Sistemas lineales. 1^a parte

- Consideremos un sistema lineal de k incognitas y m ecuaciones: Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ verificando

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + ... + a_{1k}x_k & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mk}x_k & = & b_m \end{array}\right\}$$

- Matricialmente: Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ verificando

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Por ejemplo

Sistemas lineales. 1^a parte

- Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ verificando

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- En general si denotamos el vector termino independiente y las columnas

$$\mathbf{b} = (b_1, ..., b_m),\ \mathbf{a}_i = (a_{1i}, ..., a_{mi}) \text{ para todo } i = 1, ..., k$$

resolver el sistema lineal es equivalente a encontrar los coeficientes de una combinación lineal. En este sentido, los siguientes enunciados son equivalentes:

Sistemas lineales. Combinaciones lineales

- Por ejemplo, en el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

podemos encontrar diferentes combinaciones lineales (soluciones)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius

- En general, podemos razonar que los siguientes enunciados son equivalentes:
  - $AX = B$ tiene solución.
  - $\mathbf{b} \in G[\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}]$
  - $\text{rango}(\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}\}) = \text{rango}(\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\})$
- En terminos de matrices

$$\text{rango}(A^*) = \text{rango}\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & b_m \end{array}\right)$$

$$\|$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius

$$\begin{aligned} \mathit{rango}(A^*) &= \mathit{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & b_m \end{array} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \| \\ \mathit{rango}(A) &= \mathit{rango} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tma Rouché-Frobenius: El sistema lineal $AX = B$ tiene solución si y solamente si $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A)$

- Consecuencia: El sistema lineal **no** tiene solución si y solamente

Por ejemplo, en el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

se verifica la condición de compatibilidad

$$\text{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) = 2 = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

UNED

En cambio en en el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2 \\ -8x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -8 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

no se cumple condición de compatibilidad

$$rango \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -8 & 2 \\ 5 & 3 & -8 & 2 \\ -8 & 5 & 3 & 2 \end{array} \right) = 3 \neq 2 = rango \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -8 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

el sistema es incom...

Caso $\text{rango}(A^*) = \text{rango}(A) = k$

Tma Rouché-Frobenius: Si $\text{rango}(A^*) = \text{rango}(A) = k$, entonces el sistema tiene solución única (*Sistema compatible determinado*)

- Para un sistema lineal cuadrado $m = k$ recordemos que no es más que multiplicar a ambos lado por la inversa

$$AX = B \longleftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \longleftrightarrow X = A^{-1}B$$

Por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & -1 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$$