Variedades diferenciables

Número 1. Probar que un difeomorfismo local $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de hecho un difeomorfismo sobre un intervalo abierto. ¿Se puede generalizar este hecho a dimensión superior?

Número 2. Construir un difeomorfismo de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ sobre el exterior de la bola unidad $\|x\| > 1$ y otro sobre la corona $1 < \|x\| < 2$.

Número 3. Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ la unión de todas las rectas $y = kx$, $k \in \mathbb{Z}$. ¿Es $\mathbb{R}^2 \setminus E$ una variedad?

Número 4. Demostrar que la *cúspide* $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 = 0\}$ no es una variedad diferenciable.

Número 5. Demostrar que el cono $x^2 + y^2 = z^2$ de $\mathbb{R}^3$ no es una variedad diferenciable.

Número 6. Construir para cada entero $r > 0$ un difeomorfismo local suprayectivo $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que cada $b \in \mathbb{S}^1$ tenga exactamente r preimágenes. (Considerar $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ y utilizar $(x, y) \equiv z \mapsto z^r$.)

Número 7. Identificamos $\mathbb{R}^2$ con el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos usando partes reales e imaginarias, y sea P un polinomio mónico en una indeterminada con coeficientes complejos. Mostrar que $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto P(z)$ es una aplicación diferenciable, y que es un difeomorfismo local en todos los puntos salvo una cantidad finita. ¿Cuáles son esos puntos excepcionales?

Número 8. Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto definido por $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2 - 1$, $x_{n+1} > 0$. Probar que la *pseudoinversión*

$$f(x) = \Big(\frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1} \Big)$$

induce un difeomorfismo de M sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, e identificar tal subconjunto.

Número 9. Identificamos $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el conjunto de las aplicaciones lineales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, y denotamos M el conjunto de las que dejan invariante la parábola $y = x^2$. Probar que M es una curva difeomorfa a la propia parábola. ¿Qué obtenemos si sustituimos la parábola por la hipérbola $xy = 1$?

Número 10. Demostrar que el *semicono* $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$ no es una variedad diferenciable.

Número 11. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución generada por una curva $x = f(z) > 0, y = 0$, al girar alrededor del eje de las z. Mostrar que M tiene la ecuación global $x^2 + y^2 = f(z)^2$, y que la aplicación $x = f(\rho)\cos\theta$, $y = f(\rho)\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \rho$ parametriza M. ¿Cómo debe interpretarse esta afirmación en este caso?

Número 12. Sea T el toro de revolución generado al girar alrededor del eje de las z's la circunferencia $y = 0, (x - 2)^2 + z^2 = 1$.

(1) Construir un difeomorfismo local suprayectivo y periódico $\varphi : \mathbb{R}^2 \to T \subset \mathbb{R}^3$.
(2) Utilizar φ para definir un difeomorfismo de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ sobre T.
(3) Utilizar φ para recubrir T con abiertos difeomorfos a cilindros $\mathbb{S}^1 \times (a, b)$.
(4) Concluir que T se puede cubrir con dos parametrizaciones.

Número 13. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ de ecuaciones

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \mathrm{sen}\, x \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos x & -\mathrm{sen}\, x & 0 \\ \mathrm{sen}\, x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} \\ 0 \\ \mathrm{sen}\, \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

Mostrar que la imagen de f es una variedad diferenciable, que se denomina *banda de Möbius*.

Número 14. Demostrar que si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ se anula en un punto $a \in \mathbb{R}^p$ y tiene derivada suprayectiva en ese punto, entonces f cambia de signo en todo entorno de a en $\mathbb{R}^p$. Deducir que si una hipersuperficie de un espacio afín tiene una ecuación global, entonces lo desconecta.

Número 15. Demostrar que el conjunto $M \subset \mathbb{R}^4$ de las matrices que representan isometrías lineales es una intersección completa de codimensión 3, y que tiene dos componentes conexas, difeomorfas ambas a la circunferencia.

Número 16. Construir una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = t$ para $t \leq 1$, $f(t) \geq t$ para $1 \leq t \leq 2$, y $f(t) = 2$ para $t \geq 2$.

Número 17. Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto $V \subset \mathbb{R}^p$, y sean $a < b$ tales que $d_x f$ es suprayectiva si $f(x)=a$ o $f(x)=b$. Probar que las inecuaciones $a\le f\le b$ definen una variedad diferenciable con borde la unión de las dos hipersuperficies $f=a$ y $f=b$.

