Universidad
Rey Juan Carlos

GRADO EN MATEMÁTICAS

PROBABILIDAD

TEMA 4

VECTORES ALEATORIOS

Sonia Hernández Alonso
Área de Estadística e Investigación Operativa (URJC)

Esquema

- Introducción
- Definición de vector aleatorio
- Vectores aleatorios discretos
- Independencia de variables aleatorias
- Covarianza entre variables aleatorias
- Matriz de varianzas y covarianzas y vector de medias
- Correlación entre variables aleatorias
- Vectores aleatorios continuos
- Distribución normal multivariante

Introducción

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

¿Por qué considerar vectores aleatorios?

- En el tema anterior nos hemos limitado a analizar variab s unidimensionales.
- Sin embargo, en muchas ocasiones estaremos interesad e una característica de un fenómeno aleatorio.
- Consideremos, por ejemplo, el experimento aleatorio c n elegir al azar alumnos de la URJC y estudiar su perfil bioló - gamos que el perfil se compone de la talla, el peso, la - guínea, la frecuencia cardiaca y la capacidad respiratoria

  En ese caso estaremos interesados en cinco variables a e deberán analizarse **conjuntamente.**
- En este tema analizaremos modelos de probabilidad con - bles aleatorias. Estos modelos reciben el nombre de **vect** - **rios** o **variables aleatorias multivariantes**.

¿Basta con conocer la distribución de cada

- A lo largo de este tema es importante tener en cuenta que **a distribución individual de cada variable aleatoria no a suficente información para calcular probabilidades qu n a más de una variable**.

- Por ejemplo, si estamos analizando las variables peso (P)) de un alumno de la URJC elegido aleatoriamente, no basta er cuál es la distribución de cada una de ellas por separado

- Es de esperar que que los alumnos más altos tengan, co - babilidad, pesos más altos, y viceversa, y necesitaremos p o se distribuyen **conjuntamente** ambas variables, es decir, **r la distribución conjunta del vector** (P, A).

Ejemplo: las distribuciones individuales no

- Para el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire a equilibrada tres veces, consideremos las variables aleatori

$$X = \text{número de caras},$$
$$Y = \text{número de cruces que preceden a la primera}$$

- Es fácil determinar las función de masa de probabilidad a de estas variables individualmente:

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

- Sin embargo, estas distribuciones no son suficientes para r ejemplo

$$P(X = 2, Y = 0] \qquad \text{ó} \qquad P[X = Y].$$

(*) En caso de obtener 3 cruces ($\mathcal{XXX}$), se considerará que

Definición de vector aleatorio

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

¿Qué es un vector aleatorio?

- **Definición**: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico.

  Se dice que el vector n-dimensional

  $$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

  es un **vector aleatorio** si para cada una de sus componen ... r, para $j = 1, 2, \ldots, n$,

  $$X_j : \Omega \to \mathbb{R}$$

  es una variable aleatoria.

- Obsérvese que $\mathbf{X}$ es una función $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que a ca ... e asigna el vector

  $$\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

- El vector aleatorio $\mathbf{X}$ **induce una distribución de pr ... s sobre $\mathbb{R}^n$** a partir de la estructura probabilística definida

Función de distribución conjunta

- **Definición**: La **función de distribución conjunta** de un … -
torio

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

es la función

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

que a cada $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le asigna el valor

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\right).$$

Propiedades de la función de distribución

- **Proposición 1:** La función de distribución conjunta v... i-guientes propiedades:

  1. $F_{\mathbf{X}}$ es **monótona no decreciente en cada compone**... , si $x_i < x_i'$, entonces

  $$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \leq F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i' \ldots, x_n$$

  para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

  2. $$\lim_{x_1 \to \infty, \ldots, x_n \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 1$$

  3. $$\lim_{x_1 \to -\infty, \ldots, x_n \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0$$

Vectores aleatorios discretos

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Vectores aleatorios discretos

- **Definición**: Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X$ … s **discreto** si para cada componente $i = 1, 2, \ldots, n,\ \ X_i$ es … e aleatoria discreta.

- Observemos que, en tal caso, existirán **conjuntos** A_1, A … R **numerables** tales que

$$P(X_1 \in A_1) = 1, P(X_2 \in A_2) = 1, \ldots, P(X_n \in A_n)$$

- Si consideramos el conjunto $\mathbf{A} = A_1 \times A_2, \times \ldots \times A_n$ se ti

$$P(\mathbf{X} \in \mathbf{A}) = \mathbf{1}$$

- Por tanto, **el soporte de un vector aleatorio discret** … n conjunto de R^n) **es numerable.**

- Vamos a analizar las **distribuciones multivariantes discr** … - zando por un ejemplo para el caso **bivariante**.

