

$C_{n\delta r} > 0$ pq para $\delta r > 0 \Rightarrow N > 0$

$C_{hr_{\delta r}} > 0$ pq $\delta r > 0 \Rightarrow H_r > 0$

$C_{hr_{\delta t_r}} > 0$ pq $\delta t_r > 0 \Rightarrow H_r > 0$




Entonces Relac. de mecanismos $= \frac{C_{hr_{\delta r}} C_{n\delta a}}{C_{hr_{\delta t_r}} C_{n\delta r}} < 0$

Esto quiere decir que para $\delta a > 0 \Rightarrow \delta t_r < 0$

Un $\delta a > 0$ originaría un momento de guiñado $N < 0$ (guiñada adversa) y entonces necesitamos un $\delta t_r$ para compensarlo.

16

D-188

Libro 13.1

**PROBLEMA 25**

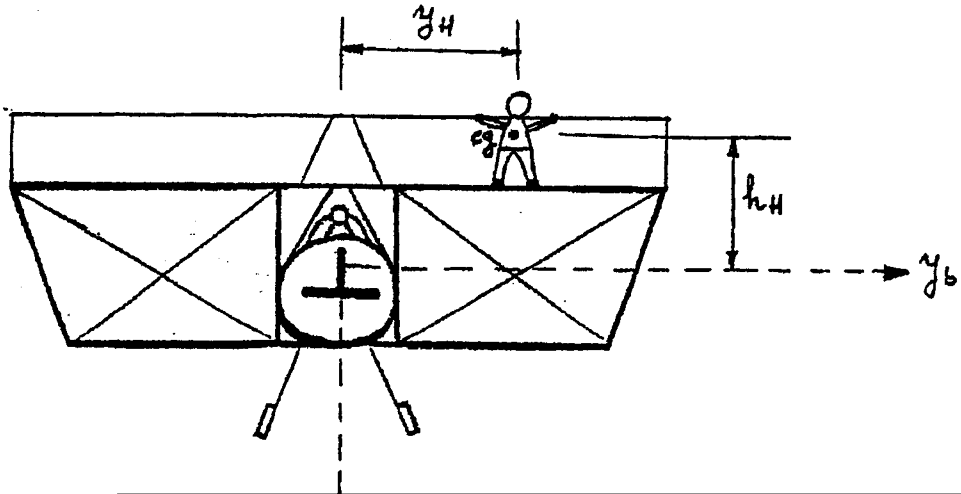
Un avión biplano pretende realizar un vuelo de exhibición horizontal, rectilíneo y uniforme con un hombre encima de su ala superior. El acróbata puede desplazarse lateralmente por encima del ala del biplano de forma que su centro de gravedad se sitúe a una distancia $y_H$ del plano de simetría del avión.

Suponiendo conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión (en concreto $C_{Y_{\delta a}} = C_{n_{\delta a}} = 0$) así como el peso del hombre, $W_H$, la distancia representada en la figura adjunta, $h_H$, la densidad atmosférica, $\rho$, y el coeficiente de resistencia del hombre, $C_{DH}$, con relación a una superficie de referencia, $S_H$, se pide:

1º) Determinar las incógnitas lateral-direccionales del problema en función de $y_H$ y de la velocidad de vuelo $V$, para las dos situaciones siguientes:
   a) Alas a nivel
   b) Resbalamiento nulo.

2º) Determinar, para las dos situaciones del apartado anterior, el máximo desplazamiento posible del acróbata, $y_{HMAX}$, suponiendo conocidas las deflexiones máximas permitidas para los alerones, $\delta_{aMAX}$, y el timón de dirección, $\delta_{rMAX}$.

**NOTA:** Considérense ángulos pequeños.



D-248

**PROBLEMA 26**

La figura esquematiza un avión en vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario a velocidad $V$ constante con su eje $y_b$ contenido en el plano vertical (vuelo a "cuchillo").

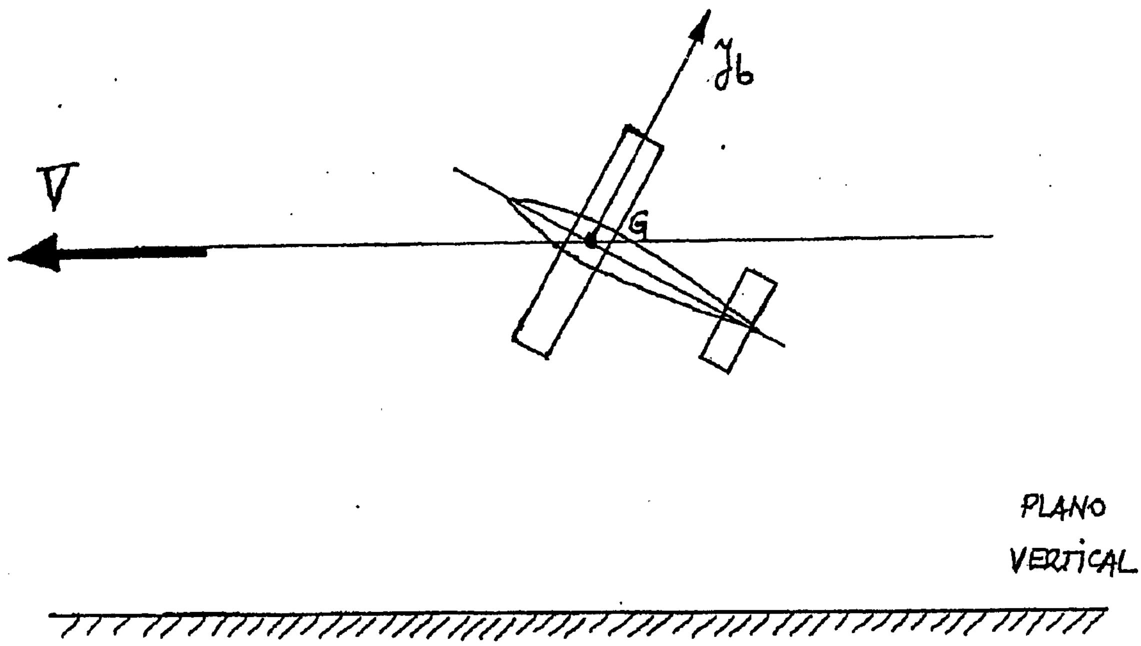
Suponiendo que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas necesarias para la resolución del problema (en concreto $C_{Y_{\delta a}} = C_{n_{\delta a}} = 0$)

b) El empuje pasa por el centro de gravedad y es paralelo al eje $x_s$.

c) Todos los ángulos son pequeños.

Se pide determinar $\delta_e, \delta_a, \delta_r, \alpha$ y $\beta$.



(17)

1) $T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\cancel{\sin\gamma} - m\cancel{\dot V} = 0$

$T\cos\varepsilon\sin\nu - Q + mg\cos\gamma\sin\mu + mV(\cancel{\dot\chi\sin\mu} - \dot\chi\cos\gamma\cos\mu) = 0$

$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma\cos\mu + mV(\dot\gamma\cos\mu + \dot\chi\cos\gamma\sin\mu) = 0$

Ecs dinámicas en ejes viento

Vuelo horizontal $\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \theta = \alpha = 0$

T según $x_s \Rightarrow \varepsilon = \alpha\ ;\ \nu = \beta$

$T - D = 0 \sim D = T$

$T\beta - Q + W\mu = 0 \sim Q = T\beta + W\mu$

$-T\alpha - L + W = 0 \rightarrow L = W - T\alpha$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0$, $\beta \ll 1$ Ejes estabilidad

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$F_{Ax} = -D + \beta Q$

$F_{Ay} = -D\beta - Q = Y$

$F_{Az} = -L$

$-W\sin\theta + F_{Tx} + F_{Ax} = 0$

$W\cos\theta\sin\phi + F_{Ty} + F_{Ay} = 0$

$W\cos\theta\cos\phi + F_{Tz} + F_{Az} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} T - D + \beta Q = 0 & L_A = 0 \\ W\phi - D\beta - Q = W\phi - Y = 0 & N_A = 0 \\ W - L = 0 & M_A = 0 \end{array}}$

2) $Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta a}\delta a + C_{Y\delta r}\delta r\right] = W\phi$ (I)

$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{l0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r\right] = 0$ (II)

$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r\right] = 0$ (III)



(I) $\longrightarrow \phi = \frac{\rho S V}{2W}\left[C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta r}\delta r\right]$ ; $\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{\rho S V^2}{2W}\left[C_{Y\beta} + C_{Y\delta r}\frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\right]$

$\ldots = \frac{2W}{\rho S V^2}$ ... $\frac{d\ldots}{d\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots S}\left[C_{Y\beta} + C_{Y\delta r}\frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\right]$

3) Si $|C_{l\delta r} C_{n\delta a}| \ll C_{n\delta r} C_{l\delta a}$ :

$$\boxed{\frac{d\delta_a}{d\beta} = \frac{C_{n\beta} C_{l\delta r} - C_{l\beta} C_{n\delta r}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r}}}$$

$$\boxed{\frac{d\delta_r}{d\beta} = \frac{C_{l\beta} C_{n\delta a} - C_{l\delta a} C_{n\beta}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r}}}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{d\beta} = \frac{1}{a_s}\left[C_{y\beta} + C_{y\delta r} \frac{C_{l\beta} C_{n\delta a} - C_{l\delta a} C_{n\beta}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r}}\right]}$$

4) DATOS $\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{C_{l\delta r}}{C_{l\beta}} = A & \dfrac{C_{n\delta a}}{C_{n\beta}} = B & \dfrac{C_{l\beta}}{C_{l\delta a}} = x \\ \dfrac{d\delta_a}{d\beta} = D_1 & \dfrac{d\delta_r}{d\beta} = D_2 & \dfrac{C_{n\beta}}{C_{n\delta r}} = y \end{array} \right.$

$$D_1 = yAx - x = x(Ay - 1) \rightarrow x = \frac{D_1}{(Ay-1)}$$

$$D_2 = xBy - y = y(Bx - 1)$$

$$D_2 = y\left(\frac{BD_1}{(Ay-1)} - 1\right) ; \quad D_2 = \frac{BD_1 y}{Ay-1} - y ; \quad AyD_2 - D_2 = BD_1 y - Ay^2 + y$$

$$Ay^2 + y(AD_2 - BD_1 - 1) - D_2 = 0$$

$$y = \frac{-AD_2 + BD_1 + 1 \pm \sqrt{(AD_2 - BD_1 - 1)^2 + 4AD_2}}{2A}$$

$$x = \frac{D_1}{\left[\frac{-AD_2 + BD_1 + 1 \pm \sqrt{(AD_2 - BD_1 - 1)^2 + 4AD_2}}{2} - 1\right]}$$

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 21.09.11
E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

### PROBLEMA 2º

Un avión simétrico se encuentra en una condición de referencia de vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con las alas a nivel y con coeficiente de sustentación $C_{LS}$ conocido. A partir de esa condición inicial de referencia y manteniendo la velocidad, se efectúan una serie de ensayos en vuelo horizontal rectilíneo estacionario con distintos ángulos de resbalamiento, para los que se registran los valores precisos de los ángulos de resbalamiento, $\beta$, y de las deflexiones de alerones, $\delta_a$, y timón de dirección, $\delta_r$.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, las características aerodinámicas se conocen en los ejes estabilidad del vuelo de referencia, $C_{Y\delta a} = 0$, etc.).
b) El empuje del grupo motopropulsor está dirigido según el eje $x_s$ y los efectos del mismo sobre el equilibrio de momentos alrededor del centro de masas del avión son despreciables.
c) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

Se pide:

1º) Plantear las ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos en ejes estabilidad.

2º) Para vuelo horizontal rectilíneo estacionario no simétrico, determinar $d\phi/d\beta$, $d\delta_a/d\beta$ y $d\delta_r/d\beta$ en función de $C_{LS}$ y de los demás parámetros del problema.

3º) Simplificar las expresiones del apartado anterior suponiendo que $|C_{l\delta r}C_{n\delta a}| << C_{n\delta r}C_{l\delta a}$.

4º) Si a partir de los ensayos en vuelo mencionados se han obtenido los valores de $d\delta_a/d\beta$ y $d\delta_r/d\beta$, utilizando las expresiones simplificadas del apartado anterior determinar los valores de las relaciones $C_{l\beta}/C_{l\delta a}$ y $C_{n\beta}/C_{n\delta r}$, supuestas conocidas las relaciones $C_{l\delta r}/C_{l\beta}$ y $C_{n\delta a}/C_{n\beta}$.

(10)

1) a) $\underline{\phi = 0}$

$$T\cancel{\cos\beta}^{1} - (D+D_H) = 0 \quad (I)$$
$$T\beta - Q = 0 \quad (II)$$
$$-L + (W+W_H) = 0 \quad (III)$$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \Rightarrow Y = -D\beta - Q$$

$$(II) \longrightarrow (D+D_H)\beta - \underbrace{Q}_{-(D+D_H)\beta - Y} = 0 \;; \quad Y = 0$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho S V^2 (\cancel{C_{y0}}^{0} + C_{y\beta}\beta + \cancel{C_{y\delta a}\delta a}^{0} + C_{y\delta r}\delta r) = 0 \rightarrow \beta = \frac{-C_{y\delta r}\delta r}{C_{y\beta}}$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 b(\cancel{C_{l0}}^{0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = -W_H \cdot y_H + D_H h_H \cancel{\operatorname{sen}\beta}^{\beta} \quad (II)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 b(\cancel{C_{n0}}^{0} + C_{n\beta}\beta + \cancel{C_{n\delta a}\delta a}^{0} + C_{n\delta r}\delta r) = -D_H \cdot y_H \cancel{\cos\beta}^{1} \quad (I)$$

$$D_H = \frac{1}{2}\rho S_H V^2 (C_{D0H} + \cancel{K C_{LH}^2}^{0})$$

$$(I) \rightarrow \cancel{\frac{1}{2}\rho} S V^2 b \left(\frac{-C_{n\beta} C_{y\delta r}}{C_{y\beta}}\delta r + C_{n\delta r}\delta r\right) = -\cancel{\frac{1}{2}\rho} S_H \cancel{V^2} C_{D0H}\, y_H$$

$$\delta_r \left[C_{n\delta r} - \frac{C_{n\beta} C_{y\delta r}}{C_{y\beta}}\right] = \frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D0H}}{b} y_H$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{\frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D0H}}{b} \cdot y_H}{C_{n\delta r} - \frac{C_{n\beta} C_{y\delta r}}{C_{y\beta}}}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{-C_{y\delta r} \frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D0H}}{b} \cdot y_H}{C_{n\delta r} C_{y\beta} - C_{n\beta} C_{y\delta r}}}$$

$$(II) \rightarrow C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r = \frac{-2W_H y_H}{\rho S V^2 b} + \frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D0H}}{b} h_H \cdot \beta$$

b) $\beta = 0$

$$T - (D + D_H) = 0$$

$$-Q + (W+W_H)\phi = 0 \rightarrow Y = -(W+W_H)\phi$$

$$-L + (W_H + W) = 0$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho S V^2 (\cancel{C_{Y0}} + \cancel{C_{Y\beta}\beta} + \cancel{C_{Y\delta a}\delta_a} + C_{Y\delta r}\delta_r) = -(W+W_H)\phi \rightarrow \phi = \frac{-C_{Y\delta r}\delta_r}{W+W_H}\cdot\frac{\rho S V^2}{2}$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 b(\cancel{C_{l0}} + \cancel{C_{l\beta}\beta} + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r) = -W_H y_H \cancel{\cos\phi} - W_H h_H \cancel{\sin}\phi \quad (I)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 b(\cancel{C_{n0}} + \cancel{C_{n\beta}\beta} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a} + C_{n\delta r}\delta_r) = -D_H y_H$$

$$D_H = \frac{1}{2}\rho S_H V^2 (C_{D0H} + \cancel{K C_{LH}^2})$$

$$\boxed{\delta_r = -\frac{S_H}{S}\cdot\frac{C_{D0H}}{b}\cdot\frac{1}{C_{n\delta r}}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{S_H C_{D0H} C_{Y\delta r}}{\cancel{S}\, b\, C_{n\delta r}}\cdot\frac{\rho \cancel{S} V^2}{2(W+W_H)}}$$

$$(I) \rightarrow \frac{1}{2}\rho S V^2 b\left[C_{l\delta a}\delta_a - \frac{S_H}{S}\cdot\frac{C_{D0H}}{b}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}\right] = -W_H y_H - W_H\cdot h_H\,\frac{S_H C_{D0H} C_{Y\delta r}}{\cancel{S}\cdot b\, C_{n\delta r}}\cdot\frac{\rho \cancel{S} V^2}{2(W+W_H)}$$

$$\delta_a\left[C_{l\delta a} - \frac{S_H}{S}\cdot\frac{C_{D0H}}{b}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}\right] = \frac{-2W_H y_H}{\rho S V^2 b} - \frac{\cancel{2} W_H h_H S_H C_{D0H} C_{Y\delta r}}{\cancel{2} b^2 S (W+W_H)}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{\dfrac{-2W_H y_H}{\rho S V^2 b} - \dfrac{W_H h_H S_H C_{D0H} C_{Y\delta r}}{b^2 S (W+W_H)}}{C_{l\delta a} - \dfrac{S_H C_{D0H} C_{l\delta r}}{S b C_{n\delta r}}}}$$

