ACCIONES

1. Definición y objetivos

Una *acción* de un grupo G en el conjunto X es un homomorfismo de G en $\mathrm{Sym}(X)$, es decir

$$f : G \to \mathrm{Sym}(X)$$

que envía g a la permutación $\widehat{g}$, con $\widehat{g_1 g_2} = \widehat{g_1} \circ \widehat{g_2}$, es decir envía el producto $g_1 g_2$ a la composición de las permutaciones correspondientes.

Una acción nos permite ver elementos de G como permutaciones, y usando nuestro conocimiento de las permutaciones eso nos puede ayudar a sacar información de G.

Un caso especial especial es cuando f es un encaje. En este caso, que se denomina *acción fiel*, tenemos que G es ismorfo al grupo de permutaciones $f(G)$, es decir $G \lesssim \mathrm{Sym}(X)$. En este caso podemos olvidarnos de G y trabajar con el grupo de permutaciones.

En el caso general, tenemos que $G/N \lesssim \mathrm{Sym}(X)$ con $N = \ker f$, luego vemos un cociente del grupo como permutaciones, y además este caso nos sirve para encontrar un subgrupo normal N de G.

Teniendo esto en cuenta, podemos plantearnos para un grupo G dos objetivos:

- (Acciones fieles) Encajar G como un subgrupo de un grupo simétrico lo más pequeño posible (ya que cuanto más pequeño será más manejable), es decir $G \lesssim \mathrm{Sym}(X)$ con X lo más pequeño posible.
- (Acciones no fieles) Encontra subgrupos normales de G viendo que actua sobre conjuntos X pequeños de forma que no pueda ser que $G \lesssim \mathrm{Sym}(X)$ y así $G/N \lesssim \mathrm{Sym}(X)$ con N el núcleo *no trivial* de la acción.

2. Ejemplos con grupos de isometrías

Un caso que ya hemos visto es el de las isometrías. Por ejemplo, si $C \subset \mathbb{R}^2$ es el cuadrado de vértices $V = \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$, directamente tenemos que $D_4 = \mathrm{Isom}(C)$ es un subgrupo de $\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^2)$, luego D_4 actua sobre $\mathbb{R}^2$. Pero este conjunto es muy grande; nos gustaría encontrar un encaje de D_4 en un grupo simétrico más pequeño. Podemos fijarnos en que todo elemento de D_4 permuta los vértices del cuadrado. Así, tenemos una acción de G en V

$$D_4 \to \mathrm{Sym}(V) \cong S_4$$

que envía una isometría a su restricción a V, $g \mapsto \widehat{g} = g|_V$. Es acción porque trivialmente $(f \circ g)|_V = f|_V \circ g|_V$. Además, es un encaje porque para definir de manera única una aplicación lineal sólo necesitamos las imágenes de los vectores de una base, y como toda isometría del cuadrado envía el 0 al 0, $g|_V$ nos da la imágen de dos vectores independientes.

Así, si identificamos $(1,0) \equiv 1$, $(0,1) \equiv 2$, $(-1,0) \equiv 3$, $(0,-1) \equiv 4$, tenemos una identificación de D_4 con un subgrupo de S_4 de orden 8. De hecho

$$\widehat{g_{\pi/2}} = (1234) \qquad \widehat{r_0} = (24),$$

y como dichos elementos generan D_4 vemos que el subgrupo en cuestión es $G = \langle (1234), (24) \rangle$. Podemos observar que (24) tiene el mismo orden que r_0 y (1234) el mismo que $g_{\pi/2}$, y además

$$(24)(1234)(24)^{-1} = (1432) = (4321) = (1234)^{-1}$$

que cuadra con la ecuación que conocemos

$$r_0 g_{\pi/2} r_0^{-1} = g_{-\pi/2}.$$

Sabemos que esto tiene que ser así porque $D_4 \cong G$.