Número 18. Demostrar que el *tronco de cono* $M: x^2+y^2=z^2$, $0<a\le z\le b$, y el *tronco de cilindro* $N: x^2+y^2=b^2$, $a\le z\le b$, son dos variedades con borde, ambas difeomorfas a una corona plana cerrada.

Número 19. Se llama *toro sólido* al conjunto $M\subset\mathbb{R}^3$ generado al girar alrededor del eje de las z's el disco cerrado $\mathbb{D}: y=0, (x-2)^2+z^2\le 1$. Construir un difeomorfismo de $\mathbb{D}\times\mathbb{S}^1$ sobre M, y deducir que M es una variedad con borde difeomorfo a un toro de revolución.

Número 20. Se considera la aplicación $f:\mathbb{R}\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{R}^3$ del número 13, cuya imagen M es una banda de Möbius. Demostrar que la adherencia de M en $\mathbb{R}^3$ es una variedad con borde, cuyo interior como tal es M, y cuyo borde es difeomorfo a una circunferencia.

Cálculo en variedades

Número 1. Sea $M\subset\mathbb{R}^3$ la superficie de ecuación $x^3+y^3+z^3-3xyz=2$. Calcular el plano tangente H a M en el punto $a=(1,1,0)\in M$ y construir una base de H mediante una parametrización φ de M en a.

Número 2. Sea $M\subset\mathbb{R}^{3\times 3}$ la variedad de las matrices cuadradas de orden 3 y rango 1, y $A\in M$ la matriz cuyos coeficientes son todos 1. Calcular el espacio tangente a M en A.

Número 3. Demostrar que el conjunto $M\subset\mathbb{R}^4$ de las matrices $A\ne 0$ cuadradas de orden 2 con determinante y traza nulos es una superficie diferenciable y calcular su plano tangente en el punto $A=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$.

Número 4. Se llama *paraguas de Whitney* al conjunto $X\subset\mathbb{R}^3$ dado por $x^2-zy^2=0$. Demostrar que $M=X\setminus\{y=0\}$ es una variedad diferenciable, pero que X no lo es en ningún punto $(0,0,c)$, $c>0$. (Estudiar el límite de los espacios tangentes a M en los puntos $(a,\pm a/\sqrt{c},c)$, cuando $a\to 0$.)

Número 5. Sea $M\subset\mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable de dimensión m y supongamos que los vectores $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^p$ forman una base del espacio tangente a M en un punto dado $a\in M$. Demostrar que existe una parametrización $\varphi:\mathbb{R}^m\to U\subset M$ tal que $\varphi(0)=a$, respecto de la cual sea $u_i=\partial/\partial\mathrm{x}_i|_a$, $1\le i\le m$.

Número 6. Una *variedad topográfica* (o grafo) es una hipersuperficie diferenciable $M\subset\mathbb{R}^{m+1}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ tal que la proyección $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m: x\mapsto x'$ induce un difeomorfismo de M sobre un abierto de $\mathbb{R}^m$. Demostrar que esto equivale a que M sea el grafo $x_{m+1}=f(x')$ de una función diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^m$. Probar que entonces el espacio tangente a M en un punto a es el grafo de la derivada $d_{a'}f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, y tiene por ecuación $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a')x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(a')x_m-x_{m+1}=0$.

Número 7. Sea $M\subset\mathbb{R}^p$ una variedad de dimensión m. Demostrar que el conjunto

$$VM=\{(x,u_1,\dots,u_m)\in M\times\mathbb{R}^p\times\cdots^m\times\mathbb{R}^p: u_1,\dots,u_m \text{ es una base de } T_xM\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión $m(m+1)$.

Número 8. Se consideran las superficies $M,N\subset\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $z=xy$ y $4z=y^2-x^2$ respectivamente, y la aplicación diferenciable $f:M\to N$ dada por $f(x,y,z)=(x-y,x+y,z)$. Calcular la derivada de f en el punto $(1,1,1)$.

Número 9. Sea $\rho:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{S}^n$ la *retracción radial* dada por $x\mapsto x/\|x\|$. Para cada punto $a\in\mathbb{R}^{n+1}, a\ne 0$, sea $\mathbb{S}_a$ la esfera de centro el origen que pasa por a, y $H_a=T_a\mathbb{S}_a$. Mostrar, sin hacer cálculos explícitos, que $d_a\rho(a)=0$ y que $d_a\rho|H_a$ es la homotecia de razón $1/\|a\|$. Obtener con esto la derivada $d_a\rho(u)$.