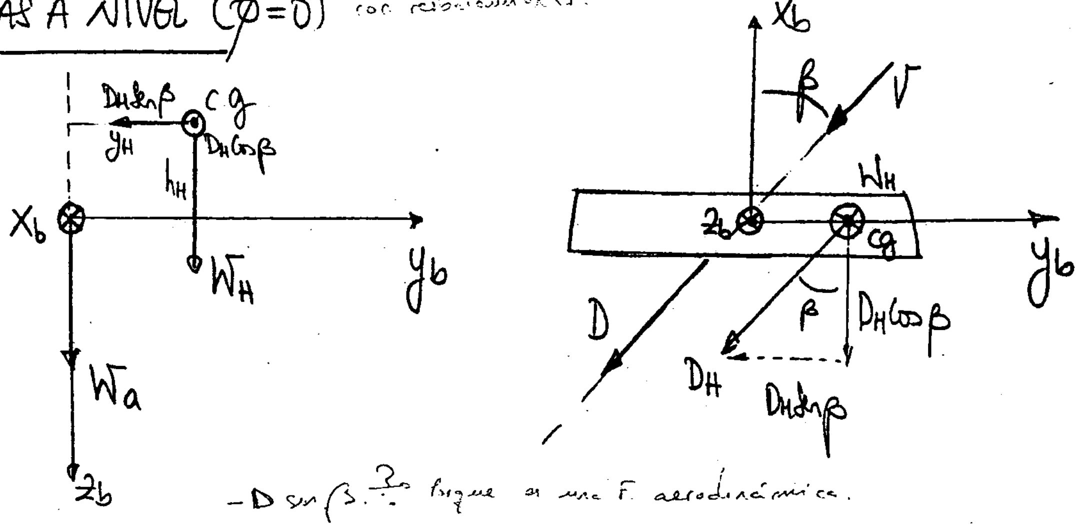
2) $\phi = 0$ :

$$(II) \rightarrow y_H = \quad C_{n\delta r} - \frac{C_{n\beta} C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}} \quad \delta$$

PROBLEMA 31 (29-1-1991) problema 25

- VUELO HORIZONTAL RECTILÍNEO Y UNIFORME
- $C_{y\delta a} = C_{n\delta a} = 0$ , Considerarse ángulos pequeños

1) a) ALAS A NIVEL ($\phi = 0$) con resbalamiento.




$-D \operatorname{sen}\beta$ ∴ Porque es una F. aerodinámica.

- $Y_{TOTAL} = Y - D_H \operatorname{sen}\beta = 0$

Sabemos que $\left| \begin{array}{l} Y = qS(\cancel{C_{y_0}} + C_{y\beta}\beta + \cancel{C_{y\delta a}\delta a} + C_{y\delta r}\delta r) \\ \quad \text{0 (Avión simétrico)} \\ D_H = qS_H C_{D_H} \; ; \; \operatorname{sen}\beta \simeq \beta \; ; \; q = \frac{1}{2}\rho V^2 \end{array} \right.$

$$qS(C_{y\beta}\beta + C_{y\delta r}\delta r) - qS_H C_{DH}\beta = 0 \qquad (1)$$

- $\mathcal{L}_{TOTAL} = \mathcal{L} + W_H \cdot y_H - D_H \operatorname{sen}\beta \cdot h_H = 0$

Sabemos que $\left| \; \mathcal{L} = qSb(\cancel{C_{l_0}} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) \right.$

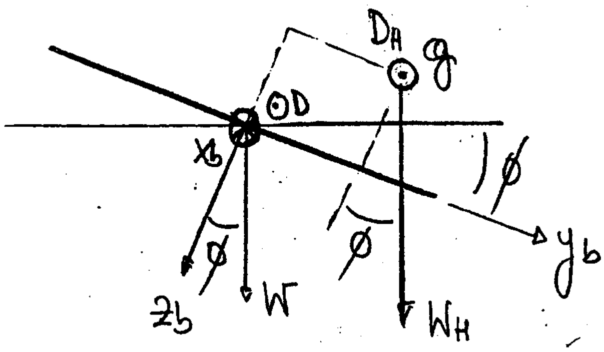
• $N_{TOTAL} = N + D_H \cos\beta \, y_H$ $\quad (\cos\beta \simeq 1)$

Sabemos que $N = qSb(\cancel{C_{n_0}} + C_{n_\beta}\beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}\delta_a} + C_{n_{\delta r}}\delta_r)$

0 (Avión simétrico)

$$qSb(C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta r}}\delta_r) + C_{D_H} S_H q y_H = 0 \quad (3)$$

b) RESBALAMIENTO NULO $(\beta = 0)$ (En principio $\phi \neq 0$)




• $Y_{TOTAL} = Y + (W + W_H)\sin\phi = qS(\cancel{C_{y_\beta}\beta} + C_{y_{\delta r}}\delta_r) + (W + W_H)\phi = 0$

• $\mathcal{L}_{TOTAL} = L + W_H \sin\phi \, h_H + W_H \cos\phi \, y_H = qSb(\cancel{C_{l_\beta}\beta} + C_{l_{\delta a}}\delta_a + C_{l_{\delta r}}\delta_r) + W_H(y_H + h_H\phi) = 0$

• $N_{TOTAL} = N + D_H y_H = qSb(\cancel{C_{n_\beta}\beta} + C_{n_{\delta r}}\delta_r) + qS_H C_{D_H} y_H = 0$

Ahora vamos a resolver el sistema de ecuaciones

$\boxed{\text{ALAS A NIVEL}}$ $(\phi = 0) \longrightarrow$ (Vamos a despreciar $C_{0H}\beta$)

(1) $\left(C_{y\beta}\beta + C_{y\delta r}\delta_r\right)S - \underbrace{S_H C_{0H}\beta}_{\text{Despreciable } (\beta \ll 1)} = 0 \longrightarrow C_{y\beta}\beta + C_{y\delta r}\delta_r = 0$ (1*)

(2) $qSb\left(C_{\ell\beta}\beta + C_{\ell\delta a}\delta_a + C_{\ell\delta r}\delta_r\right) + W_H y_H - q\cancel{S_H C_{0H}\beta}\, h_H = 0$ (2*)

($C_{0H}\beta$ Despreciable)

(3) $Sb\left(C_{n\beta}\beta + C_{n\delta r}\delta_r\right) + C_{0H}S_H y_H = 0$ (3*)

De (1*) $\longrightarrow$ $\delta_r = -\dfrac{C_{y\beta}\beta}{C_{y\delta r}}$ (1**)

Sustituyendo en (3*) queda: $SbC_{n\beta}\beta + SbC_{n\delta r}\left(-\dfrac{C_{y\beta}\beta}{C_{y\delta r}}\right) + C_{0H}S_H y_H = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\beta = -\dfrac{\dfrac{S_H}{S} C_{0H} \dfrac{y_H}{b}}{C_{n\beta} - \dfrac{C_{y\beta}}{C_{y\delta r}} C_{n\delta r}}}$$

Si sustituimos $\beta$ en (1**) $\longrightarrow$ $\boxed{\delta_r = \dfrac{\dfrac{S_H}{S} C_{0H} \dfrac{y_H}{b}}{\dfrac{C_{y\delta r}}{C_{y\beta}} C_{n\beta} - C_{n\delta r}}}$

Con $\beta$ y $\delta_r$ en (2*)

## RESBALAMIENTO NULO ($\beta=0$)

$$qSC_{y\delta r}\delta_r + (W+W_H)\phi = 0 \quad (1)$$

$$qSb\,(C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r) + W_H\,(y_H + h_H\phi) = 0 \quad (2)$$

$$Sb\,C_{n\delta r}\delta_r + S_H\,C_{DH}\,y_H = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (3) $\longrightarrow$ $\boxed{\delta_r = -\frac{S_H}{S}\frac{y_H}{b}\frac{C_{DH}}{C_{n\delta r}}}$

Sustituyendo $\delta_r$ en (1) $\longrightarrow$ $\boxed{\phi = +\frac{q\,S_H\,y_H\,C_{DH}}{(W+W_H)\,b\,C_{n\delta r}}C_{y\delta r}}$

Con $\delta_r$ y $\phi$ en la ecuación (2)

$$\delta_a = -\frac{W_H(y_H+h_H\phi)}{qSb\,C_{l\delta a}} - \frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta_r$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{S_H}{S}\frac{y_H}{b}\frac{C_{DH}\,C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}\,C_{l\delta a}} - \frac{W_H}{qSb\,C_{l\delta a}}\left(y_H + h_H\frac{q\,S_H\,y_H\,C_{DH}}{(W+W_H)\,b\,C_{n\delta r}}C_{y\delta r}\right)}$$

## 2) ALAS A NIVEL

Con $\delta_{r_{MAX}} = \frac{\frac{S_H}{S}C_{DH}\frac{y_H}{b}}{C_{y\delta r}\ [\text{illegible}]}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\left(\frac{y_H}{b}\right)_{MAX} = \frac{S}{S_H}\frac{1}{C_{DH}}\left(\frac{C_{y\delta r}}{C_{y\beta}}C_{n\beta} - C_{n\delta r}\right)\delta_{r_{MAX}}}$

# PROBLEMA 25

Un avión biplano pretende realizar un vuelo de exhibición horizontal, rectilíneo y uniforme con un hombre encima de su ala superior.

* Se suponen conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas (en concreto, $C_{Y\delta a} = C_{n\delta a} = 0$).

* Se suponen conocidas $W_H$, $h_H$, $\rho$, $C_{DH}$, $S_H$.

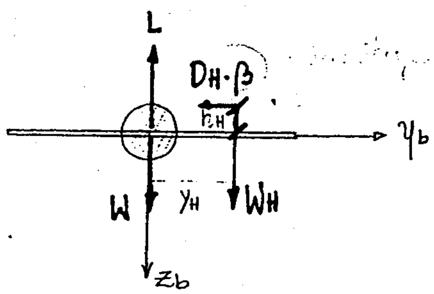
Se pide:

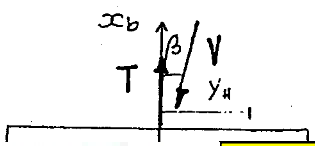
1º) Determinar las incógnitas lateral-direccionales del problema en función de $y_H$, para las dos situaciones siguientes:

$\phi$ = ángulo de balance

a) Alas a nivel.

Alas a nivel $\Rightarrow \phi = 0$ (suponemos $\beta > 0$, $\beta \ll 1$)



Las ecuaciones de equilibrio son:

Fuerza lateral

$$\sum Y = 0 \quad qS\{\underbrace{\cancel{C_{Y_0}} + C_{Y\beta}\cdot\beta + C_{Y\delta a}\cdot\delta a + C_{Y\delta r}\cdot\delta r}_{C_Y = \text{coef. fuerza lateral}}\} - D_H\cdot\beta = 0$$

0    0 Dato

es una suma de fuerzas según $Oy_b$.

Momento de balance

$$\sum \mathcal{L} = 0 \quad qSb\{\underbrace{\cancel{C_{l_0}} + C_{l\beta}\cdot\beta + C_{l\delta a}\cdot\delta a + C_{l\delta r}\cdot\delta r}_{C_l \leftarrow \text{coef. mom. balance}}\} - D_H\beta h_H + W_H\cdot y_H = 0$$

!! 0

Es un eq. de momentos alrededor de $Ox_b$.

(+) av. visto desde atrás

Momento de guiñada

av. visto desde arriba

$q S_H y_h C_{D_H}$

$$\sum \mathcal{N} = 0 \quad qSb\{\underbrace{\cancel{C_{n_0}} + C_{n\beta}\cdot\beta + \cancel{C_{n\delta a}}\cdot\delta a + C_{n\delta r}\cdot\delta r}_{C_n \leftarrow \text{coef. mom. guiñada}}\} + D_H\cdot y_H = 0$$

!! 0 Dato

Incógn: $\beta, \delta a, \delta r$

Suponemos avión simétrico respecto a $Oxz \Rightarrow C_{Y_0} = C_{l_0} = C_{n_0} = 0$

$$qS\{C_{Y\beta}\cdot\beta + C_{Y\delta r}\cdot\delta r\} - D_H\cdot\beta = 0 \qquad (1)$$

$$qSb\{C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\cdot\delta r\} - D_H\beta h_H + W_H\cdot y_H = 0 \qquad (2)$$

$$qSb\{C_{n\beta}\beta + C_{n\delta r}\cdot\delta r\} + D_H y_H = 0 \qquad (3)$$

!! $\rightarrow$ $D_H = \frac{1}{2}\rho S_H V^2 C_{D_H}$ (4)

Buscamos $\beta = \beta(y_H, V)$ ; $\delta a = \delta a(y_H, V)$ ; $\delta r = \delta r(y_H, V)$.

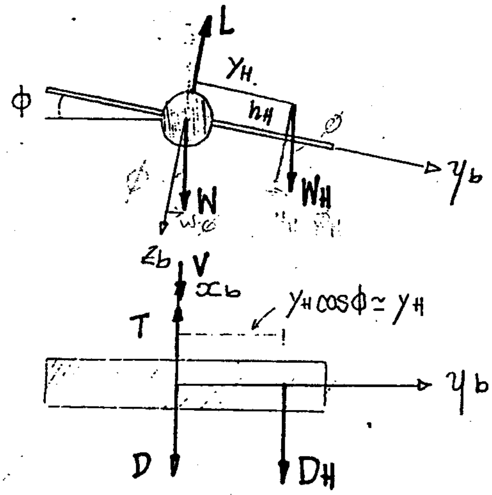
# Cont. PROBLEMA 25

$$\delta_r = \frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{C_{DH}}{C_{y\delta r}}\cdot\frac{\left\{C_{y\beta} - \frac{S_H}{S}C_{DH}\right\}}{\left\{C_{n\beta} - \frac{C_{n\delta r}}{C_{y\delta r}}\left(C_{y\beta} - \frac{S_H}{S}C_{DH}\right)\right\}}$$

$$\delta_a = \frac{S_H}{S}\cdot\frac{h_H}{b}\cdot\frac{C_{DH}}{C_{l\delta a}} - \frac{W_H}{qS}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{1}{C_{l\delta a}} - \frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta a}}\beta - \frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta_r$$

## b) Resbalamiento nulo

Resbalamiento nulo $\Longrightarrow \beta = 0$ (suponemos $\phi > 0$, $\phi \ll 1$).




¡Ahora el propio peso del avión va a producir un momento!!