Podemos proceder de manera similar con otras figuras de $\mathbb{R}^d$. En particular, se puede ver que $D_n \lesssim S_n$. La pregunta es si podemos meter D_n en un S_k más pequeño. Veamos que a veces sí. En el caso de D_6, tenemos que $D_6 = 12$. Como $|S_3| = 6$, es imposible meterlo en S_3. $|S_4| = 24$, luego parece que podría ser posible, pero no ya que el único subgrupo de S_4 de orden 12 es A_4 y A_4 no tiene subgrupos de orden 6, mientras que D_6 sí. Así, la pregunta sería si podemos meterlo en S_5.

Podemos ver D_6 como el grupo de isometrías de un hexágono regular centrado en $(0,0)$ y vértices $v_1 = (1,0), v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, numerándolo en el sentido contrario a las agujas del reloj. Ya sabemos que D_6 permuta los vértices, y por eso $D_6 \lesssim S_6$, pero queremos buscar algo mejor. La clave es darse cuenta de que las isometrías envían líneas a líneas. Así, consideramos las diagonales del hexágono, con d_1 la que va de v_1 a v_4, d_2 la que va de v_2 a v_5 y d_3 la que va de v_3 a v_6. Como las isometrías del hexágono permutan vértices y envían líneas a líneas, deben permutar dichas diagonales. Así, vemos que D_6 actua sobre el conjunto $L = \{d_1, d_2, d_3\}$ de diagonales. Esto nos da un homomorfismo

$$D_6 \to \mathrm{Sym}(L) \cong S_3$$

Pero este homomorfismo no es encaje, ya que su núcleo N corresponde a las isometrías que fijan las diagonales, luego $N = \langle g_\pi \rangle$. Con esto sólo vemos que $\langle g_\pi \rangle$ es un subgrupo normal de D_6.

Para conseguir una acción fiel deberíamos aumentar el conjunto L. Siguiendo con la idea de las líneas, podemos considerar los triángulos equiláteros t_1 de vértices v_1, v_3, v_5 y t_2 de vértices v_3, v_5, v_6. Como las isometrías preservan distancias y ángulos, van a enviar un triángulo equilatero a otro, y como permuta vértices debe permutar t_1 y t_2. Así, si $T = \{t_1, t_2\}$ vemos que tenemos la acción

$$D_6 \to \mathrm{Sym}(T) \cong S_2$$

que claramente no puede ser fiel porque $|D_6| > |S_2|$. De hecho el núcleo debe tener orden 6, y resulta ser el subgrupo $M = \langle g_{2\pi/3}, r_0 \rangle$, luego vemos que hemos descubierto otro subgrupo normal de G.

Ninguna de las dos acciones anteriores era fiel, pero si las unimos en una vamos a obtener una fiel. Es decir, si consideramos el conjunto

$$X = \{d_1, d_2, d_3, t_1, t_2\} = L \cup T$$

de diagonales y triángulos, tenemos la acción

$$D_6 \to \mathrm{Sym}(X) \cong S_5.$$

Este sí va a ser encaje porque $\widehat{g_\pi}(t_1) = t_2$. Así, vemos que $D_6 \lesssim S_5$, e identificando los elementos de X en con números en el orden en que están escritos vemos que

$$\widehat{g_{2\pi/6}} = (123)(45) \qquad \widehat{r_0} = (23),$$

luego $D_6 \cong \langle (123)(45), (23) \rangle$.

Otro ejemplo sería el grupo de isometrías de un cubo C. Tenemos que $G = \mathrm{Isom}(C) \leq \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^3)$, pero de nuevo podemos hacerlo mejor y ver que G permuta los vértices del cubo y dicha acción es fiel, lo que implica $G \lesssim S_8$. Pero G también permuta las caras del cubo, y es fácil ver que dicha acción es fiel, lo que da $G \lesssim S_6$ que es mucho mejor que lo que daba la acción sobre los vértices.