Número 10. Sea $F:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ la aplicación diferenciable

$$F(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)/\sqrt{x^4+y^4+z^4},$$

y consideremos su restricción $f:\{x^2+y^2=1\}\to\{x^2+y^2+z^2=1\}$. Mostrar sin cálculos que la derivada de F nunca es isomorfismo, y con ellos, que la de f lo es en (x,y,z) si y sólo si $xyz\ne 0$.

Número 11. Sean M una variedad diferenciable y $a\in M$. Demostrar que cualquier forma lineal $L:T_aM\to\mathbb{R}$ es la derivada en a de una función diferenciable $f:M\to\mathbb{R}$.

Número 12. Sean $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la hipersuperficie $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2 - 1$, $x_{n+1} > 0$, y $f : M \to \mathbb{R}^n$ la pseudoinversión de ecuaciones

$$f(x) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1} \right).$$

Calcular la derivada de f en un punto arbitrario $a \in M$, y comprobar que es un isomorfismo lineal.

Número 13. Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable sin borde y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demostrar que si f tiene un extremo local en el punto $a \in M$, entonces $d_a f = 0$, o equivalentemente, que si $d_a f \neq 0$, entonces $f - f(a)$ cambia de signo en cualquier entorno de a. Deducir que si una hipersuperficie de M tiene ecuación global, entonces desconecta M. Utilizar esto para exhibir en un toro de revolución circunferencias que no tengan ecuación global.

Número 14. Sean $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^m$ un sistema de coordenadas en un punto a de M con $\mathtt{x}(a) = 0$. Consideramos la forma bilineal simétrica $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por la matriz $\big(\frac{\partial^2 (f \circ \mathtt{x}^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\mathtt{x}(a))\big)_{i,j}$. Demostrar que si $d_a f = 0$, esta forma bilineal simétrica induce otra forma bilineal simétrica $H_a(f) : T_a M \times T_a M \to \mathbb{R}$ que no depende del sistema de coordenadas $\mathtt{x}$ (denominada *la hessiana*). Mostrar con un ejemplo que eso no es así si $d_a f \neq 0$.

Número 15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación
$f(s,t) = (st + \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}st^2 + \frac{1}{3}t^3, s)$.
¿Es $f(\mathbb{R}^2)$ una variedad diferenciable?

Número 16. Sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad, y $a = (0,0,1) \in \mathbb{S}^2$ su polo norte. Para cada $i = 1,2,3$, sea $\pi_i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ la restricción de la proyección lineal $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_i$. Demostrar que para cada derivación D de $\mathbb{S}^2$ en a se cumple $D(\pi_3) = 0$. ¿Qué derivaciones D cumplen $D(\pi_2) = 0$?, ¿y $D(\pi_1) = 0$?

Número 17. Sean M una variedad de dimensión m y $D_1, \ldots, D_m$ derivaciones en un punto $a \in M$. Demostrar que $D_1, \ldots, D_m$ son independientes si y sólo si existe un sistema de coordenadas $\mathtt{x}$ tal que $D_i = \frac{\partial}{\partial \mathtt{x}_i}\big|_a$.

Número 18. Sean M una variedad de dimensión m y $a \in M$. Sean $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en un entorno U de a, y consideremos la aplicación $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$. Demostrar que f es un difeomorfismo local en a si y sólo si existen derivaciones $D_1, \ldots, D_m$ en a tales que $D_i f_j = 1$ para $i = j$ y $D_i f_j = 0$ para $i \neq j$, si y sólo si existen derivaciones $D_1, \ldots, D_m$ en a tales que $\det(D_i f_j) \neq 0$.

Número 19. Demostrar, utilizando el desarrollo de Taylor con parámetros, que si una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno abierto del origen $U \subset \mathbb{R}^m$ se anula en el hiperplano $x_1 = 0$, entonces es divisible por x_1. Deducir las ecuaciones de una hipersuperficie están unívocamente determinadas salvo producto por funciones diferenciables nunca nulas.

Número 20. Sea M una variedad diferenciable con borde. Construir una ecuación global de ∂M, esto es, una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ tal que: (i) $f \geq 0$, (ii) $\partial M = f^{-1}(0)$, y (iii) $d_x f$ es suprayectiva para cada $x \in \partial M$.