Las ecuaciones de equilibrio son:

Fuerza lateral:

Momento de guiñada:

$$qSb\left\{ C_{n\beta}\cdot\cancel{\beta}^{\,0} + C_{n\delta r}\cdot\delta r \right\} + qS_H C_{DH}\, y_H = 0 \qquad (3)$$

Obtenemos:

$$\boxed{\delta r = -\frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{C_{DH}}{C_{n\delta r}}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{qS}{(W+W_H)}\, C_{DH}\,\frac{C_{y\delta r}}{C_{n\delta r}}}$$

$$\boxed{\delta a = \frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\cdot\frac{C_{DH}}{C_{n\delta r}} - \frac{W}{qS}\,\frac{(y_H+\phi h_H)}{b}\cdot\frac{1}{C_{l\delta a}}}$$

**2º) Determinar, para las dos situaciones del apartado anterior, el máximo desplazamiento posible del acróbata, $y_{H\,máx}$, suponiendo conocidas las deflexiones máximas permitidas para los alerones, $\delta a_{máx}$, y el timón de dirección, $\delta r_{máx}$.**

a) Alas a nivel

Si se desprecian los $\beta$, $\beta = -\frac{C_{y\delta r}}{C_{y\beta}}\,\delta r$

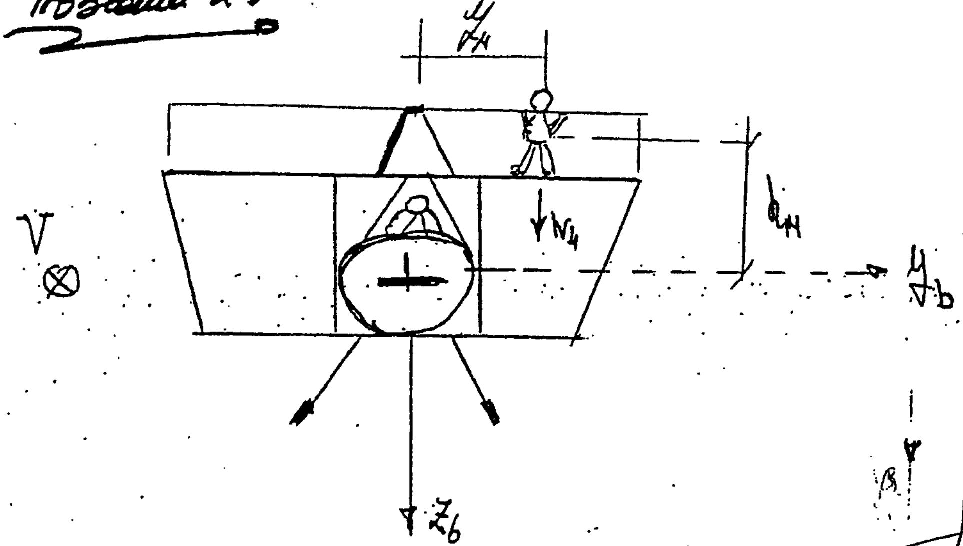
a) Suponemos $\delta_a < 0$, $\delta_r < 0$, $y_H > 0$ por [illegible]

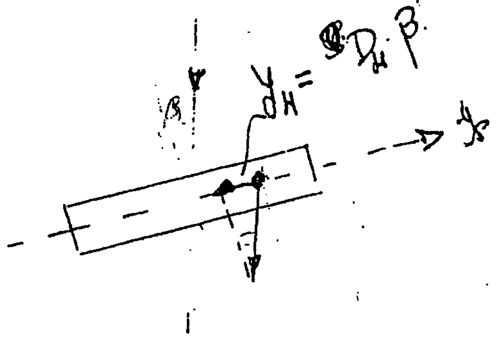
$\delta_{a\,máx} = k_1\,$ [illegible] $\quad (\delta_{a\,mín} = -\delta_{a\,máx})$

$\delta_{r\,máx} = k_2\,$ [illegible]

$\delta r_{mín}$ $\quad y_H$

## Problema 25




a) 1) Alas a nivel

$$\Sigma M_{x_s} = 0 \Rightarrow \mathcal{L} + W_H \cdot y_H = 0 \Rightarrow C_l = \frac{-W_H\, y_H}{q\, S\, b}$$

$$* \quad C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_{\delta_a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \cdot \delta_r = -\frac{W_H \cdot y_H}{q S b}$$

$$\Sigma M_{z_s} = 0 \Rightarrow N + D_H \cdot y_H = 0. \qquad D_H = \frac{1}{2}\rho V^2 S_H \cdot C_{D_H} = q\, S_H\, C_{D_H}$$

$$* \quad C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_{\delta_r}} \delta_r = -\frac{S_H}{S} \cdot C_{D_H} \frac{y_H}{b}$$

$$* \quad C_{y} = C_{y_\beta} \cdot \beta + C_{y_{\delta_r}} \cdot \delta_r = \frac{S_H}{S} \cdot C_{D_H} \beta \simeq 0 \qquad \delta_r = \left(- \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}} \cdot \beta + \frac{S_H}{S} C_{D_H}\right) \beta$$

$$\beta\left\{C_{n_\beta} - C_{n_{\delta_r}} \cdot \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}}\right\} = -\frac{S_H}{S} C_{D_H} \cdot \frac{y_H}{b}$$

$$\boxed{\beta = \frac{S_H/S \cdot C_{D_H} \cdot 1/b \cdot y_H}{C_{n_{\delta_r}} \cdot \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}} - C_{n_\beta}}}$$

$$\boxed{\delta_r = -\frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}} \cdot \frac{S_H/S \cdot C_{D_H} \cdot 1/b \cdot y_H}{C_{n_{\delta_r}} \cdot \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}} - C_{n_\beta}}}$$

$$\boxed{\delta_a = -\frac{W_H\, y_H}{q S b \cdot C_{l_{\delta_a}}} - \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{l_{\delta_a}}} \cdot \delta_r - \frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta_a}}} \cdot \beta}$$

d) <u>Resbalamiento nulo</u>

$$C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r = -\frac{W_H \cdot y_H}{q S b} \Rightarrow \delta_a = \left(-\frac{W_H}{q S b\, C_{l_{\delta_a}}} + \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_r}}} \frac{S_H}{S} C_{D_H}\right) y_H$$

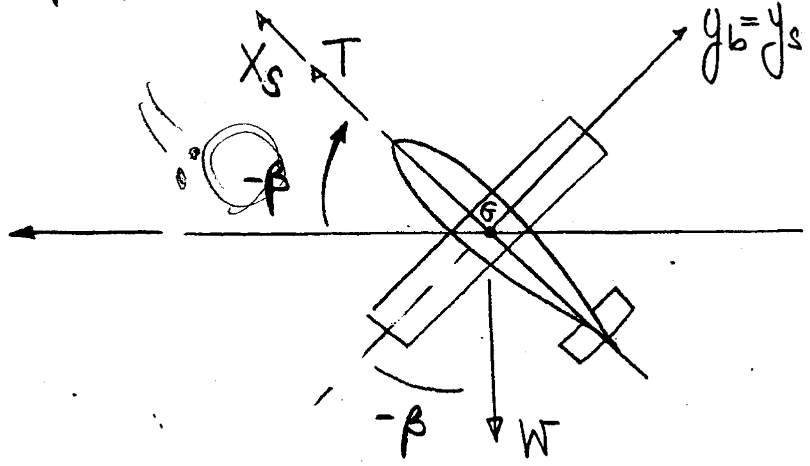
$C_{n_{\delta_r}} \delta_r = \frac{S_H}{S} C_{D_H} \frac{y_H}{b}$ ... $S$ $C$ $y_H$

II

# PROBLEMA 32 (29-1-1991)

problema 26

(Tomando $\beta > 0$)




- $C_{y\delta_a} = C_{n\delta_a} = 0$
- Ángulos pequeños

- $Y_{TOTAL} = Y - W\cos(-\beta) = Y - W\cos\beta = qS(C_{y\beta}\beta + C_{y\delta_r}\delta_r) - \underbrace{W\cos\beta}_{\simeq W} = 0$

Sabemos que $Y = qS(\cancel{C_{y_0}} + C_{y\beta}\beta + \cancel{C_{y\delta_a}}\delta_a + C_{y\delta_r}\delta_r)$ (1)

0 (Avión simétrico)

- $\mathcal{L}_{TOTAL} = \mathcal{L} = qSb(\cancel{C_{l_0}} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r) = qSb(C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r) = 0$

0 (Avión simétrico) (2)

- $N_{TOTAL} = N = qSb(\cancel{C_{n_0}} + C_{n\beta}\beta + \cancel{C_{n\delta_a}}\delta_a + C_{n\delta_r}\delta_r) = qSb(C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_r}\delta_r) = 0$

0 (Avión simétrico) (3)

- $L = 0 \longrightarrow C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + \cancel{C_{L\delta_e}} = 0$ (4)

Con $\alpha_{wb}$ en (5) : $\boxed{\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\left(-\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}\right) = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$

De (3) : $C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_r}\delta_r = 0 \rightarrow \beta = -\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\delta_r$ (3*)

Sustituyendo en (1) $\left(C_{y\beta}\left(-\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\delta_r\right) + C_{y\delta_r}\delta_r\right)qS - W = 0$

$$\delta_r\left(C_{y\delta_r} - C_{y\beta}\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\right) = \frac{W}{qS} \rightarrow \boxed{\delta_r = \frac{W}{qS}\cdot\frac{1}{\left(C_{y\delta_r} - C_{y\beta}\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\right)}}$$

Sustituyendo $\delta_r$ en (3*) :

$$\longrightarrow \boxed{\beta = -\frac{W}{qS}\frac{C_{n\delta_r}}{(C_{y\delta_r}C_{n\beta} - C_{y\beta}C_{n\delta_r})}}$$

Si ahora introducimos $\beta$ y $\delta_r$ en la ecuación (2)

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}}\left(C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_r}\delta_r\right)$$

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}}\cdot\frac{W}{qS}\left(\frac{C_{l\delta_r}}{\left(C_{y\delta_r} - C_{y\beta}\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\right)} - \frac{C_{l\beta}C_{n\delta_r}}{(C_{y\delta_r}C_{n\beta} - C_{y\beta}C_{n\delta_r})}\right)$$

(11)

1) $T\cos\varepsilon\cos\beta - D - W\sin\gamma = 0$ ; $T = D$

$T\cos\varepsilon\sin\beta - Q + W\cos\gamma\sin\mu = 0$ ; $T\beta - Q + W = 0$

$-T\sin\varepsilon - L + W\cos\gamma\cos\mu = 0 \rightarrow L = 0$

$$\begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ F_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{AX} \\ Y \\ F_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_{AX} = -D + \beta Q \\ Y = -D\beta - Q \\ F_{AZ} = -L \end{cases}$$

$-W\sin\theta + F_{TX} + F_{AX} = 0 \rightarrow T - D + \beta Q = 0$

$W\cos\theta\sin\phi + F_{TY} + F_{AY} = 0 \rightarrow W - D\beta - Q = 0$ ; $-W = Y$

$W\cos\theta\cos\phi + F_{TZ} + F_{AZ} = 0 \rightarrow L = 0$

$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta a}\delta_a + C_{Y\delta r}\delta_r) = -W$ (I)

$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{l0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r) = 0 \rightarrow \delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[C_{l\beta}\beta + C_{l\delta r}\delta_r\right]$

$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta_a + C_{n\delta r}\delta_r) = 0 \rightarrow \beta = -\frac{C_{n\delta r}}{C_{n\beta}}\delta_r$

(I) $\rightarrow C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta r}\delta_r = \frac{-2W}{\rho S V^2}$ ; $-\frac{C_{n\delta r}C_{Y\beta}}{C_{n\beta}}\delta_r + C_{Y\delta r}\delta_r = -\frac{2W}{\rho S V^2}$

$$\boxed{\delta_r = \frac{-2W}{\rho S V^2\left(C_{Y\delta r} - \frac{C_{n\delta r}C_{Y\beta}}{C_{n\beta}}\right)}}$$



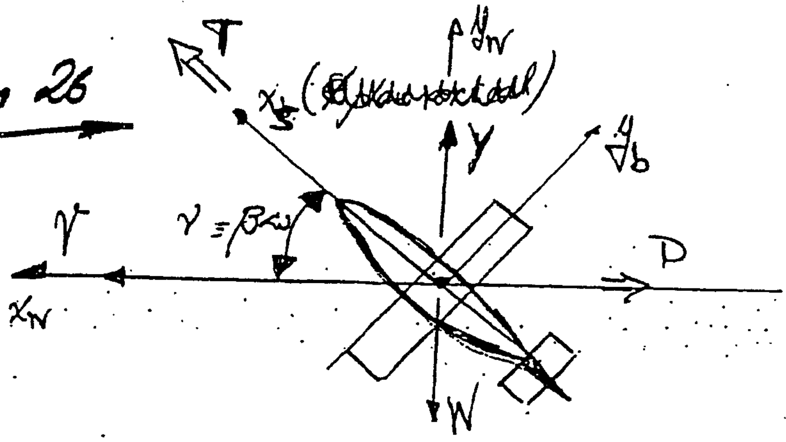
$$\boxed{\delta_a = \frac{-2W}{\rho S V^2 C_{l\delta a}}\left[\frac{C_{n\delta r}C_{l\beta} - C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{Y\delta r}C_{n\beta} - C_{n\delta r}C_{Y\beta}}\right]}$$

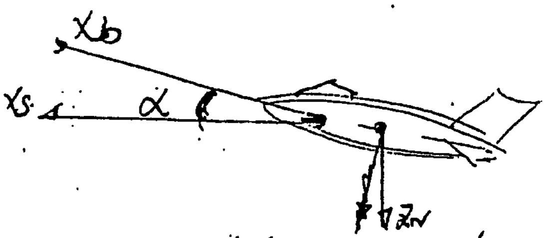
$$C_L = 0 = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$$

$$C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\cdot\delta e = 0$$

$$\boxed{\delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} - C_{m\alpha}\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}\right]}$$

Problema 26




Ecuaciones del movimiento.

$$\begin{cases} T\cos\beta - D = 0. \Rightarrow T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + k C_L^2) \\ T\sin\beta + Y - W = 0. \quad Y = W - T\beta \\ L = 0 \Rightarrow C_L = 0 \quad C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_\delta}\cdot\delta_e = 0. \end{cases}$$

xq aquí no metemos D

$$\alpha = -\frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} - \frac{C_{L_\delta}}{C_{L_\alpha}}\delta_e = \alpha_0 - \frac{C_{L_\delta}}{C_{L_\alpha}}\delta_e$$

{Volaremos según la L.N.S. del avión.}

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow C_{m_{cg}} = 0 \Rightarrow C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_\delta}\cdot\delta_e = 0.$$

$$\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m_\delta}} - \frac{C_{m_\alpha}}{C_{m_\delta}}\left\{\alpha_0 - \frac{C_{L_\delta}}{C_{L_\alpha}}\cdot\delta_e\right\}$$



$C_{m_\delta} C_{L_\alpha} - C_{m_\alpha} C_{L_\delta}$ | $C_{m_\delta} C_{L_\alpha} - C_{m_\alpha} C_{L}$

$\Sigma \mathcal{L} = 0$

$$C_l = \cancel{C_{l_0}}^{\,0} + C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_{\delta_r}} \delta_r + C_{l_{\delta_a}} \cdot \delta_a = 0. \qquad (1)$$

$\Sigma N = 0$

$$C_n = C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_{\delta_r}} \cdot \delta_r + C_{n_{\delta_a}} \cdot \delta_a = 0. \qquad (2)$$

$$C_y = C_{y_\beta} \beta + C_{y_{\delta_r}} \cdot \delta_r \qquad (C_{y_{\delta_a}} \simeq 0)$$

$$Y = W - D \cdot \beta \Rightarrow C_y = \frac{W}{qS'} - C_{D_0} \cdot \beta = C_{y_\beta} \cdot \beta + C_{y_{\delta_r}} \cdot \delta_r \qquad (3)$$