G también actua sobre las 4 diagonales del cubo, pero dicha acción no es fiel porque la reflexión $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ las deja fijas. En cambio, si sólo miro al grupo de isometrías propias $G \cap \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ dicha acción es fiel luego es isomorfo a un subgrupo de S_4 (que resulta ser S_4).

3. Órbitas y estabilizadores

Si tenemos una acción de G en X, tenemos un grupo de permutaciones $\widehat{G} \leq \mathrm{Sym}(X)$, que es la imagen de la acción. Eso permite extender los conceptos que vimos para grupos de permutaciones a G. Un subconjunto G-invariante de X sería un subconjunto $\widehat{G}$-invariante de X, lo mismo para subonjuntos irreducibles y

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_{\widehat{G}}(x) \qquad G_x = \{g \in G : \widehat{g} \in G_x\},$$

es decir el estabilizador de $x \in X$ en G_x es la preimagen de $\widehat{G}_x$.

Para cualquier homomorfismo $f : G \to H$ y cualquier subgrupo $J \leq H$ tenemos que $f^{-1}J \leq G$ y $|H/J| = |f^{-1}H/f^{-1}J|$. Eso nos da

$$|G/G_x| = |\widehat{G}/\widehat{G}_x| = |\mathrm{Orb}_{\widehat{G}}(x)| = |\mathrm{Orb}_G(x)|,$$

luego se sigue cumpliendo la relación entre órbita y estabilizador que ya teníamos para grupos de permutaciones. En particular, *el tamaño de una órbita divide al orden del grupo G*. También X se parte en órbitas, y si sólo queda una órbita decimos que la acción es transitiva.

Por ejemplo en el caso de la acción

$$D_6 \to \mathrm{Sym}(X)$$

que hemos visto antes, tenemos que

$$\mathrm{Orb}_{D_6}(d_1) = \{d_1, d_2, d_3\} \qquad \mathrm{Orb}_{D_6}(t_1) = \{t_1, t_2\},$$

y

$$(D_6)_{d_1} = D_2 \qquad (D_6)_{t_1} = D_3$$

Otro ejemplo es $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$, que como son aplicaciones lineales de $\mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$, claramente actuan sobre $\mathbb{Z}_3^2$, luego tenemos la acción

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3) \to \mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_3^2).$$

Tenemos que en la órbita del $(0, 0)$ sólo está el mismo. Por otra parte, para calcular la órbita del $(1, 0)$ observamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

y como para cualquier $(a, b) \neq (0, 0)$ existen c, d tales que $ad - bc = 1$ vemos que

$$\mathrm{Orb}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_3)}((1, 0)) = \mathbb{Z}_3^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

así, esta órbita es de tamaño 8, por lo que 8 debe dividir al orden de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$. Esto es cierto ya que dicho grupo tiene 24 elementos. Pero además, vemos que el estabilizador de $(1, 0)$ debe tener orden 3, luego nos permite encontrar elmentos de orden 3, que de hecho son

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3)_{(1,0)} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

4. Acciones derivadas

Si tenemos una acción de un grupo G en un conjunto X

$$G \to \mathrm{Sym}(X)$$

vamos a ver cómo construir nuevas acciones a partir de esa. Por una parte, si la acción no es transitiva entonces, podemos encontra un subconjunto $Y \subset X$ que es G-invariante, por lo que podríamos considerar la *restricción* de la acción anterior

$$G \to \mathrm{Sym}(Y),$$

que es fiel si lo era la original. En particular, tomando Y irreducibles, $Y = \mathrm{Orb}_G(x)$, con $x \in X$, tendríamos

$$G \to \mathrm{Sym}(\mathrm{Orb}_G(x)).$$

Por ejemplo, en la sección anterior vimos una acción $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3) \to \mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_3^2) \cong S_9$, y restrigiendo a la órbita de $(1,0)$ vemos que obtenemos la acción

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3) \hookrightarrow \mathrm{Sym}(\mathrm{Orb}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_3)}((1,0)) \cong S_8$$

luego hemos metido el conjunto en un grupo simétrico más pequeño.

