

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial Euclídeo. Dados dos endomorfismos ortogonales $f : V \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow V$, su composición es también un endomorfismo ortogonal. En efecto, para cualquiera $u, v \in V$ se tiene que

$$\langle (f \circ g)(u), (f \circ g)(v) \rangle = \langle f(g(u)), f(g(v)) \rangle = \langle g(u), g(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Ejemplo 1 En \mathbb{R}^2 es fácil decidir cual será el resultado de una composición de endomorfismos ortogonales si tenemos en cuenta si conservan o invierten la orientación. Por ejemplo, dados dos giros cuya matrices respecto de la base canónica son respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

sabemos que su composición tendrá matriz AC respecto de la base canónica. Es decir, que $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 1$, y por tanto ya podemos decir que no será una simetría (las cuales tiene determinante -1 , excepto la simetría central). Así que la composición será también un giro, de hecho, si usamos las fórmulas trigonométricas de cosenos y senos de una suma de ángulos, deducimos que

$$AC = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

es decir, es el giro de ángulo $\alpha + \beta$. Por ejemplo, podemos componer el giro σ de ángulo $\frac{\pi}{4}$, cuya matriz es,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

consigo mismo, es decir, podemos considerar σ^2 , cuyo resultado será evidentemente el giro de ángulo $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ y cuya matriz es

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De hecho, la composición σ^8 nos da el giro de ángulo $8\frac{\pi}{4} = 2\pi$, es decir, la identidad. O dicho de otra forma,

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right)^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2 De nuevo en \mathbb{R}^2 , si componemos un giro con una simetría axial, ¿qué tipo de endomorfismo obtendremos? El giro conserva la orientación (es decir, tiene una matriz de determinante 1), y la simetría axial lo invierte (es decir, tiene una matriz de determinante -1), así que su composición también la invierte (su determinante será -1 puesto que es el producto de los dos anteriores). Así que la única posibilidad es que la composición sea también una simetría axial.

Por ejemplo, si consideramos el giro $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de ángulo $\frac{\pi}{2}$ con la simetría $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respecto de la recta $y = 0$, obtenemos que $s \circ \sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de nuevo una simetría axial, ¿pero respecto a qué recta? Para contestar esta pregunta debemos averiguar qué vectores quedan fijos. El giro σ convierte el vector $(-1, 1)$ en el vector $(-1, -1)$, y la simetría s convierte $(-1, -1)$ en el vector $(-1, 1)$. Así pues, $s \circ \sigma$ deja fijos los vectores en la recta

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

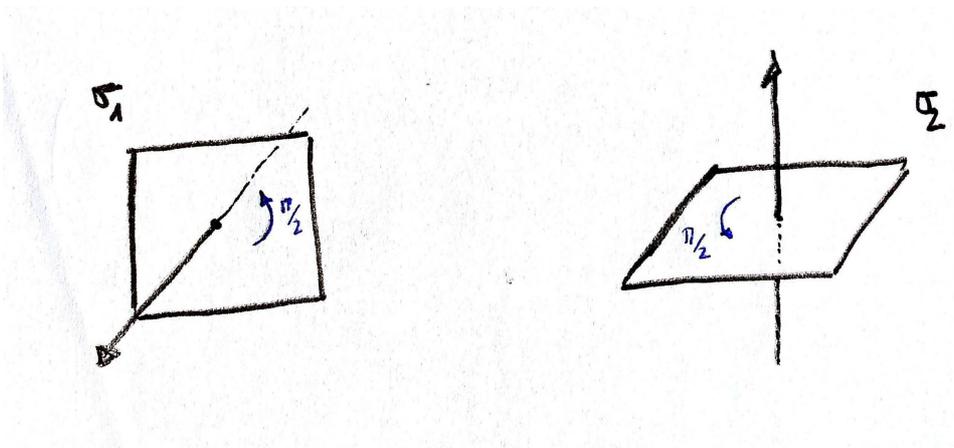
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Ejemplo 3 En \mathbb{R}^3 , por ejemplo, la rotación de dos rotaciones axiales nos debe quedar una rotación axial. Por ejemplo, si componemos las rotaciones σ_1 y σ_2 con eje $x = y = 0$ y ángulos $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$, su composición $\sigma_1 \circ \sigma_2$ es la rotación axial respecto del eje $x = y = 0$ de ángulo $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ (la cual coincide con la simetría ortogonal respecto de la recta $x = y = 0$).

Otro ejemplo, sean $\sigma_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\sigma_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ las rotaciones axiales cuyas matrices respecto de la base canónica son respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La composición $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ tiene matriz

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el eje de la rotación axial $\sigma_1 \circ \sigma_2$ tan solo tenemos que calcular los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = L[(1, 1, 1)]$$

Por tanto el giro se produce básicamente en el plano $[V_1]^\perp = \{x + y + z = 0\}$. Una base ortonormal de $[V_1]^\perp$ es

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

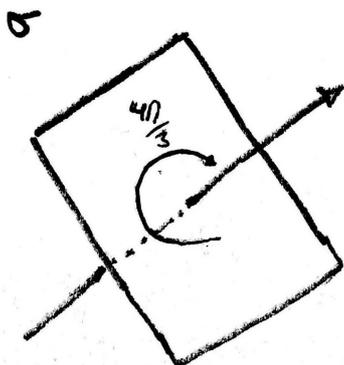
La matriz de $\sigma_2 \circ \sigma_1$ respecto de la base ortonormal de \mathbb{R}^3

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



Ejercicio 1 Con los datos del ejemplo anterior, estudiar la composición $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70