3 ecuaciones con 3 incognitas $(\delta_a, \delta_r, \beta)$

$$(3) \quad C_{y_{\delta_r}} \cdot \delta_r + (C_{y_\beta} + C_{D_0})\beta = \frac{W}{qS'} \Rightarrow \boxed{\delta_r = \frac{W}{qS' C_{y_{\delta_r}}} - \left(\frac{C_{y_\beta} + C_{D_0}}{C_{y_{\delta_r}}}\right)\beta}$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{\delta_a = -\frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta_a}}} \beta - \frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_a}}} \left\{ \frac{W}{qS' C_{y_{\delta_r}}} - \frac{C_{y_\beta} + C_{D_0}}{C_{y_{\delta_r}}} \beta \right\}}$$

$$(1) \quad \beta \left\{ C_{l_\beta} - C_{l_{\delta_r}} \cdot \frac{C_{y_\beta} + C_{D_0}}{C_{y_{\delta_r}}} - C_{l_{\delta_a}} \left( \frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta_a}}} - \frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_a}}} \frac{C_{y_\beta} + C_{D_0}}{C_{y_{\delta_r}}} \right) \right\} =$$

$$= -C_{l_{\delta_r}} \frac{W}{qS' C_{y_{\delta_r}}} + C_{l_{\delta_a}} \cdot \frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_a}}} \frac{W}{qS' C_{y_{\delta_r}}}$$



$$C_{l_\beta} - C_{l_{\delta_r}} \cdot \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}} - C_{l_{\delta_a}} \left( \frac{\ldots}{C_{n_{\delta_a}}} - \frac{\ldots}{C_{n_{\delta_a}}} \frac{\ldots}{C_{y_{\delta_r}}} \right)$$

$$C_l = \frac{-mg\,b/4\,(t)}{qSb} = C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\cdot\delta_r$$

$$C_n = -\frac{mV_0\,b/4}{qSb} = C_{n\delta_r}\cdot\delta_r + C_{n\delta_a}\delta_a$$

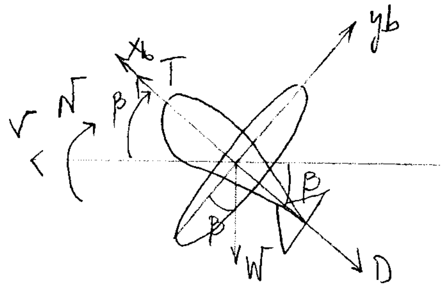
$$\boxed{\delta_r(t) = -\frac{mV_0\,b/4}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b\, C_{n\delta_r}} - \frac{C_{n\delta_a}}{C_{n\delta_r}}\delta_a}$$

$$\delta_a(t) = \frac{C_{l\delta_r}}{C_{n\delta_r}}\cdot\frac{mV_0/4}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} - \frac{1}{C_{l\delta_a}}\cdot\frac{mg/4}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\,t$$

$$\boxed{\delta_a(t) = \frac{m}{4qS}\left\{V_0\frac{C_{l\delta_r}}{C_{n\delta_r}} - \frac{g}{C_{l\delta_a}}\,t\right\}}$$

$$\delta_r = \frac{m}{4qS}\cdot\frac{-g\,C_{n\delta_a}t + V_0\,C_{l\delta_a}}{C_{l\delta_r}C_{n\delta_a} - C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}} \qquad t_{max} = \frac{M/2}{m}$$

(11)




$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + \cancel{C_{L\delta e}\delta_e}^{\,0} = 0 \rightsquigarrow \boxed{\alpha_{wb} = \frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{wb} + C_{m\delta e}\,\delta e = 0 \rightsquigarrow \boxed{\delta e = -\frac{1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}C_{L0}\right]}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{\,0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r\right) = 0 \rightsquigarrow \delta a = -\frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta a}}\beta - \frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta r$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{\,0} + C_{n\beta}\beta + \cancel{C_{n\delta a}\delta a}^{\,0} + C_{n\delta r}\delta r\right) = 0 \longrightarrow \beta = -\frac{C_{n\delta r}}{C_{n\beta}}\delta r$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{\,0} + C_{y\beta}\beta + \cancel{C_{y\delta a}\delta a}^{\,0} + C_{y\delta r}\delta r\right) - \cancel{W\cos\beta}^{\,\simeq W} = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(-\frac{C_{n\delta r}}{C_{n\beta}}C_{y\beta}\delta r + C_{y\delta r}\delta r\right) = W;\quad \delta r\left[\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{y\delta r} - \frac{C_{n\delta r}}{C_{n\beta}}C_{y\beta}\right)\right] = W$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{2W}{\rho S V^2\left(C_{y\delta r} - \frac{C_{n\delta r}}{C_{n\beta}}C_{y\beta}\right)}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{-2W}{\rho S V^2\left(C_{y\delta r}C_{n\beta} - C_{n\delta r}C_{y\beta}\right)}\cdot C_{n\delta r}}$$

$$\boxed{\delta a = \frac{2W}{\rho S V^2}\left[\frac{C_{n\delta r}}{\left(C_{y\delta r}C_{n\beta} - C_{n\delta r}C_{y\beta}\right)}\cdot\frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta a}} - \frac{1}{\left(C_{y\delta r} - \frac{C_{n\delta r}}{C_{n\beta}}C_{y\beta}\right)}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\right]}$$

12

lateral direccional.

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

CÁTEDRA DE MECÁNICA DEL VUELO 27.06.02

E. Final Junio

## PROBLEMA 3º

442

En la definición de la Velocidad Mínima de Control Direccional, $V_{MC}$, las Normas FAR-25 establecen en su sección 25.149 que es la velocidad mínima a la que, cuando el motor crítico se hace inoperativo, es posible controlar el avión y continuar el vuelo rectilíneo estacionario con un ángulo de balance, $\phi$, no superior a 5º.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, $C_{n\delta a} = C_{Y\delta a} = 0$).

b) Los momentos de guiñada, $N_T$, y de balance, $L_T$, alrededor del centro de masas del avión, producidos cuando el motor crítico se hace inoperativo, son constantes conocidas.

c) La limitación de $V_{MC}$ siempre se produce por deflexión máxima del timón de dirección ($\delta_r = \delta_{r\,max}$).

d) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños y $\rho$ es una constante conocida.

Se pide:

1º) Determinar $\phi_1$, $V_{MC1}$ y la deflexión de alerones, $\delta_{a1}$, para el caso de ángulo de resbalamiento, $\beta$, nulo (supóngase que se cumple $\phi_1 < 5º$).

2º) Determinar $\beta_2$, $V_{MC2}$ y $\delta_{a2}$, para el caso de $\phi = 0º$.

3º) Determinar $\beta_3$, $V_{MC3}$ y $\delta_{a3}$, para el caso de $\phi = 5º$.

4º) Ordenar de mayor a menor, si ello es posible, las tres velocidades $V_{MC1}$, $V_{MC2}$ y $V_{MC3}$. Explicar de forma razonada cuál elegiría como $V_{MC}$ para la certificación del avión.

(12)

1)

$\cancel{T\cos\varepsilon\cos\nu} - D - \cancel{W\sin\gamma} = 0$ ; $T = D$

$\cancel{T\cos\varepsilon\sin\nu} - Q + W\sin\mu\cos\gamma = 0$ ; $-Q + W\phi = 0$ $\qquad Y = -\cancel{D\beta} - Q$ ; $Y = -Q$

$-\cancel{T\sin\varepsilon} - L + W\cos\mu\cos\gamma = 0$ ; $-L + W = 0$

$Y = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_y = \frac{1}{2}\rho V_{MC_1}^2 S\,(\cancel{C_{y0}} + \cancel{C_{y\beta}\beta} + \cancel{C_{y\delta a}\delta_a} + C_{y\delta r}\delta_{r_{MAX}}) = -W\phi_1$

$L_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_l = \frac{1}{2}\rho V_{MC_1}^2 S\,(\cancel{C_{l0}} + \cancel{C_{l\beta}\beta} + C_{l\delta a}\delta_{a_1} + C_{l\delta r}\delta_{r_{MAX}}) = +L_T \rightarrow \delta_{a_1} = \frac{+2L_T}{\rho S V_{MC_1}^2 C_{l\delta a}} \cdot C_{l\delta r}\delta_{r_{MAX}}$

$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n = \frac{1}{2}\rho V_{MC_1}^2 S\,(\cancel{C_{n0}} + \cancel{C_{n\beta}\beta} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_{a_1}} + C_{n\delta r}\delta_{r_{MAX}}) = +N_T$

$$\boxed{V_{MC_1} = \sqrt{\frac{+2N_T}{\rho S C_{n\delta r}}\cdot\frac{1}{\delta_{r_{MAX}}}}}$$

$$\delta_{a_1} = \frac{2L_T}{\rho S\,\frac{2N_T}{\rho S C_{n\delta r}}\cdot\frac{1}{\delta_{r_{MAX}}}}\cdot\frac{1}{C_{l\delta a}} - \frac{C_{l\delta r}\delta_{r_{MAX}}}{C_{l\delta a}} = \boxed{\frac{\delta_{r_{MAX}}}{C_{l\delta a}}\left[C_{n\delta r}\frac{L_T}{N_T} - C_{l\delta r}\right]}$$

$$\phi_1 = \frac{-\rho S}{2W}\,\frac{2N_T}{\rho S C_{n\delta r}}\,\frac{1}{\delta_{r_{MAX}}}\cdot C_{y\delta r}\,\delta_{r_{MAX}} = \boxed{\frac{-N_T}{W}\,\frac{C_{y\delta r}}{C_{n\delta r}}}$$

2)

$T = D$

$T\beta - Q + W\phi = 0$ ; $Y = -D\beta - Q \rightarrow Y = -W\phi = 0$

$-L + W = 0$

$Y = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_y = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_2}^2\cdot(\cancel{C_{y0}} + C_{y\beta}\beta_2 + \cancel{C_{y\delta a}\delta_{a_2}} + C_{y\delta r}\delta_{r_{MAX}}) = 0 \rightarrow \boxed{\beta_2 = -\frac{C_{y\delta r}}{C_{y\beta}}\delta_{r_{MAX}}}$

$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_2}^2\cdot(\cancel{C_{l0}} + C_{l\beta}\beta_2 + C_{l\delta a}\delta_{a_2} + C_{l\delta r}\delta_{r_{MAX}}) = L_T$



$$\delta_{a_2} = \frac{2L_T}{\rho S\ \ldots}\cdot\frac{1}{C_{l\delta a}} - \frac{C_{l\delta r}\delta_{r_{MAX}}}{C_{l\delta a}} \ldots = \frac{\delta_{r_{MAX}}}{C_{l\delta a}}\left[\ldots C_{l\delta r}\right]$$

3)

$$Y = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_3}^2 \left(\cancel{C_{y_0}}^{0} + C_{y\beta}\beta_3 + \cancel{C_{y\delta a}\delta a_3}^{0} + C_{y\delta r}\delta r_{MAX}\right) = -W\phi_3 \quad (I)$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_3}^2 \left(\cancel{C_{l_0}}^{0} + C_{l\beta}\beta_3 + C_{l\delta a}\delta a_3 + C_{l\delta r}\delta r_{MAX}\right) = L_T$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_3}^2 \left(\cancel{C_{n_0}}^{0} + C_{n\beta}\beta_3 + \cancel{C_{n\delta a}\delta a_3}^{0} + C_{n\delta r}\delta r_{MAX}\right) = N_T \quad (II)$$

$$\frac{(I)}{(II)} \longrightarrow \frac{C_{y\beta}\beta_3 + C_{y\delta r}\delta r_{MAX}}{C_{n\beta}\beta_3 + C_{n\delta r}\delta r_{MAX}} = \frac{-W\phi_3}{N_T} \; ; \quad N_T\left(C_{y\beta}\beta_3 + C_{y\delta r}\delta r_{MAX}\right) = -W\phi_3\left(C_{n\beta}\beta_3 + C_{n\delta r}\delta r_{MAX}\right)$$

$$\beta_3\left[N_T C_{y\beta} + W\phi_3 C_{n\beta}\right] = \delta r_{MAX}\left[-N_T C_{y\delta r} - W\phi_3 C_{n\delta r}\right]$$

$$\boxed{\beta_3 = \delta r_{MAX}\cdot\frac{-W\phi_3 C_{n\delta r} - N_T C_{y\delta r}}{W\phi_3 C_{n\beta} - N_T C_{y\beta}}}$$

$$\boxed{V_{MC_3} = \sqrt{\frac{2N_T}{\rho S\left(C_{n\beta}\beta_3 + C_{n\delta r}\delta r_{MAX}\right)}}}$$

$$\delta a_3 = \frac{2L_T}{\rho S V_{MC_3}^2 C_{l\delta a}} - \frac{C_{l\delta r}\delta r_{MAX}}{C_{l\delta a}} = \frac{2L_T}{\rho S \frac{2N_T}{\rho S\left(C_{n\beta}\beta_3 + C_{n\delta r}\delta r_{MAX}\right)}}\cdot\frac{1}{C_{l\delta a}} - \frac{C_{l\delta r}\delta r_{MAX}}{C_{l\delta a}} = \frac{1}{C_{l\delta a}}\left[\frac{L_T}{N_T}\left(C_{n\beta}\beta_3 + C_{n\delta r}\delta r_{MAX}\right) - C_{l\delta r}\ldots\right.$$

4)

$$\boxed{V_{MC_2} > V_{MC_1} > V_{MC_3}}$$

Elegiría $V_{MC_3}$ ya que se corresponde con el caso más crítico $\phi = 5°$

VMC ≡ Velocidad mínima de control para $\phi \leq 5°$

**PROBLEMA** $\boxed{3^{\circ}\text{ Ex - Junio 02}}$

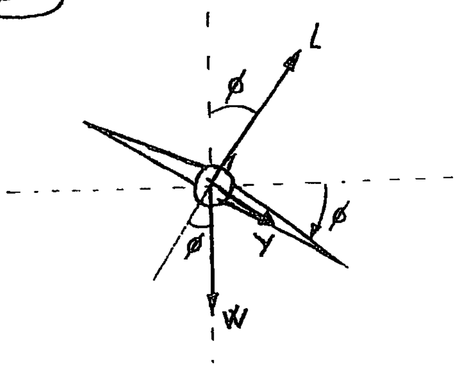
En la definición de la Velocidad Mínima de Control Direccional, $V_{MC}$, las Normas FAR-25 establecen en su sección 25.149 que es la velocidad mínima a la que, cuando el motor crítico se hace inoperativo, es posible controlar el avión y continuar el vuelo rectilíneo estacionario con un ángulo de balance, $\phi$, no superior a 5°.

Se pide:

1º) Determinar $\phi_1$, $V_{MC_1}$ y la deflexión de alerones, $\delta a_1$, para el caso de ángulo de resbalamiento, $\beta$, nulo. (supóngase que se cumple $\phi_1 < 5^{\circ}$)

Limitación de $V_{MC}$ por $\delta r = \delta r_{máx}$

$\beta = 0$



$$\begin{cases} L = W\cdot\overbrace{\cos\phi}^{\simeq 1} \\ Y + W\cdot\underbrace{\operatorname{sen}\phi}_{\simeq\phi} = 0 \end{cases}$$

$$Y = q\cdot S\left(C_{Y_0} + \cancel{C_{Y_\beta}\cdot\beta}^{\,0} + C_{Y_{\delta a}}\cdot\delta a + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r\right)$$

$$q\cdot S\left(C_{Y_0} + \cancel{C_{Y_{\delta a}}}^{\,0\ (\text{enunciado})}\cdot\delta a + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r\right) + W\cdot\phi = 0$$

$$(1)\quad \frac{1}{2}\rho V_{MC_1}^2\cdot S\cdot\left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}\right) + W\cdot\phi_1 = 0$$

Balance: $q\cdot S\cdot b\left(\cancel{C_{l_\beta}\cdot\beta}^{\,0} + C_{l_{\delta a}}\cdot\delta a + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta r\right) = L_T \longrightarrow (2)\quad \frac{1}{2}\rho V_{MC_1}^2\cdot S\cdot b\left(C_{l_{\delta a}}\cdot\delta a_1 + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}\right) = L_T$

Guiñada: $q\cdot S\cdot b\left(\cancel{C_{n_\beta}\cdot\beta}^{\,0} + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r + \cancel{C_{n_{\delta a}}\cdot\delta a}^{\,0\ (\text{enunciado})}\right) = N_T \longrightarrow (3)\quad \frac{1}{2}\rho V_{MC_1}^2\cdot S\cdot b\left(C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}\right) = N_T$

Tengo 3 ecs. y 3 incógnitas: $V_{MC1}$, $\delta a$, $\phi$

De (3) $\Rightarrow$ $\boxed{V_{MC_1} = \sqrt{\dfrac{2\cdot N_T}{\rho S\cdot b\cdot C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}}}}$

Con (3) entro en (2) $\Rightarrow$ $\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\rho}\cdot\dfrac{2\cdot N_T}{\cancel{\rho S b}\cdot C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}}\cdot\cancel{S b}\left(C_{l_{\delta a}}\cdot\delta a_1 + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}\right) = L_T$

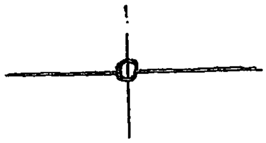


$\phi_1 = \dfrac{-N_T\left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}\right)}{W\cdot\ldots}$

2º) Determinar $\beta_2$, $V_{HC_2}$ y $\delta_{a_2}$ para el caso $\phi = 0°$

Si no, tendríamos 3 ecs. con 2 incógnitas.