Campos y EDOs

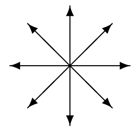
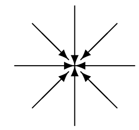
Número 1. Sea X un campo en la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Sea $p : (x,y,z) \mapsto (u,v)$ la proyección estereográfica desde el polo norte $p_N = (0,0,1)$, y sean (u,v) las coordenadas correspondientes. Calcular $X : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$, sabiendo que $X = v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}$ en esas coordenadas.

Número 2. Con las notaciones del problema enterior, considérese el campo Y de $\mathbb{S}^2$ que en las coordenadas (u,v) tiene la expresión $Y = v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}$. Demostrar que definiendo $Y_{p_N} = 0$, Y es un campo continuo, pero no diferenciable.

Número 3. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución generada por una curva $x = f(z) > 0$ del plano $y = 0$ al girar alrededor del eje de las z's. Demostrar que los paralelos y los meridianos de M definen una referencia móvil.

Número 4. Paralelizar el cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, como superficie de revolución y como superficie topográfica, y comparar los dos resultados.

Número 5. Calcular las órbitas de los siguientes flujos completos de $\mathbb{R}^2$, denominados respectivamente *fuente* y *sumidero*, y calcular su generador infinitesimal:

$\varphi_t(x,y) = (xe^t, ye^t)$  $\varphi_t(x,y) = (xe^{-t}, ye^{-t})$ 

Número 6. Construir un flujo completo en el paraboloide $M : z = x^2 + y^2$ cuyas órbitas sean el origen y los semimeridianos correspondientes a secciones planas $M \cap \{ax + by = 0\}$.

Número 7. Calcular las órbitas del siguiente flujo completo de $\mathbb{R}^2$, denominado *circulación*, y calcular su generador infinitesimal:

$$\varphi_t(x,y) = \big(x\cos(at) + \tfrac{1}{a}y\,\mathrm{sen}(at), -ax\,\mathrm{sen}(at) + y\cos(at)\big).$$

Número 8. Construir en la esfera un flujo completo cuyas órbitas sean los meridianos, y otro cuyas órbitas sean los paralelos.

Número 9. Construir en el semicono $x^2+y^2 = z^2$, $z > 0$, un flujo completo cuyas órbitas sean las generatrices.

Número 10. Sea M una superficie de revolución $x^2 + y^2 = f(z)^2$. Construir un flujo completo de M cuyas órbitas sean los paralelos $z = \mathrm{cte}$.

Número 11. Probar que si un flujo completo tiene alguna órbita no periódica, entonces el grupo de difeomorfismos correspondiente es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Número 12. Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el toro de revolución parametrizado por el difeomorfismo periódico local suprayectivo

$$\mathbb{R}^2 \to T : \ (u,v) \mapsto \big((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\,\mathrm{sen}\, v, \mathrm{sen}\, u\big).$$

Demostrar que el flujo completo de $\mathbb{R}^2$ de ecuaciones $\psi_t(u,v) = (u+t, v+\lambda t)$ induce un flujo completo φ en T. Determinar para qué valores de la constante λ las órbitas de φ son todas periódicas, y para qué valores no lo es ninguna.

Número 13. Probar que si un flujo de la circunferencia tiene una curva integral periódica, su generador infinitesimal no tiene ceros.

Número 14. Construir un flujo en $\mathbb{R}^2$ cuyo generador infinitesimal sea $X = \frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}$, y calcular su dominio de definición. (Compárese con el flujo de $\mathbb{R}$ del ejemplo III.3.1.)

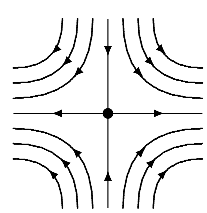
Número 15. Mostrar que una aplicación $\varphi_t(x) = (1 + tf(x))x$, $x \in \mathbb{R}^n$, no puede ser nunca un flujo (salvo si $f \equiv 0$). ¿Y si sólo se define f en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$?

Número 16. Sea P un polinomio en m variables y consideremos la aplicación $\varphi_t(x) = x/(1 + tP(x))$, $x \in \mathbb{R}^m$. Demostrar que φ es un flujo de $\mathbb{R}^m$ si y sólo si P es una forma lineal. (Compárese con el primer ejemplo de esta sección.)