Otra acción natural que podemos construir es sobre los subconjuntos de X, es decir

$$G \to \mathrm{Sym}(P(X))$$

definida por $\widehat{g}(Y) = \{\widehat{g}(y) : y \in Y\}$, para todo $Y \subset X$.

Vamos a ver que las acciones que vimos para D_6 provienen de acciones derivadas, partiendo de la acción $D_6 \to \mathrm{Sym}(V)$. A partir de ella tenemos la acción

$$D_6 \to \mathrm{Sym}(P(V)).$$

Si miramos a la órbita del conjunto $\{v_1, v_4\}$ bajo esta acción, vemos que queda

$$\mathrm{Orb}_{D_6}(\{v_1, v_4\}) = \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_6\}\}$$

luego restringiendo la acción a dicha órbita obtenemos

$$D_6 \to \mathrm{Sym}(\mathrm{Orb}_{D_6}) \cong \mathrm{Sym}(L)$$

que es similar a la acción sobre diagonales que vimos.

De la misma forma, si miramos a la órbita de $\{v_1, v_3, v_5\}$ tenemos que queda

$$\mathrm{Orb}_{D_6}(\{v_1, v_3, v_5\}) = \{\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\}\}$$

luego restringiendo la acción a ella obtenemos una acción similar a la de los triángulos que vimos anteriormente.

Además, si G actua sobre X, también actua sobre productos de X. También, si G actua sobre X_1 y sobre X_2, entonces podemos definir una acción sobre la unión disjunta de X_1 y X_2. Esto es lo que hicimos en el caso de las diagonales y los triángulos para D_6.

Un caso particula de lo que hemos visto es el siguiente. Si tenemos una partición de X, $X = \cup_{s\in S} X_s$, y se cumple que $\widehat{g}(X_s)$ es alguno de los conjuntos de la partición $X_{\tilde{g}(s)}$ para todo s y para cada $g \in G$ entonces G actua sobre el conjunto de conjuntos de la partición

$$\tilde{X} = \{X_s : s \in S\}$$

simplemente enviando X_s a $X_{\tilde{g}(s)}$. Esto es lo mismo que decir que si G respeta una relación de equivalencia en X, entonces G actua sobre el conjunto de clases $X/\sim$.

Por ejemplo, $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$ actua sobre el conjunto X de matrices dos por dos (por multiplicación a izquierda). X tiene tamaño $3^4 = 81$. Pero vemos que si $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$ entonces $\det(AX) = \det(X)$ por lo que G envía matrices de determinante m a matrices determinante m. Por eso podemos partir $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$ con X_m las matrices de determinante m, y vemos que G actua sobre el conjunto

$$\tilde{X} = \{X_0, X_1, X_2\}$$

que es de tamaño 3. Luego pasamos de un homomorfismo a S_{81} a un homomorfismo a S_3.

5. Acciones abstractas

Hemos visto acciones de grupos G de isometrías y de matrices. Pero, ¿podemos hacer los mismo para otros grupos? Sí que podemos, ya que un grupo G siempre actua sobre sí mismo, es decir con $X = G$; esta es la llamada *acción regular* del grupo

$$G \to \mathrm{Sym}(G)$$

definida por $\widehat{g}(g_1) = gg_1$. Es un homomorfismo porque $\widehat{gh}(g_1) = (gh)g_1 = g(hg_1) = \widehat{g}(\widehat{h}(g_1))$. $\widehat{g}$ es una función biyectiva porque para todo $g_2 \in G$ existe un único $g_1 \in G$ tal que $gg_1 = g_2$ (que es $g_1 = g^{-1}g_2$).