Alas a nivel $\Rightarrow \phi = 0 \longrightarrow \beta \neq 0$ ¿ Hay resbalamiento ?



$$\begin{cases} L = W \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$(1)\quad \frac{1}{2}\rho V_{HC_2}^2 \cdot S \left( C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \cdot \beta_2 + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta r_{m\acute{a}x} \right) = 0$$

cte. y conocido, pero ¿igual al apartado 1º?

Balance: $q \cdot S \cdot b \left( C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta_r \right) = L_T \longrightarrow (2)\quad \frac{1}{2}\rho V_{HC_2}^2 \cdot S \cdot b \left( C_{l_\beta} \cdot \beta_2 + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta_{a_2} + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta r_{m\acute{a}x} \right) = L_T$

Guiñada: $q \cdot S \cdot b \left( C_{n_\beta} \cdot \beta + \cancel{C_{n_{\delta a}} \cdot \delta_a}^{\,0} + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_r \right) = N_T \longrightarrow (3)\quad \frac{1}{2}\rho V_{HC_2}^2 \cdot S \cdot b \cdot \left( C_{n_\beta} \cdot \beta_2 + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r_{m\acute{a}x} \right) = N_T$

Vuelvo a tener 3 ecs. con 3 incógnitas:

De (1) $\Rightarrow$ $\boxed{\beta_2 = -\dfrac{\left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta r_{m\acute{a}x}\right)}{C_{Y_\beta}}}$

Con (1) en (3) $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\rho V_{HC_2}^2 \cdot S \cdot b \left( -\frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \cdot \left( C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta r_{m\acute{a}x} \right) + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r_{m\acute{a}x} \right) = N_T$

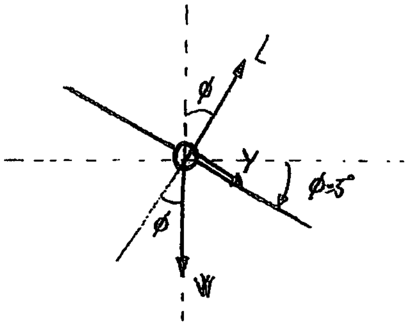
$$\longrightarrow \boxed{V_{HC_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_T}{\rho S \cdot b \left[ \left( C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \cdot C_{Y_{\delta r}} \right) \cdot \delta r_{m\acute{a}x} - C_{Y_0} \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \right]}}}$$

Con $\beta_2$ y $V_{HC_2}$ entro en (2) $\Rightarrow$ $\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\rho} \cdot \frac{\cancel{2} N_T}{\cancel{\rho S b} \left[ \left( C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \cdot C_{Y_{\delta r}} \right) \cdot \delta r_{m\acute{a}x} - C_{Y_0} \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \right]} \cdot \cancel{Sb} \left( -C_{l_\beta} \cdot \frac{\left( C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta r_{m\acute{a}x} \right)}{C_{Y_\beta}} + C_{l_{\delta a}} \delta_{a_2} + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta r_{m\acute{a}x} \right)$

$$\longrightarrow \boxed{\delta_{a_2} = \frac{1}{C_{l_{\delta a}}} \cdot \left[ \frac{L_T}{N_T} \left[ \left( C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \cdot C_{Y_{\delta r}} \right) \cdot \delta r_{m\acute{a}x} - C_{Y_0} \cdot \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \right] + \left( \frac{C_{l_\beta}}{C_{Y_\beta}} \cdot C_{Y_{\delta r}} - C_{l_{\delta r}} \right) \delta r_{m\acute{a}x} + \frac{C_{l_\beta}}{C_{Y_\beta}} \cdot C_{Y_0} \right]}$$

3º Ex - Junio 02 (Continuación)

3º) Determinar $\beta_3$, $V_{HC_3}$ y $\delta a_3$, para el caso de $\phi = 5°$ $\rightarrow$ $\phi = \frac{5\cdot\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{36}$ rad




$$\begin{cases} L = W\cdot \overbrace{\cos\phi}^{\simeq 1} \\ Y + W\cdot \underbrace{\operatorname{sen}\phi}_{\simeq \phi} = 0 \end{cases}$$

$\phi = \frac{\pi}{36}$ rad

$$(1)\quad \frac{1}{2}\rho V_{HC_3}^2 \cdot S\,(C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\cdot\beta_3 + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}) + W\phi = 0$$

¿igual al apartado 1º)?

Balance: $qS\cdot b\,(C_{l_\beta}\cdot\beta + C_{l_{\delta a}}\cdot\delta a + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta r) = L_T$ $\longrightarrow$ $(2)\quad \frac{1}{2}\rho V_{HC_3}^2\cdot S\cdot b\,(C_{l_\beta}\cdot\beta_3 + C_{l_{\delta a}}\cdot\delta a_3 + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}) = L_T$

Guiñada: $qSb\,(C_{n_\beta}\cdot\beta + \overset{0}{C_{n_{\delta a}}}\cdot\delta a + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r) = N_T$ $\longrightarrow$ $(3)\quad \frac{1}{2}\rho V_{HC_3}^2\cdot S\cdot b\,(C_{n_\beta}\cdot\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}) = N_T$

Otra vez tenemos las 3 ecs. con las 3 incógnitas: $\beta_3$, $V_{HC_3}$ y $\delta a_3$.

Dividiendo $\frac{(1)}{(3)}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\cancel{\frac{1}{2}\rho V_{HC_3}^2 S}\,(C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\cdot\beta_3 + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx})}{\cancel{\frac{1}{2}\rho V_{HC_3}^2 S}\cdot b\,(C_{n_\beta}\cdot\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx})} = \dfrac{-W\cdot\frac{\pi}{36}}{N_T}$

$$C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\cdot\beta_3 + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx} = -\frac{W}{N_T}\cdot\frac{\pi}{36}\cdot b\,(C_{n_\beta}\cdot\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx})$$

$$\longrightarrow \boxed{\beta_3 = \frac{-\left[C_{Y_0} + \left(C_{Y_{\delta r}} + \frac{W}{N_T}\cdot\frac{\pi}{36}\cdot b\cdot C_{n_{\delta r}}\right)\cdot\delta r_{máx}\right]}{C_{Y_\beta} + \frac{W}{N_T}\cdot\frac{\pi}{36}\cdot b\cdot C_{n_\beta}}}$$

∴ Con $\beta_3$ entrando en (3) $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\rho V_{HC_3}^2\cdot S\cdot b\,(C_{n_\beta}\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}) = N_T$

$$\longrightarrow V_{HC_3} = \sqrt{\frac{2\cdot N_T}{\ldots}}$$



$$\longrightarrow \delta a_3 = \frac{1}{C_{l_{\delta a}}}\left[\frac{2 L_T}{\rho V_{HC_3}^2\cdot S b} - C_{l_\beta}\beta_3 - C_{l_{\delta r}}\cdot\delta r_{máx}\right]$$

4º) Ordenar de mayor a menor, si ello es posible, las tres velocidades $V_{MC_1}$, $V_{MC_2}$ y $V_{MC_3}$. Explicar de forma razonada cuál elegiría como $V_{MC}$ para la certificación del avión.

- $$V_{MC_1} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_T}{\rho S b \cdot \underset{>0}{C_{n\delta r}} \cdot \delta r_{máx}}}$$

- $$V_{MC_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_T}{\rho S b \left[ \left( \underset{>0}{C_{n\delta r}} - \frac{\overset{>0}{C_{n\beta}}}{\underset{<0}{C_{y\beta}}} \cdot \underset{<0}{C_{y\delta r}} \right) \delta r_{máx} - C_x \frac{\overset{>0}{C_{n\beta}}}{\underset{<0}{C_{y\beta}}} \right]}}$$

- $$V_{MC_3} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_T}{\rho S b \left[ \left( \underset{>0}{C_{n\delta r}} - \frac{\overset{>0}{C_{n\beta}} \left( \overset{<0}{C_{y\delta r}} + \frac{W}{N_T} \frac{\pi}{36} b \cdot \overset{>0}{C_{n\delta r}} \right)}{\underset{<0}{C_{y\beta}} + \frac{W}{N_T} \cdot \frac{\pi}{36} \cdot b \cdot \underset{>0}{C_{n\beta}}} \right) \cdot \delta r_{máx} - \frac{\overset{>0}{C_{n\beta}} \cdot C_x}{\underset{<0}{C_{y\beta}} + \frac{W}{N_T} \frac{\pi}{36} b \cdot \underset{>0}{C_{n\beta}}} \right]}}$$

$$V_{MC_1} > V_{MC_2} \overset{?}{\lessgtr} V_{MC_3}$$

No se puede decir.

Elegiría como $V_{MC} \Rightarrow V_{MC_3}$ por ser la que contempla el caso más general $\begin{cases} \phi = 5^\circ \text{ (límite de la Normas)} \\ \beta \neq 0 \end{cases}$

13



ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

12-02-1996

Para un avión bimotor de transporte dotado de turborreactores, las Normas de Aeronavegabilidad (FAR 25.107 (b)) establecen que la velocidad de despegue seguro, $V_2$, no puede ser inferior a $1{,}2 \cdot V_s$ ($V_s$, velocidad de pérdida en vuelo horizontal rectilíneo estacionario) ni a $1{,}1 \cdot V_{MC}$ ($V_{MC}$, velocidad mínima a la que es posible controlar el avión en el aire y mantener vuelo horizontal rectilíneo estacionario, con el motor crítico inoperativo). En la fase de diseño preliminar se utiliza un peso $W_d$ dado comprendido entre el peso mínimo operativo y el peso máximo al despegue, seleccionando de forma que se obtenga la misma $V_2$ mínima utilizando ambos criterios.

Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el avión es simétrico, lo primero que entra en pérdida es el conjunto ala-fuselaje y su coeficiente de sustentación máximo, $(C_{Lmax})_{wb}$ es conocido, $C_{Y\delta_a} = C_{n\delta_a} = 0$, etc) .
- El empuje de cada motor $T$ y $\rho$ son constantes conocidas.

Para el peso de diseño $W_d$, se pide:

1. Determinar el valor de $V_{MC}$ y discutir la influencia de la posición del centro de gravedad.
2. Determinar la deflexión del timón de dirección $\delta_r$ necesaria para vuelo horizontal rectilíneo estacionario a $V_{MC}$ con un motor parado y con resbalamiento nulo.
3. Determinar la deflexión del timón de dirección $\delta_r$ necesaria para vuelo horizontal rectilíneo estacionario a $V_{MC}$ con un motor parado y con ángulo de balance nulo.
4. ¿Cuál de las dos deflexiones de timón es mayor?. Razonar la respuesta.

1)

$$V_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lmax}}} \quad ; \quad 1'2\, V_s = 1'1\, V_{MC} \Rightarrow V_{MC} = \frac{1'2}{1'1}\sqrt{\frac{2W_d}{\rho S C_{Lmax}}}$$

$$C_L = C_{Lwb} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{Lt}$$

$$C_{mcg} = 0 = C_{Lwb}(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac}) + C_{macwb} - C_{Lt}\,\eta_t \frac{S_t c_t}{S\, c}$$

distancia

$$C_L = C_{Lwb} + \eta_t \frac{S_t}{S}\left\{\frac{1}{\eta_t}\frac{S\cdot c}{S_t\, c_t}\left[C_{Lwb}(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ca}) + C_{mac}\right]\right\}$$

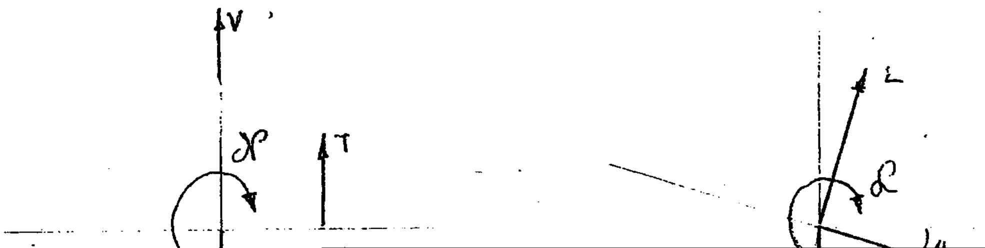
$$C_L = C_{Lwb}\left[1 + \frac{c}{c_t}(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ca})\right] + \frac{c}{c_t} C_{mac}$$

$$\boxed{C_{Lmax} = (C_{Lwb})_{max}\left[1 + \frac{c}{c_t}(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ca})\right] + \frac{c}{c_t} C_{mac}}$$

$$\boxed{V_{MC} = \frac{1'2}{1'1}\sqrt{\frac{2W_d}{\rho S C_{Lmax}}}}$$

$$(\bar{x}_{cg} - x_{ca}) \nearrow \Rightarrow C_{Lmax} \nearrow \Rightarrow V_{MC} \swarrow$$

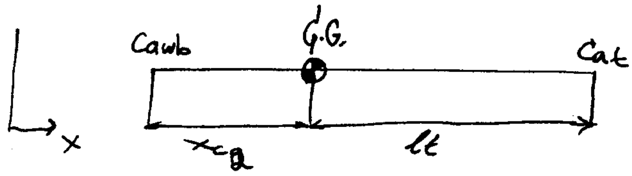
2) Resbalamiento nulo



13

$V_2 \geq 1'2 \cdot V_S$

$V_2 \geq 1'1\, V_{MC}$




1) $V_{MC} = \frac{1'2}{1'1} V_S$

$$V_S = \sqrt{\frac{2W_d}{\rho S C_{Lmax}}}$$

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lt}\,\eta_t \cdot \frac{S_t}{S}$$

$$M_A = L_{wb} \cdot x_{cg} + M_{acwb} + \cancel{M_{act}}^{0} - L_t \cdot l_t$$

$$C_{MA} = C_{Lwb} \cdot \hat{x}_{cg} + C_{macwb} - C_{Lt} \cdot \underbrace{\hat{V}_t\, \cancel{\eta_t}^{1}}_{\frac{S_t \cdot l_t}{S \cdot c}} = C_{Lwb}(\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) + C_{macwb} - C_{Lt} \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \hat{l}_t = 0$$

$$C_{Lt} = C_{Lwb}(\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) \cdot \frac{S}{S_t \hat{l}_t} + \frac{S}{S_t} \cdot \frac{1}{\hat{l}_t} C_{macwb}$$

$$C_L = C_{Lwb} + \frac{\cancel{S_t}}{\cancel{S}} \cdot \cancel{\eta_t}^{1} \left[ C_{Lwb}(\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) \cdot \frac{\cancel{S}}{\cancel{S_t} \cdot \hat{l}_t} + \frac{\cancel{S}}{\cancel{S_t}} \cdot \frac{1}{\hat{l}_t} C_{macwb} \right];$$

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lwb} \frac{\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}}{\hat{l}_t} + \frac{C_{macwb}}{\hat{l}_t}$$

$$C_{Lmax} = C_{LwbMAX}\left(1 + \frac{\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}}{\hat{l}_t}\right) + \frac{C_{macwb}}{\hat{l}_t}$$

$$V_S = \sqrt{\frac{2 \cdot W_d}{\rho S C_{LwbMAX}\left(1 + \frac{\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}}{\hat{l}_t} + \frac{C_{macwb}}{\hat{l}_t}\right)}} \Rightarrow \boxed{V_{MC} = \frac{1'2}{1'1} \cdot \sqrt{\frac{2W_d}{\rho S C_{LwbMAX}\left(1 + \frac{\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}}{\hat{l}_t} + \frac{C_{macwb}}{\hat{l}_t}\right)}}}$$