Número 17. Demostrar que los únicos flujos polinomiales de $\mathbb{R}$ son $\varphi_t(x) = x + ct$ con c constante. (Si $\varphi_t(x) = P(t,x)$ es un polinomio, podemos comparar en $P(s+t,x) = P(s, P(t,x))$ los coeficientes de las potencias de s, y derivar las igualdades resultantes respecto de t en $t = 0$.)

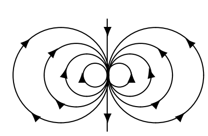
Número 18. Calcular las órbitas del siguiente campo del plano, denominado *silla*:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - ay\frac{\partial}{\partial y}, \quad a > 0\,.$$



Número 19. (1) Calcular las órbitas del campo de $\mathbb{R}^2$ siguiente, denominado *dipolo*:

$$X = -2xy\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y}\,.$$



(2) Mostrar que en la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 = 1$ se puede definir un campo tangente Y que en las coordenadas (x,y) asociadas a la proyección estereográfica desde el polo norte coincide con el dipolo del

apartado anterior.

(3) Utilizar la expresión de Y en las coordenadas asociadas a la proyección estereográfica desde el polo sur para obtener el flujo de Y.

(4) Obtener el flujo del dipolo X, y concluir que no es un campo completo. ¿Qué curvas integrales de X no pueden definirse en toda la recta $\mathbb{R}$?

Número 20. Se considera el difeomorfismo $f(x,y,z) = (x,y,z)/\sqrt{1+z^2}$, definido del cilindro $M : x^2+y^2 = 1$ sobre un abierto U de la esfera, y el campo Y en U transformado por f de $X = g(z)\big(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\big)$. Describir las órbitas de Y, y mostrar que si Y se extiende a toda la esfera, entonces se cumple $\lim_{z\to\pm\infty} g(z)/\sqrt{1+z^2} = 0$.

Formas diferenciales

Número 1. Probar que si α es una forma multilineal alternada de grado r de un espacio vectorial E, y $u_1,\dots,u_r$ son vectores linealmente dependientes, entonces se tiene $\alpha(u_1,\dots,u_r) = 0$. Deducir directamente de esto que $\Lambda^r(E) = 0$ para $r > \dim E$.

Número 2. Demostrar que k formas lineales $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ de un espacio vectorial E son linealmente independientes si y sólo si $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k \neq 0$.

Número 3. Sean α y ω formas de grados 1 y 2 respectivamente, la primera no nula, de un espacio vectorial E. Demostrar que $\alpha\wedge\omega = 0$ si y sólo si existe otra forma β de grado 1 tal que $\omega = \alpha\wedge\beta$.

Número 4. Sean $u_1,\dots,u_r$ vectores de un espacio vectorial E de dimensión m, y B una base de E. Demostrar que la aplicación multilineal alternada

$$\alpha : (v_1,\dots,v_{m-r}) \mapsto \det_B(v_1,\dots,v_{m-r},u_1,\dots,u_r)$$

es no nula si y sólo si $u_1,\dots,u_r$ son independientes.

Número 5. Sea B una base de un espacio vectorial E de dimensión m. Demostrar que toda forma multilineal alternada de grado $m-1$ es del tipo $\det_B(u,\dots)$, para un vector $u\in E$. Deducir un isomorfismo *no canónico* $E\to\Lambda^{m-1}(E)$.

Número 6. Se considera un sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n+1}x_{n+1} = & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +\cdots+ & a_{nn+1}x_{n+1} = & 0 \end{array}$$

cuyo rango es n. Demostrar que las soluciones del sistema son $\lambda(c_1,\dots,c_{n+1})$, $\lambda\in\mathbb{R}$, donde c_i es el adjunto con signo de la variable x_i en la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn+1} \end{pmatrix}.$$

(¡Lo más fácil es comprobar que son soluciones!)

Número 7. Se considera la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 : (x,y,z)\mapsto(x+ay,y,z)$. ¿Existe algún valor de a tal que el determinante de la aplicación $f^*:\Lambda^2(\mathbb{R}^3)\to\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ sea negativo?

Número 8. Sean $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ la esfera unidad, y $(x,y,z)\mapsto(u,v)$ la proyección estereográfica desde el polo norte $a=(0,0,1)$. Sabiendo que en las coordenadas (u,v) una forma diferencial ω se escribe $\omega = \dfrac{u}{(u^2+v^2+1)^3}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$, calcular ω_a. ¿Es cierto que existe tal forma?