Además, es una acción fiel y transitiva, porque $gg_1 = g_1$ implica que $g = e$, luego en el núcleo sólo está e. Así, vemos que

$$G \lesssim \mathrm{Sym}(G),$$

es decir, *todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.* Este es el llamado Teorema de Cayley, que nos dice que nuestra definición abstracta de grupo al final no da lugar a nuevos grupos.

Veamos un ejemplo con $G = \mathbb{Z}_8^\times = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$. Tenemos que cualquier de ellos permuta al resto por multiplicación, por ejemplo $\overline{31} = \overline{3}$, $\overline{33} = \overline{1}$, $\overline{35} = \overline{7}$, $\overline{37} = \overline{5}$, luego

$$\widehat{\overline{3}} = (\overline{1}\overline{3})(\overline{5}\overline{7}).$$

De igual forma $\widehat{\overline{5}} = (\overline{1}\overline{5})(\overline{3}\overline{7})$ y $\widehat{\overline{7}} = (\overline{1}\overline{7})(\overline{3}\overline{5})$. Así, vemos que

$$\mathbb{Z}_8^\times \cong \{I, (\overline{1}\overline{3})(\overline{5}\overline{7}), (\overline{1}\overline{5})(\overline{3}\overline{7}), (\overline{1}\overline{7})(\overline{3}\overline{5})\} \le \mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_8^\times) \cong S_4.$$

En general, podemos meter cualquier grupo de orden n en S_n. La pega de esto es que S_n es mucho más grande que el grupo original. Por ejemplo, si usamos esta acción con D_6 tendríamos que $D_6 \lesssim S_{12}$, pero ya vimos que tomando la acción adecuada $D_6 \lesssim S_5$.

Una acción derivada de la anterior es la acción sobre cocientes. Para cualquier subgrupo $H \le G$, tenemos la acción

$$G \to \mathrm{Sym}(G/H)$$

que viene de la acción regular simplemente considerando la relación de equivalencia dada por clases a izquierda. Es decir

$$\widehat{g}(g_1H) = gg_1H.$$

Claramente $\widehat{g}$ lleva clases a clases. Es una acción transitiva pero en general no fiel. Así, si tenemos un subgrupo H grande, esto nos daría una acción sobre un conjunto pequeño $X = G/H$, lo que puede dar lugar a encontrar subgrupos normales de G.

De hecho, el núcleo N de dicho homomorfismo es un subgrupo normal que está contenido siempre en H, ya que si $g \notin H$ entonces $\widehat{g}(H) = gH \neq H$, luego $\widehat{g} \neq Id$. A N se le llama el *corazón* de H en G.

Por ejemplo si $G = D_6$ y $H = D_2 = \{g_0, g_\pi, r_0, r_{\pi/2}\}$ (que no es normal), tenemos la acción

$$D_6 \to \mathrm{Sym}(D_6/D_2) \cong S_3$$

que no puede ser fiel porque D_6 es más grande que S_3, luego el núcleo $N \le D_2$ (el corazón de D_2) es no trivial. De hecho, vemos que

$$D_6/D_2 = \{D_2, g_{2\pi/6}D_2, g_{-2\pi/6}D_2\} \equiv \{1, 2, 3\}.$$

Para calcular el corazón de D_2, observamos que $\widehat{r_0} = \widehat{r_{\pi/2}} = (23)$, $\widehat{g_\pi} = \widehat{g_0} = Id$, luego $N = \{g_0, g_\pi\}$.

Para ver que $\widehat{r_0} = (23)$, sólo hay que observar que

$$r_0(D_2) = D_2 \qquad \text{porque } r_0 \in D_2$$

$$r_0(g_{2\pi/6}D_2) = g_{-2\pi/6}r_0D_2 = g_{-2\pi/6}D_2$$
$$r_0(g_{-2\pi/6}D_2) = g_{2\pi/6}r_0D_2 = g_{2\pi/6}D_2.$$