Si $\uparrow \hat{x}_{cg} \Rightarrow \downarrow V_{MC}$

Se acerca $\hat{x}_{cg}$ a la cola

Si $\downarrow \hat{x}_{cg} \Rightarrow \uparrow V_{MC}$

2) $\underline{\beta = 0}$

$$T - D = 0$$
$$-Q + W \operatorname{sen}\phi = 0$$
$$-L + W \cos\phi = 0$$

;

$$\begin{bmatrix} F_{AX} \\ Y \\ F_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$Y = -Q$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S \left[ \cancel{C_{Y_0}}^{0} + \cancel{C_{Y\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{Y\delta a}\delta a}^{0} + C_{Y\delta r}\delta r \right] = -W \operatorname{sen}\phi$$

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[ \cancel{C_{l_0}}^{0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{0} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r \right] = 0$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[ \cancel{C_{n_0}}^{0} + \cancel{C_{n\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{n\delta a}\delta a}^{0} + C_{n\delta r}\delta r \right] = T \cdot d$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{2Td}{\rho V_{MC}^2 S b C_{n\delta r}}}$$

3) $\underline{\phi = 0}$

$$T - D = 0$$
$$-Q = 0$$
$$-L + W = 0$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S \left[ \cancel{C_{Y_0}}^{0} + \cancel{C_{Y\beta}\beta}^{\neq 0} + \cancel{C_{Y\delta a}\delta a}^{0} + C_{Y\delta r}\delta r \right] = 0 \rightarrow \beta = \frac{-C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}} \cdot \delta_r$$

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[ \cancel{C_{l_0}}^{0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r \right] = 0$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[ \cancel{C_{n_0}}^{0} + C_{n\beta}\beta + \cancel{C_{n\delta a}\delta a}^{0} + C_{n\delta r}\delta r \right] = T \cdot d \;;$$

$$T \cdot d = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[ C_{n\beta} \cdot \frac{-C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}}\delta_r + C_{n\delta r}\delta r \right] ; \quad \delta r \left[ C_{n\delta r} - \frac{C_{Y\delta r} C_{n\beta}}{C_{Y\beta}} \right] = \frac{2Td}{\rho S b V_{MC}^2}$$

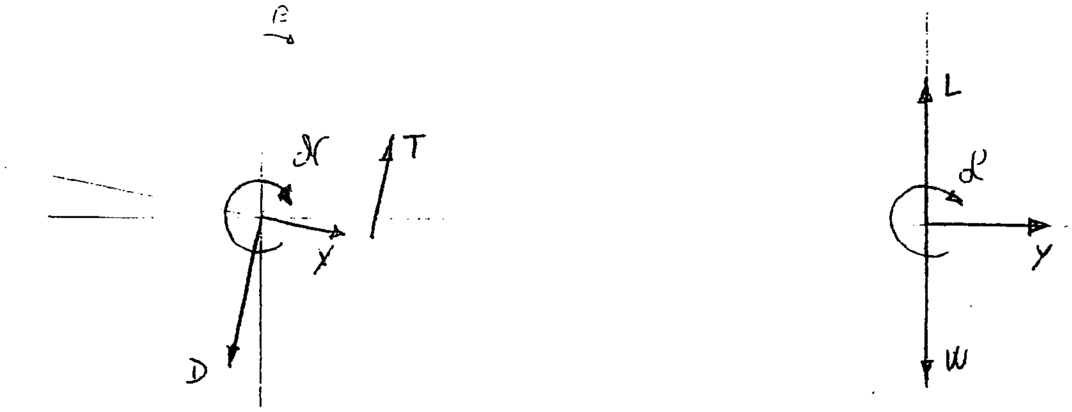


$$\ldots V_r \big|_{\beta=0} \;,\; V_r \big|_{\phi=0}$$

$$\mathcal{N} = T\cdot\lambda \Rightarrow \underbrace{\cancel{C_{N0}}}_{=0} + \underbrace{C_{N\beta}\beta}_{=0} + \underbrace{C_{N\delta a}\delta_a}_{=0} + C_{N\delta r}\cdot\delta_r = \frac{2T\lambda}{\rho S b V_{MC}^2}$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{2T\lambda}{\rho S b V_{MC}^2 C_{N\delta r}}}$$

3) Balance nulo




$$\mathcal{L} = 0 = \cancel{C_{L0}} + C_{L\beta}\beta + C_{L\delta a}\delta_a + C_{L\delta r}$$

$$\mathcal{N} = T\lambda \Rightarrow \cancel{C_{N0}} + C_{N\beta}\beta + C_{N\delta a}\delta_a + C_{N\delta r}\delta_r = \frac{2T\lambda}{\rho S b V_{MC}^2}$$

$$Y = 0 = \cancel{C_{Y0}} + C_{Y\beta}\beta + \underbrace{\cancel{C_{Y\delta a}}}_{=0}\cdot\delta_a + C_{Y\delta r}\delta_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = -\cancel{\frac{C_{Y0}}{C_{Y\beta}}} - \frac{C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}}\delta_r \; ; \quad \beta = -\frac{C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}}\delta_r$$

$$\left(C_{N\delta r} - C_{N\beta}\frac{C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}}\right)\delta_r = \frac{2T\lambda}{\rho S b V_{MC}^2}$$

4)

$$(\delta_r)_{3°} > (\delta_r)_{2°}$$

$$(\delta_r)_{3°} = \frac{2T\lambda\, C_{Y\beta}}{\rho S' b V_{MC}^2\, C_{N\delta r} C_{Y\beta} \left(1 - \frac{C_{Y\delta r} C_{N\beta}}{C_{N\delta r} C_{Y\beta}}\right)} = (\delta_r)_{2°} \frac{1}{\left(1 - \frac{C_{Y\delta r} C_{N\beta}}{C_{N\delta r} C_{Y\beta}}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_{Y\delta r} < 0 \\ C_{N\beta} > 0 \\ C_{N\delta r} > 0 \\ C_{Y\beta} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{C_{Y\delta r} C_{N\beta}}{C_{N\delta r} C_{Y\beta}} > 0 \Rightarrow (\delta_r)_{3°} > (\delta_r)_{2°}$$

14



ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

4.23 **16-02-1998** Visto

Un modelo de avión no motorizado se encuentra montado en un túnel aerodinámico con las alas a nivel y de forma que sólo puede girar en guiñada alrededor de su eje $z$. El modelo no dispone de alerones y tiene un timón de dirección sin tab que gira libremente alrededor de su charnela.

Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del modelo necesarias para la resolución del problema. Por ejemplo, la polar es parabólica de coeficientes constantes y conocidos, el coeficiente de sustentación sólo es función del ángulo de ataque, etc.
- El punto $O$ de apoyo coincide con el centro de masas del modelo.
- Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.
- La velocidad del túnel $V$, $\rho$ y $g$ son constantes conocidas.

Si en cierto instante inicial ($t = 0$) se da al modelo un ángulo de guiñada $\Psi_0$ y una velocidad angular de guiñada $\dot{\Psi}_0$, se pide:

1. Determinar el ángulo de guiñada en función del tiempo.
2. Determinar las componentes de la fuerza de reacción del apoyo.

(14)

1) $\delta_a = 0$

$\phi = \mu = 0 = \gamma = \theta = \alpha$

$T = 0$

Timón de dirección "flotando" $\Rightarrow H_r = 0 \Rightarrow \delta_{r_f} = \frac{-1}{C_{h\delta_r}}\left[C_{h_{r\beta}}\beta + \cancel{C_{h_r\delta_{tr}}\delta_{tr}}^{0}\right]$

$\cancel{T\cos\varepsilon\cos\nu}^{0} - D - \cancel{W\sin\gamma}^{0} + R_x = 0 \; ; \; D = R_x \quad (1)$

$\cancel{T\cos\varepsilon\sin\nu}^{0} - Q + \cancel{W\cos\gamma\sin\mu}^{0} = \frac{W}{g}\cdot V\cdot\dot{\chi} \; ; R_y + Q = \frac{W}{g}V\dot{\chi} \quad (2)$

$-\cancel{T\sin\varepsilon}^{0} - L + W\cancel{\cos\gamma}^{1}\cancel{\cos\mu}^{1} = 0 \; ; \; R_z - L + W = 0 \quad (3)$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ Y \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \cancel{\alpha}^{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_{Ax} = +\beta Q - D \; ; \; D = \beta Q - F_{Ax} \\ Y = -\beta D - Q \; ; \; Q = -Y + \beta D \\ F_{Az} = -L \end{matrix}$$

$$\begin{cases} F_{Ax} + R_x = 0 \\ Y + R_y = -D \\ -L + W + R_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_A + M_x = 0 \\ M_A + M_y = 0 \\ N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancel{C_{n0}}^{0\,\text{(avión simétrico)}} + C_{n\beta}\beta + \cancel{C_{n\delta_a}\delta_a}^{0\,\text{(no tiene alerón)}} + C_{n\delta_r}\delta_{r_f}\right] = I_z\dot{r} - \cancel{J_{xz}\dot{p}}^{0} - (I_x - \cancel{I_y})pq + \cancel{J_{xz}qr}^{0} \quad (I) \end{cases}$$

$p = \cancel{\dot{\phi}}^{0} - \dot{\psi}\cancel{\sin\theta}^{0} = 0$

$q = \cancel{\dot{\theta}\cos\phi}^{0} + \dot{\psi}\cos\theta\cancel{\sin\phi}^{0} = 0$

$r = -\cancel{\dot{\theta}\sin\phi}^{0} + \dot{\psi}\cancel{\cos\theta}^{1}\cancel{\cos\phi}^{1} = \dot{\psi}$

$\underline{A<0:}$ $\psi(t) = B\cos\sqrt{A}\cdot t + C\operatorname{sen}\sqrt{A}\cdot t$

$\psi(0) = \psi_0 = B$

$\dot\psi(0) = \dot\psi_0 = -\sqrt{A}\cdot B\operatorname{sen}\sqrt{A}\cdot t + \sqrt{A}C\cos\sqrt{A}\cdot t \rightsquigarrow C = \frac{\dot\psi_0}{\sqrt{A}\cdot\cos\sqrt{A}t} + \psi_0\operatorname{tg}\sqrt{A}t$

$$\boxed{\begin{array}{l}\psi(t) = \psi_0\cos\sqrt{A}t + \dfrac{\dot\psi_0}{\sqrt{A}}\operatorname{tg}\sqrt{A}t + \psi_0\operatorname{tg}\sqrt{A}t\cdot\operatorname{sen}\sqrt{A}t \\ A = \dfrac{\rho V^2 S b}{J_{x_2}}\cdot\beta\left(C_{l\beta} - \dfrac{C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\right)\end{array}}$$

2) $\boxed{R_x = D = \frac{1}{2}\rho S V^2\left[C_{D0} + KC_L^2\right]} = \boxed{\frac{1}{2}\rho S V^2\left[C_{D0} + KC_{L\alpha}^2\cdot\alpha^2\right]}$

$R_z + L = W \rightsquigarrow \boxed{R_z = W - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L\alpha}\cdot\alpha}$

$R_y + Y = 0 \rightsquigarrow \boxed{R_y = -\frac{1}{2}\rho S V^2\left[\cancelto{0}{C_{y0}} + \cancelto{0}{C_{y\delta a}\delta a} + C_{y\beta}\beta + C_{y\delta r}\cdot -\frac{C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\beta\right]} = \boxed{-\beta\cdot\left[C_{y\beta} - \frac{C_{y\delta r}C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\right]\cdot\frac{1}{2}\rho V^2 S}$

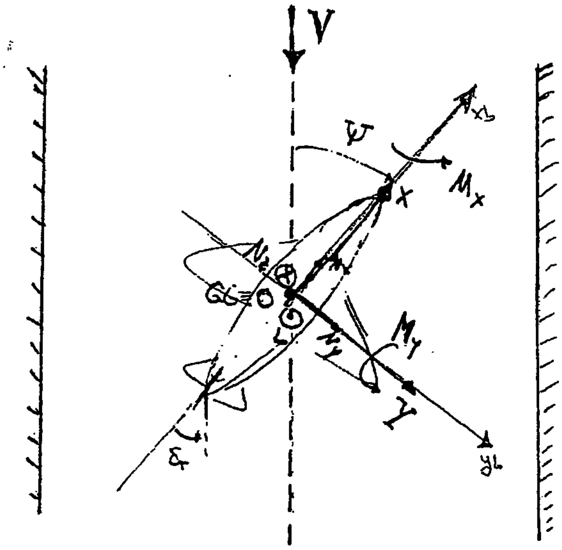
$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L\alpha}\cdot\alpha$

$C_L = C_{L\alpha}\cdot\alpha$

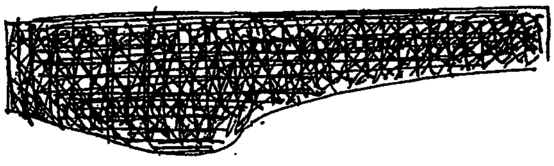
$L_A + M_x = 0 \rightsquigarrow \boxed{M_x = -\frac{1}{2}\rho S V^2 b\left[\cancelto{0}{C_{l0}} + C_{l\beta}\beta + \cancelto{0}{C_{l\delta a}\delta a} + C_{l\delta r}\cdot -\frac{C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\beta\right]} = \boxed{-\beta\left[C_{l\beta} - \frac{C_{l\delta r}C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\right]\cdot\frac{1}{2}\rho V^2 S b}$

$M_A + M_y = 0 \rightsquigarrow \boxed{M_y = -\frac{1}{2}\rho S V^2 b\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\cdot\delta e\right]b}$

H.23/16-02-1998




- $N_x, N_y, N_z$ } son las reacciones del ap.
- $M_x, M_y$



· Suponemos que $\theta = 0$

## 1 CÁLCULO DE $\psi = \psi(t)$

- Avión con alas a nivel ($\phi = 0$)
- ángulos pequeños

* Ec. nes de Fuerzas :

Reacción según eje "X".

$$X + N_x = 0 \quad (1)$$

no tiene alerones

$$Y + N_y = q S \left( \cancel{C_{Y_0}} + C_{Y_\beta} \cdot \beta + \cancel{C_{Y_{\delta_a}}} \cdot \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \cdot \delta_r \right) + N_y = 0 \quad (2)$$

$$-L + W + N_z = 0 \quad (3)$$

* Ec. nes de Momentos :

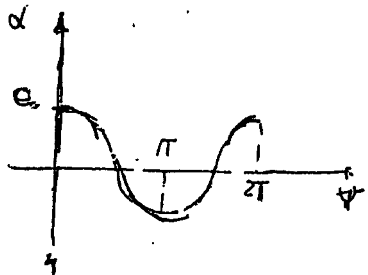
$$\mathcal{L}_A + M_x = 0 \quad (4)$$

(no tiene timón de profundidad)

$$M_A + M_y = q S c \left( C_{m_0} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha_{wb} + \cancel{C_{m_\delta}} \cdot \delta_e \right) + M_y = 0 \quad (5)$$

$$N_A = q S b \left( \cancel{C_{n_0}} + C_{n_\beta} \cdot \beta + \cancel{C_{n_{\delta_a}}} \cdot \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \cdot \delta_r \right) = I_z \dot{r} - J_{xz} \cancel{\dot{p}} - (I_x - I_y) p \cancel{q} + J_{xz} \cancel{q} r$$

**Nota.** Si no hiciésemos la hipótesis de $\theta=0$ sino de $\theta=\theta_0=cte$, se tendría que poner en función de $\psi$, ya que al girar $\psi$ el ángulo de ataque varía; a la vista de la configuración:




$\longrightarrow \boxed{\alpha = \theta_0 \cos\psi}$

$$\left\{\begin{array}{l} \psi=0 \longrightarrow \theta=\alpha=\theta_0 \\ \psi=\frac{\pi}{2} \longrightarrow \alpha=0 \\ \psi=\pi \longrightarrow \alpha=-\theta=-\theta_0 \end{array}\right\}$$

• $\delta_r$ es libre ⟶ Momento de charnela ~~nulo~~ del timón de dirección es nulo:

0 (el timón dirección es simétrico)     0 (no hay aletones)

$$C_h = \cancel{C_{h_0}} + C_{h_\beta}\,\beta + C_{h_{\delta_r}}\cdot\delta_r + \cancel{C_{h_{\delta_a}}}\cdot\delta_a = 0 \;\longrightarrow$$

$$\longrightarrow \delta_r = -\cancel{\frac{C_{h_0}}{C_{h_{\delta_r}}}} - \frac{C_{h_\beta}}{C_{h_{\delta_r}}}\,\beta$$

• Luego:

$$I_z\,\ddot{\psi} = q\,S\,b\left(C_{n_\beta}\cdot\beta + C_{n_{\delta_r}}\cdot\delta_r\right) = q\,S\,b\left[C_{n_\beta}(-\psi) + C_{n_{\delta_r}}\left(0 - \frac{C_{h_\beta}}{C_{h_{\delta_r}}}(-\psi)\right)\right]$$

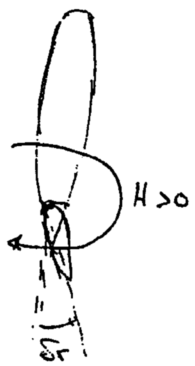
$\{\psi=-\beta\}$



$H_2O$    laterales - Direccionales    coeficiente.