Número 9. De nuevo, sean $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ la esfera unidad, y $(x,y,z)\mapsto(u,v)$ la proyección estereográfica desde el polo norte $a=(0,0,1)$. Estudiar para qué enteros n existe en $\mathbb{S}^2$ una forma diferencial cuya expresión en las coordenadas (u,v) es

$$\frac{u^2v}{(u^2+v^2+1)^n}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

¿Qué de peculiar tiene el caso $n = 4$?

Número 10. Demostrar que una forma diferencial $\omega = a\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - b\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + c\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ de $\mathbb{R}^3$ es nula sobre una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ si y sólo si el campo (a, b, c) es tangente a M. Utilizar este hecho para encontrar todas las formas de $\mathbb{R}^3$ que coinciden en la esfera $\mathbb{S}^2$ con la forma ω del problema 1 anterior.

Número 11. Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie de ecuación $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$, y sea α la restricción a M de la forma $\sum_i (-1)^{i-1}\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}$. Expresar α en las coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$.

Número 12. Sean M una variedad de dimensión m y ω una forma de grado m que no se anula en ningún punto. Demostrar que cada forma α de grado m se escribe $\alpha = f\omega$ para una única función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$.

Número 13. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ formas diferenciables de grado 1 de una variedad M de dimensión m, tales que la forma de grado máximo $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$ no se anula en ningún punto. Demostrar que $\Gamma^r(M)$ es isomorfo a $\mathcal{C}^\infty(M)^d$, con $d = \binom{m}{r}$.

Número 14. Sea $\{X_1, \dots . X_m\}$ una referencia móvil de una variedad M. Demostrar que existen m formas diferenciales $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ determinadas por las condiciones de dualidad $\alpha_i(X_j) = 1$ si $i = j$, $\alpha_i(X_j) = 0$ en otro caso, y que la forma $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$ no se anula en ningún punto.

Número 15. Se considera en $\mathbb{R}^m$ la forma diferencial $\alpha = \sum_{ij} a_{ij}x_i\mathrm{d}x_j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Caracterizar mediante la matriz (a_{ij}) el hecho de que α sea cerrada, y comprobar que en ese caso α es exacta.

Número 16. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ formas de grado 1 tales que la forma $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$ no se anula nunca. Demostrar:

(1) Una forma η de grado $< m$ tal que $\eta \wedge \alpha_i = 0$ para cada i, es necesariamente nula.

(2) Si $m > 2$, toda forma η de grado 1 tal que $\eta \wedge \alpha_i = \mathrm{d}\alpha_i$ para cada i, es necesariamente cerrada.

(3) Mostrar con un contraejemplo que la condición $m > 2$ del apartado anterior es necesaria.

Número 17. Se considera la forma de $\mathbb{R}^4$ siguiente

$$\alpha = (y + z + t)\mathrm{d}x + (x + z + t)\mathrm{d}y + (x + y + t)\mathrm{d}z + f\mathrm{d}t.$$

Buscar las funciones f para las que α es cerrada, y mostrar entonces explícitamente que es exacta.

Número 18. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables y considérese en $\mathbb{R}^3$ la forma de grado 1

$$\alpha = yz\mathrm{d}x + (zf(x) + h(x))\mathrm{d}y + (yg(x) + h(x))\mathrm{d}z.$$

Determinar f, g, h para que α sea cerrada, y comprobar que entonces es, de hecho, exacta.

Número 19. Se consideran el abierto $W \subset \mathbb{R}^3$ definido por $x^2 + y^2 \neq 0$, $z > 0$, y en él la forma α de grado 2

$$\alpha = f\Big(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big)(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y),$$

donde $f(t)$ es una función diferenciable en $t > 0$. Determinar f para que α sea cerrada, y encontrar entonces una primitiva suya. (Úsese la parametrización $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\theta,\ z = \rho t$.)

Número 20. El *rotacional* de una forma diferencial $\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z$ de $\mathbb{R}^3$ es por definición el campo

$$\operatorname{rot}\omega = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, -\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right),$$

cuya construcción obedece a la regla del determinante

$$\begin{vmatrix} (1) & \partial/\partial x & a \\ (2) & \partial/\partial y & b \\ (3) & \partial/\partial z & c \end{vmatrix}.$$

Demostrar que $\mathrm{d}\omega = \det(\operatorname{rot}\omega, \dots)$, y deducir que ω es cerrada sobre una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ si y sólo si su rotacional es tangente a la superficie (recuérdese IV.3 Prob.3).