MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

Curso 2020/2021

PRÁCTICAS PARA ENTREGAR

1.(0.5 ptos) Programa una variante de eliminación gaussiana para un sistema $Ax = b$ de n ecuaciones lineales en la que, cuando deseamos anular elementos en la columna k, tomamos como pivote el elemento de máximo valor absoluto de entre los elementos a_{ik} con $i \in \{k, \dots, n\}$. Así conseguimos evitar dividir por números no nulos pero sí muy pequeños. Ten en cuenta que habrás de intercambiar filas tanto en A como en b.
Aplícalo al caso particular:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 9 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array}\right\}$$

2.(1 pto) Dada una matriz invertible A de tamaño n, descomponla en el producto de una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R utilizando el siguiente procedimiento: vamos a ir modificando en cada paso una columna de A de manera que sea ortogonal a todas las demás y que tenga norma euclídea igual a 1. Cada una de esas columnas “arregladas”será la columna correspondiente de Q y los elementos de R también se irán generando en dicho proceso. Al cabo de k pasos tendremos la matriz

$$(Q_1 \dots Q_{k-1} A_k^{(k)} \dots A_n^{(k)})$$

donde $\{Q_i\}_{i=1}^{k-1}$ son las columnas de Q que ya hemos generado hasta ese momento y $\{A_j^{(k))}\}_{j=k}^{n}$ son las columnas de A que han ido siendo modificadas pero que aún faltan por “arreglar”. Esto se realiza de la siguiente manera:

$$r_{kk} = \|A_k^{(k)}\|_2 \qquad Q_k = \frac{A_k^{(k)}}{r_{kk}} \qquad r_{kj} = Q_k^T A_j^{(k)} \qquad A_j^{(k+1)} = A_j^{(k)} - r_{kj} Q_k \text{ con } j \in \{k+1, \dots, n\}$$

habiendo llamado r_{kj} al elemento de R situado en la fila k, columna j.
Si tenemos un sistema $Ax = b$, una vez hecha esta descomposición, podemos reescribirlo como $QRx = b$. Ya que Q es ortogonal, cumplirá que $Q^{(-1)} = Q^T$, con lo que podremos dejarlo en la forma $Rx = Q^T b$, que es un sistema triangular superior, y sobre él puedes ejecutar tu programa de sustitución regresiva para encontrar la solución del sistema. Aplícalo al problema 7 de la Hoja 1

3.(1 pto) El método de la potencia sirve para encontrar el autovalor (si es único) de mayor valor absoluto de una matriz A. Consiste en lo siguiente:

$$x^{(0)} \mid \|x\|_\infty = 1 \to y^{(1)} = Ax^{(0)} \to p = \min\{p_i \mid \|y^{(1)}\|_\infty = |y_{p_i}|\} \to \lambda^{(1)} = y_p^{(1)} \to x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y_p^{(1)}}$$

siguiendo así hasta que $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < \epsilon$, para un cierto ϵ elegido de antemano. Al final, el último λ nos dará el autovalor buscado, y el último x será un autovector asociado a él.
Escribe un *script* programándolo en general y luego aplícalo a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

tomando $x^{(0)} = (0, 0, 1, 0)$ como vector inicial de la iteración y $\epsilon = 10^{-8}$ para el criterio de parada. ¿Cuántas iteraciones necesitas para converger?

4.(0.5 ptos) La sucesión de Fibonacci viene dada de la siguiente forma:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n \geq 3.$$

Escribe una `function` recursiva (es decir, que se llame a sí misma) para generar los 20 primeros términos, y represéntalos. Calcula los cocientes entre cada dos de ellos consecutivos $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \text{ para } n = 3, \ldots, 20\right)$ y comprueba que se acercan al número áureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Puedes también representar las diferencias de cada uno de los cocientes hallados con Φ y comprobar que tienden a 0

5.(0.75 ptos) El espacio vertical recorrido por un proyectil desde su lanzamiento se puede expresar mediante la fórmula:

$$y(t) = 4605(1 - e^{-t/15}) - 147t.$$

Averigua en qué instante la altura alcanzada será máxima y cuál será esta. Utiliza para ello el siguiente método: para encontrar un valor de t que haga $f(t) = 0$, siendo f dos veces derivable y continua, construye la sucesión $\left\{t_n = t_{n-1} - \frac{f(t_{n-1})}{f'(t_{n-1})}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Detén la iteración cuando, para un ϵ prefijado, se cumpla que $\left|\frac{t_n - t_{n-1}}{t_n}\right| < \epsilon$.
En el presente caso habrás de aplicar el método a $f(t) = y'(t)$. Elige $t_0 = 0, \epsilon = 10^{-4}$. ¿Cuántos pasos de la iteración has necesitado para converger? ¿Depende este número fuertemente del punto inicial elegido? ¿Y de ϵ?

6.(0.75 ptos) El método *hit or miss* sirve para estimar el área de una figura de la siguiente manera: se inscribe dentro de un rectángulo, se "lanzan" puntos aleatoriamente en el rectángulo y la proporción de ellos que caigan dentro de la figura será una aproximación al área de la misma. Los puntos aleatorios se generan mediante una distribución uniforme, que en Matlab se crea con el comando `unifrnd`.

Estima el valor de π utilizando este método para la figura formada por el círculo centrado en el origen de radio unidad (el área de la región que delimita es justamente π), inscrito en el cuadrado de menor área que lo contiene.

Aumenta progresivamente el número de puntos aleatorios utilizados. ¿Qué observas?