**NOTA:** signos de los coeficientes del momento de charnela.

$$C_h = \cancel{C_{h_0}}^{\,0\ (\text{timón simétrico})} + \underbrace{C_{h_\beta}}_{>0}\,\beta + \underbrace{C_{h_{\delta_r}}}_{>0}\cdot\delta_r + \cancel{C_{h_{\delta_t}}}^{\,0\ (\text{no hay tab})}\cdot\delta_t$$




· Resolución de $\ddot{\psi} = A\,\psi$

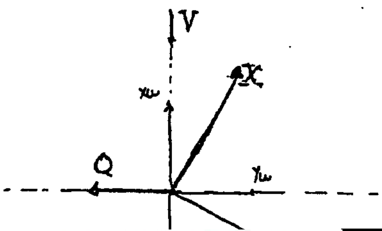
* ec. característica: $r^2 - A = 0 \longrightarrow r = \pm\sqrt{A}$

* $\underline{A>0}$ :
  - $\psi(t) = a_1 e^{\sqrt{A}\,t} + b_1 e^{-\sqrt{A}\,t}$ ⟶ esta solución no es válida pq $e^{\sqrt{A}t}$ es divergente
  - $a, b$ se determinan sabiendo que $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$

* $\underline{A<0}$ :

$$\boxed{\begin{aligned}&\psi(t) = a_2\cos\sqrt{A}\,t + b_2\,\mathrm{sen}\sqrt{A}\,t\\ &\psi(0) = \psi_0\,,\quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0\end{aligned}}$$

## [2] CÁLCULO DE LAS COMPONENTES DE REACCIÓN




· $D = -X\cos\psi + Y\,\mathrm{sen}\,\psi \longrightarrow \boxed{X}$

· $Y$ sale de la ec. (2)

15

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – 2º E. Parcial – B+C+D 02.02.88

## PROBLEMA 1º

El avión representado en la figura adjunta se ha obtenido añadiendo dos aletas delanteras ventrales a una configuración básica. Sobre estas aletas actúa el piloto deflectándolas simultáneamente el mismo ángulo $\delta_c$. $\delta_c$

Este avión está aterrizando horizontal, rectilínea y estacionariamente con velocidad respecto a tierra $V_g$ conocida en presencia de un viento cruzado de velocidad $V_w$ ($V_w \ll V_g$) también conocida.

Suponiendo además que todas las características geométricas, aerodinámicas (en concreto, las derivadas de los coeficientes de fuerza y momentos lateral-direccionales del avión completo (incluyendo las aletas) respecto de $\beta, \delta_a, \delta_r$; y entre éstas $C_{Y\delta_a} = C_{n\delta_a} = 0$) y másicas del avión son conocidas, se pide:

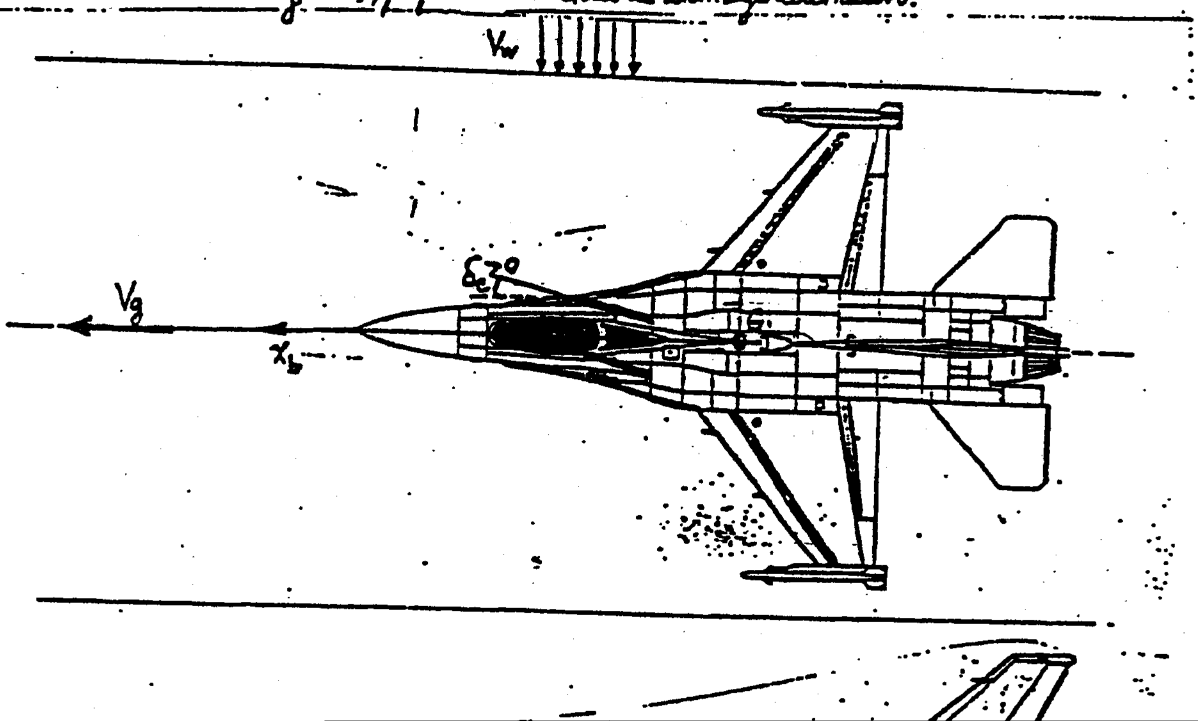
1º) Estimar las derivadas de estabilidad $C_{Y\delta_c}$, $C_{l\delta_c}$, $C_{n\delta_c}$ en función de datos geométricos y aerodinámicos más simples.

2º) Para cada uno de los dos casos siguientes, razonar si podría aterrizar este avión en las condiciones mencionadas y con $\phi = 0$:

a) el piloto actúa independientemente sobre las aletas y el timón de dirección.

b) las aletas y el timón de dirección están interconectados y siguen la ley $\delta_c = A\delta_r$, donde $A$ es una constante conocida.

Si las respuestas son afirmativas, determinar las deflexiones necesarias de los mandos. Si son negativas, proponer un método de aterrizaje alternativo.

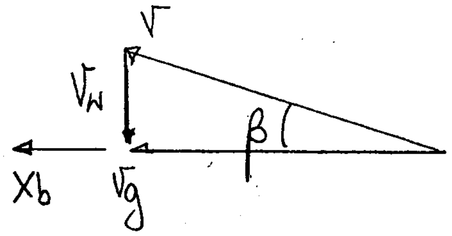


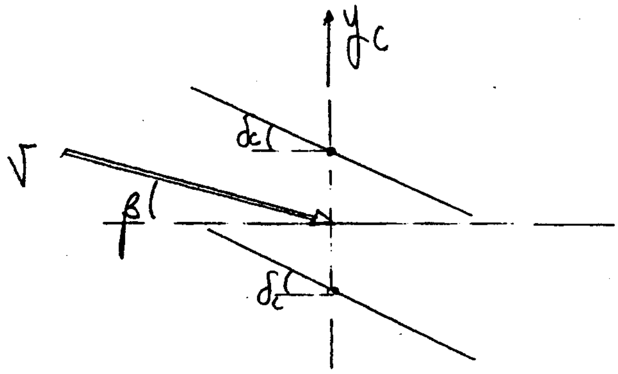
2-02-1988 (PROBLEMA 1/2º E. PARCIAL B+C+D)

- ATERRIZAJE HORIZONTAL, RECTILÍNEO Y ESTACIONARIO MENTE (a velocidad $V_g$)
- Con viento cruzado. ($V_w \ll V_g$)

1) $\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_w} \longrightarrow \vec{V} = \vec{V_g} - \vec{V_w}$

PERFILES SIMÉTRICOS → $C_{mac_c} = 0$




COEFICIENTE $C_{y\delta_c}$

- Vamos a suponer conocidas, la superficie de cada aleta ventral $S_c$, y el coeficiente de sustentación $a_c$.

$$C_{L_c} = a_c \alpha_c + C_{L_{0c}} \quad ; \quad \text{Donde } \alpha_c = \delta_c - \beta$$

0 (Perfiles simétricos) ← no lo dice en ningún sitio

- La parte de fuselaje por delante de las aletas no interviene ni sobre la velocidad de la corriente incidente ($q_c = q$), ni sobre la posible deflexión debido a este ($\varepsilon_f = 0$)

$$Y_c = 2qS_c a_c \alpha_c \quad ?$$

Nos falta considerar una posible deflexión de estela de una aleta sobre la otra (Vamos a englobar los dos efectos en un solo término)

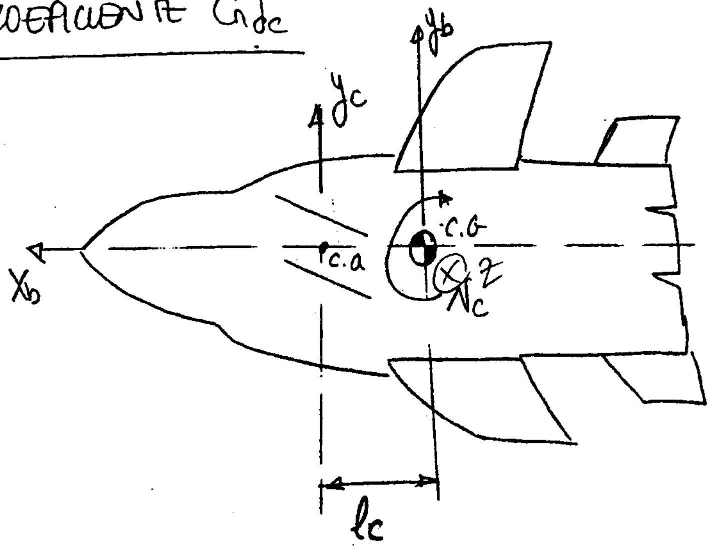
$\alpha_c = \delta_c - \beta - \varepsilon$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\alpha_c \longrightarrow \alpha_c = \delta_c - \beta - \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}(\delta_c - \beta) = (\delta_c - \beta)\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right)$$



1

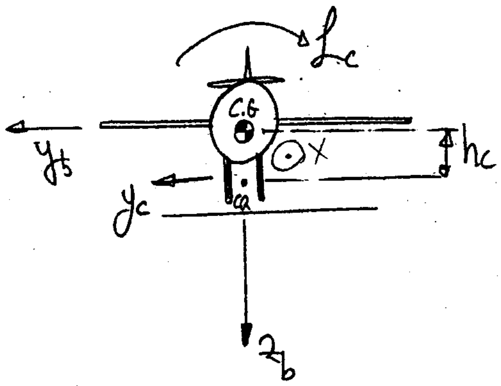
COEFICIENTE $C_{n\delta_c}$




$l_c$ = Distancia entre el centro aerodinámico de las aletas y el eje $z_s$

$$\boxed{C_{n\delta_c} = +\left(C_{y\delta_c}\right)\frac{l_c}{b} = +2\cdot\frac{S_c}{S}\cdot a_c\left(1-\frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right)\cdot\frac{l_c}{b}}$$

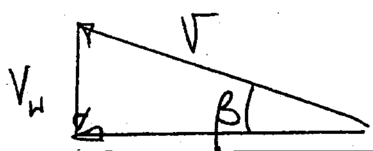
COEFICIENTE $C_{l\delta_c}$




$h_c$ = distancia entre el centro aerodinámico de las aletas y el eje $x_s$

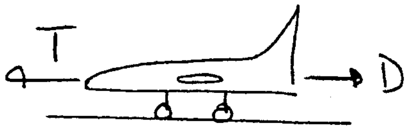
$$\boxed{C_{l\delta_c} = -C_{y\delta_c}\frac{h_c}{b} = -2\,\frac{S_c}{S}\,a_c\left(1-\frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right)\frac{h_c}{b}}$$

2)

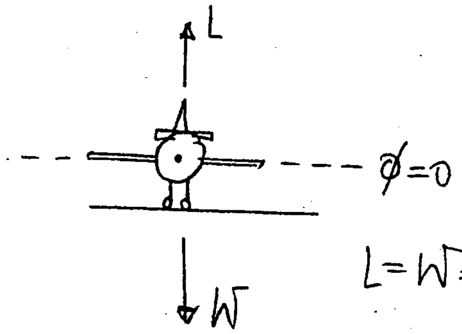



$Tg\beta = \frac{V_W}{V_g}$ Como $\frac{V_W}{V_g} \ll 1 \to \beta \ll 1$

a) | Aterrizaje horizontal, rectilíneo y estacionario
| Con $\phi = 0$




$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$




$$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

Por tanto

(AVIÓN SIMÉTRICO
↓
$C_{y_0} = C_{n_0} = C_{l_0} = 0$)

$$Y = 0 = qS(\cancel{C_{y_0}} + C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta_r}}\delta_r + \cancel{C_{y_{\delta_a}}}\delta_a + C_{y_{\delta_e}}\delta_e) \quad (1)$$

$$\mathcal{L} = 0 = qSb(\cancel{C_{l_0}} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta_r}}\delta_r + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_e}}\delta_e) \quad (2)$$

$$N = 0 = qSb(\cancel{C_{n_0}} + C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta_r}}\delta_r + \cancel{C_{n_{\delta_a}}}\delta_a + C_{n_{\delta_e}}\delta_e) \quad (3)$$

a) Tenemos tres ecuaciones con 3 incógnitas: $\delta_r$, $\delta_e$ y $\delta_a$ ($\beta$ conocido)

$$(1) \rightarrow \quad \delta_r = (-C_{y_\beta}\beta - C_{y_{\delta_e}}\delta_e)\cdot\frac{1}{C_{y_{\delta_r}}} \quad (1^*)$$

Sustituyendo en (3) $\quad C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta_r}}\frac{1}{C_{y_{\delta_r}}}(-C_{y_\beta}\beta - C_{y_{\delta_e}}\delta_e) + C_{n_{\delta_e}}\delta_e = 0$

$$\left(C_{n_\beta} - \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}}\right)\beta = \left(\frac{C_{y_{\delta_e}}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_e}}\right)\delta_e$$

$$\boxed{\delta_e = \frac{\left(C_{n_\beta} - \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}}\right)\beta}{\left(\frac{C_{y_{\delta_e}}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_e}}\right)} = \frac{(C_{n_\beta}C_{y_{\delta_r}} - C_{y_\beta}C_{n_{\delta_r}})}{(C_{y_{\delta_e}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_e}}C_{y_{\delta_r}})}\cdot\frac{V_W}{V}}$$



$(C_{y_{\delta_e}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_e}}C_{y_{\delta_r}})\ V \quad\quad V\ (C_{y_{\delta_e}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_e}}C_{y_{\delta_r}})$

Con $\delta_c$ y $\delta_r$ en (2)

$$C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_r}\delta_r + C_{l\delta_c}\delta_c + C_{l\delta_a}\delta_a = 0$$

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}}\left(C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_r}\delta_r + C_{l\delta_c}\delta_c\right)$$

$$\boxed{\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}}\frac{V_W}{V}\left(C_{l\beta} + \frac{C_{l\delta_r}(C_{n\delta_c}C_{y\beta} - C_{n\beta}C_{y\delta_c}) + C_{l\delta_c}(C_{n\beta}C_{y\delta_r} - C_{y\beta}C_{n\delta_r})}{(C_{y\delta_c}C_{n\delta_r} - C_{y\delta_r}C_{n\delta_c})}\right)}$$

2) $\delta_c = A\delta_r$ se añade una ecuación más al sistema sin añadir ninguna incógnita $\longrightarrow$ Sistema indeterminado.

Para que pudiera ser compatible esta nueva ecuación debería ser una combinación lineal de las anteriores con:

$$\boxed{A = \frac{\delta_c}{\delta_r} = \frac{C_{n\beta}C_{y\delta_r} - C_{y\beta}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_c}C_{y\beta} - C_{n\beta}C_{y\delta_c}}}$$

(Este es el valor que debería tomar la constante A)

1L

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 25.06.10

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

## PROBLEMA 2º

La Figura 1 adjunta representa un avión con cola en "V". El control longitudinal y direccional en este tipo de aviones se realiza mediante la parte móvil de la cola de la forma siguiente:

- Control longitudinal: las superficies móviles izquierda y derecha se deflectan simétricamente (ver Figura 2 (a)). Puede definirse la deflexión longitudinal de mando, $\delta_e$, en función de las deflexiones de la superficie izquierda, $\delta_{Vi}$, y la superficie derecha, $\delta_{Vd}$, mediante:

$$\delta_e = \frac{\delta_{Vd} + \delta_{Vi}}{2}$$

- Control direccional: las superficies móviles izquierda y derecha se deflectan asimétricamente (ver Figura 2 (b)). Puede definirse la deflexión direccional de mando, $\delta_r$, mediante:

$$\delta_r = \frac{\delta_{Vd} - \delta_{Vi}}{2}$$

Suponiendo además que se conocen todas las características geométricas (entre otras, la superficie de toda la cola en V, $S_H$), aerodinámicas (entre otras, las eficiencias aerodinámicas de todas las superficies de cola son la unidad) y másicas del avión necesarias para la resolución del problema y que el ángulo $\lambda$ no es pequeño ($0 < \lambda < \pi/2$), se pide:

1º) Determinar la potencia de control longitudinal, $C_{m\delta_e}$, para este avión.

2º) Determinar la potencia de control direccional, $C_{n\delta_r}$, para este avión.

3º) Si por requerimientos de potencias de control un avión con cola convencional debe tener unos valores especificados para las superficies de sus colas horizontal y vertical, $S_t$ y $S_v$, sustituir esa cola convencional por una cola en V que tenga las mismas potencias de control. Particularizar los resultados obtenidos para el caso de que la cola convencional y la cola en V sólo se diferencien en sus superficies respectivas, comparando los valores de las superficies mojadas de ambas colas.

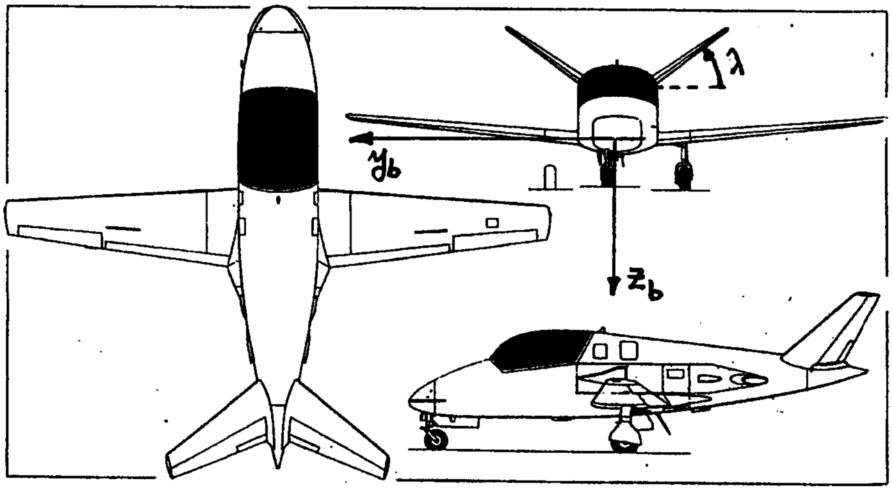



FIGURA 1

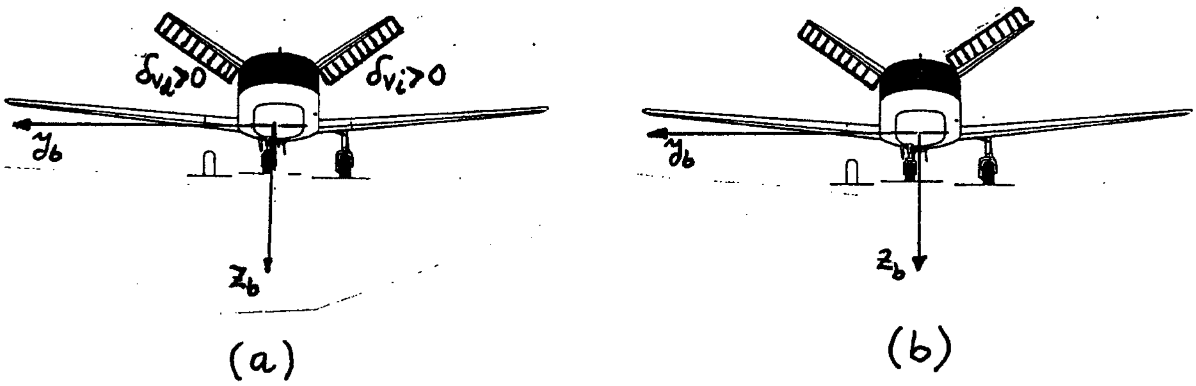
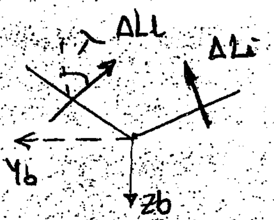



FIGURA 2

PROBLEMA 2 JUNIO 2010

(1)




$$\Delta L_d = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_H}{2} a_H (\tau_H \delta v_d)$$

$$\Delta L_i = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_H}{2} a_H (\tau_H \delta v_i)$$

$$\Delta M_{cg} = -(\Delta L_d + \Delta L_i)\cos\lambda \, l_H = -\frac{1}{2}\rho V^2 S_H l_H a_H \tau_H \left(\frac{\delta v_d + \delta v_i}{2}\right)\cos\lambda$$

$$\Delta C_{mcg} = \frac{\Delta M_{cg}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S c} = -\frac{S_H l_H}{S c} a_H \cdot \tau_H \cos\lambda \, \delta e$$

$$\boxed{C_{m\delta e} = \frac{-S_H l_H}{S c} a_H \tau_H \cos\lambda}$$

(2)

$$\Delta N_{cg} = (\Delta L_d \operatorname{sen}\lambda - \Delta L_i \operatorname{sen}\lambda) l_H = \frac{1}{2}\rho V^2 S_H l_H a_H \tau_H \left(\frac{\delta v_d - \delta v_i}{2}\right)\operatorname{sen}\lambda$$

$$\Delta C_{ncg} = \frac{\Delta N_{cg}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b} = \frac{S_H l_H}{S b} a_H \tau_H \operatorname{sen}\lambda \, \delta r$$

$$\boxed{C_{n\delta r} = \frac{S_H l_H}{S b} a_H \tau_H \operatorname{sen}\lambda}$$

(3)

$$S_H l_t a_t \tau_e = S_H l_H a_H \tau_H \cos\lambda$$

$$S_V l_V a_V \tau_r = S_H l_H a_H \tau_H \operatorname{sen}\lambda$$

dependiendo sólo en superficie $\rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} S_t = S_H \cos\lambda \\ S_V = S_H \operatorname{sen}\lambda \end{array} \right.$

$$\left.\begin{array}{l} S_{H\,conv} = 2(S_t + S_V) \\ S_{HV} = 2 S_H \end{array}\right\} \quad \frac{S_{HV}}{S_{Hconv}} = \frac{S_H}{S_t + S_V} = \frac{1}{\underbrace{\cos\lambda + \operatorname{sen}\lambda}_{A}} < 1$$

$$A^2 = \cos^2\lambda + \operatorname{sen}^2\lambda + 2\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda = 1 + 2\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda > 1$$

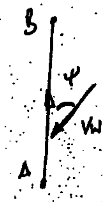
PROBLEMA 1 JUNIO 2010

① A-B

$V_{T1} = V\cos\theta - V_W\cos\psi$

$V\sin\theta - V_W\sin\psi = 0 \rightarrow \sin\theta = \frac{V_W}{V}\sin\psi$

$V_{T1} = V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} - V_W\cos\psi$




B-A

$V_{T2} = V\cos\theta' + V_W\cos\psi$

$V\sin\theta' - V_W\sin\psi = 0 \rightarrow \sin\theta' = \frac{V_W}{V}\cdot\sin\psi$

$V_{T2} = V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} + V_W\cos\psi$

②

$t_{AB} = \frac{d}{V_{T1}} = \frac{d}{V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} - V_W\cos\psi}$

$t_{BA} = \frac{d}{V_{T2}} = \frac{d}{V\sqrt{1-\left(\frac{V_W}{V}\right)^2\sin^2\psi} + V_W\cos\psi}$

③ $\boxed{\beta=0}$

RUMBO A→B $\theta = \arcsin\left(\frac{V_W}{V}\cdot\sin\psi\right)$

RUMBO B→A $\theta' = 180 - \theta = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{V_W}{V}\sin\psi\right)$

④ COMBUSTIBLE A-B:

$dW = -c\,P_m\,dt \longrightarrow dt = -\frac{\eta}{c}\frac{dW}{DV}$

$T\cdot V = P_m\cdot\eta = D\cdot V$

$L = W$

$dx = V_{T1}\cdot dt$

$D\cdot V = \frac{\rho S C_{D0}}{2}V^3 + \frac{2K}{\rho S V}W^2 = A + BW^2$

$$d = \int_{W_0}^{W_1} -\frac{\eta\cdot V_{T1}}{c}\cdot\frac{dW}{A+BW^2} = -\eta\cdot\frac{V_{T1}}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\frac{W\sqrt{AB}}{A}\right]_{W_0}^{W_1}$$

$$d = \frac{\eta}{c}\cdot\frac{V_{T1}}{V}\cdot\frac{1}{\sqrt{KC_{D0}}}\left[\arctan\frac{2W_0}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}} - \arctan\frac{2W_1}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\right]$$

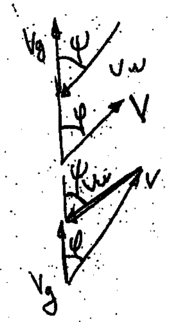
$$W_1 = \frac{2W_0/\rho S V^2 - \sqrt{K/C_{D0}}}{\operatorname{tg}\left(\frac{dc\sqrt{KC_{D0}}}{\eta V_{T1}}\right)\frac{4K}{C_{D0}}\frac{1}{(\rho S V^2)^2}\cdot W_0 + \frac{2}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}}$$

combustible A→B = $W_0 - W_1$

COMBUSTIBLE B-A = ...

$$d = \int_{W_1}^{W_2} -\frac{\eta V_{T2}}{c}\cdot\frac{dW}{A+BW^2}$$

$$W_2 = \frac{2W_1/\rho S V^2\ \sqrt{K/C_{D0}}}{\operatorname{tg}\left(\frac{dc\sqrt{KC_{D0}}}{\eta V_{T2}}\right)\cdot\frac{4K}{C_{D0}}\frac{1}{(\rho S V^2)^2}W_1 + \ldots}$$



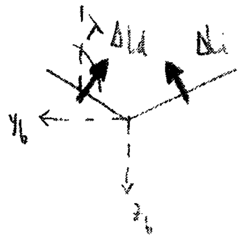

$V\cos\psi$ -

$V\sin\psi$

$\cos\psi = \sqrt{\ldots}$ ... $^2\psi$

PROBLEMA 2 (25.06.10)

1)




$$\left.\begin{aligned} \Delta L_d &= \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_H}{2} a_H (\tau_H \delta_{rd}) \\ \Delta L_i &= \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_H}{2} a_H (\tau_H \delta_{ri}) \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta M_{cg} = -(\Delta L_d + \Delta L_i)\cos\lambda \, l_H = -\frac{1}{2}\rho V^2 S_H l_H a_H \tau_H \left(\frac{\delta_{rd}+\delta_{ri}}{2}\right)\cos\lambda$$

$$\Delta C_{mcg} = \frac{\Delta M_{cg}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_c} = -\frac{S_H l_H}{S_c} a_H \tau_H \cos\lambda \, \delta_e$$

$$\boxed{C_{m\delta_e} = -\frac{S_H l_H}{S_c} a_H \tau_H \cos\lambda}$$

2) $$\Delta N_{cg} = (\Delta L_d \operatorname{sen}\lambda - \Delta L_i \operatorname{sen}\lambda) l_H = \frac{1}{2}\rho V^2 S_H l_H a_H \tau_H \left(\frac{\delta_{rd}+\delta_{ri}}{2}\right)\operatorname{sen}\lambda$$

$$\Delta C_{ncg} = \frac{\Delta N_{cg}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b} = \frac{S_H l_H}{S b} a_H \tau_H \operatorname{sen}\lambda \, \delta_r$$

$$\boxed{C_{n\delta_r} = \frac{S_H l_H}{S b} a_H \tau_H \operatorname{sen}\lambda}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} S_H l_H a_H \tau_e &= S_H l_H a_H \tau_H \cos\lambda \\ S_V l_V a_V \tau_r &= S_H l_H a_H \tau_H \operatorname{sen}\lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Diferencia sólo en superficies}$$

$$\left.\begin{aligned} S_H &= S_H \cos\lambda \\ S_V &= S_H \operatorname{sen}\lambda \end{aligned}\right\}$$

$m_{conv} = 2(S_H + S_V)$ | $\frac{S_{HV}}{\ldots}$ = $\frac{S_H}{\ldots}$ = $\frac{1}{\ldots}$ ~ 1

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 11.06.12
E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

**PROBLEMA 2º**

Un avión turbohélice de dos motores, tal y como el mostrado en la figura, efectúa una subida rectilínea simétrica estacionaria con el motor izquierdo parado y con potencia en el motor derecho, $P_m$, constante y conocida.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo: la distancia $d$; el peso del avión $W$ constante; los coeficientes constantes de la polar parabólica, $C_{D0}$, $k$; las características aerodinámicas expresadas en los ejes estabilidad de la subida; $C_{Y\delta_a}=0$, $C_{n\delta_a}<0$; etc.).

b) La hélice gira a derechas (vista desde atrás), con velocidad angular $\omega$ y con rendimiento propulsivo $\eta_p$ constantes y conocidos; la tracción que genera la hélice es paralela al eje $x_s$ y está contenida en el plano $x_s$-$y_s$; el efecto del par motor del turbohélice "vivo" sobre el equilibrio de momentos de balance del avión no es despreciable.

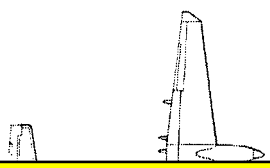
c) La densidad del aire es una constante conocida y todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

Se pide:

1º) Plantear el sistema dinámico de ecuaciones de fuerzas y momentos, en ejes estabilidad de la subida.

2º) Obtener una ecuación que permita calcular la velocidad de vuelo, $V_{\gamma_{max}}$, a imponer por el piloto para maximizar el ángulo de asiento de velocidad.

3º) Para la velocidad de vuelo calculada en el apartado anterior, determinar la deflexión de alerones, $\delta_a$, la deflexión del timón de profundidad, $\delta_e$, la deflexión del timón de dirección, $\delta_r$, y el ángulo de balance, $\phi$. Indicar el signo de estas variables.





TIEMPO CONCEDIDO: 1h