Ejemplo: vectores aleatorios discretos

- Los agricultores de cierta región pueden utilizar tanto abo s como orgánicos.

- Las probabilidades para cada número de abonos químico s (X_1) combinados con cada número de abonos orgánicos e- cogen en la siguiente tabla:

X_1

X_2		0	1	2
	0	0.1	0.4	0.1
	1	0.2	0.2	0

- Esta tabla recoje todas las **probabilidades conjuntas** rel - tor (X_1, X_2). Por ejemplo, observamos que

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0.4,$$

y

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 0.2.$$

Función de masa de probabilidad conjunta

- **Definición**: La **función de masa de probabilidad con** n vector aleatorio bivariante, (X_1, X_2) es la función

$$f_{X_1,X_2} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$$

definida como

$$f_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = P\left(X_1 = k_1, X_2 = k_2\right).$$

- La función de masa de un vector aleatorio bivariante ver o- piedades

1. $f_{X_1,X_2}(k_1,k_2) \geq 0$ para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$,

2. $$\sum_{k_1 \in S_{X_1}} \sum_{k_2 \in S_{X_2}} f_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = 1$$

- La **distribución de probabilidades** de un vector aleator , (X_1, X_2), puede resumirse en una **tabla de doble entrac** e su función de masa conjunta.

Distribuciones marginales

- A partir de la función de masa conjunta se pueden calcu s-tribuciones de probabilidad.

- **Definición**: La **distribución marginal** de X_1 es la dis e probabilidades de la primera variable del vector aleatorio a individualmente.

- En el caso discreto esta distribución marginal puede de e-diante la **función de masa marginal:**

$$
\begin{aligned}
f_1(k_1) &= f_{X_1}(k_1) \\
&= P(X_1 = k_1) \\
&= \sum_{k_2 \in S_{X_2}} P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) \\
&= \sum_{k_2 \in S_{X_2}} f_{X_1, X_2}(k_1, k_2).
\end{aligned}
$$

Distribuciones marginales (continuación)

- Análogamente, la **función de masa marginal de X_2** vie… r

$$
\begin{aligned}
f_2(k_2) &= P(X_2 = k_2) \\
&= \sum_{k_1 \in S_{X_1}} P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) \\
&= \sum_{k_1 \in S_{X_1}} f_{X_1,X_2}(k_1, k_2)\,.
\end{aligned}
$$

- Las funciones de masa de probabilidad marginales se c… l-mente en los **márgenes** de la tabla sumando las proba… r filas o por columnas.

- Las distribuciones marginales permiten calcular probabili… -ranzas, varianzas, medianas, etc. **para cada una de l… s aleatorias** por separado.

Ejemplo: distribuciones marginales

- La distribución marginal de la cantidad de abonos químic… s en la región del ejemplo anterior es

$$
\begin{aligned}
f_{X_1}(0) &= P(X_1 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = \ldots \\
&= 0.1 + 0.2 \\
&= 0.3, \\
f_{X_1}(1) &= P(X_1 = 1) = 0.4 + 0.2 = 0.6, \\
f_{X_1}(2) &= P(X_1 = 2) = 0.1 + 0 = 0.1,
\end{aligned}
$$

y la distribución marginal del número de abonos orgánic… ,

$$
\begin{aligned}
f_{X_2}(0) &= P(X_2 = 0) = 0.1 + 0.4 + 0.1 = 0.\ldots \\
f_{X_2}(1) &= P(X_2 = 1) = 0.2 + 0.2 + 0 = 0.4.
\end{aligned}
$$

Los cálculos resultan más sencillos sumando a los márgene… :

		X_1			
		0	1	2	
X_2	0	0.1	0.4	0.1	0.6
	1	0.2	0.2	0	0.4
		0.3	0.6	0.1	1

Ejemplo: distribuciones marginales (contin

- Usando estas distribuciones marginales podemos calcular, ..., la esperanza y la varianza de cada una de las variables al

$$
\begin{aligned}
E(X_1) &= 0.8, \\
E\left(X_1^2\right) &= 1, \\
V(X_1) &= 0.36, \\
\\
E(X_2) &= 0.4, \\
E\left(X_2^2\right) &= 0.4, \\
V(X_2) &= 0.24.
\end{aligned}
$$

- **Cuestión:** ¿Cuáles son las medianas de X_1 y X_2?

- Además de su distribución marginal, se pueden considerar ... i-
buciones de probabilidad para X_1: las **distribuciones co... s**
por un valor particular de X_2, ya que, en muchos casos, el ... n-
ber que la variable X_2 toma un determinado valor ($X_2 =$ ... a
la distribución de probabilidades sobre X_1.

- **Definición**: La **función de masa de probabilidad de** X **...o-
nada a** $X_2 = k_2$, que se denota $X_1|X_2 = k_2$, es

$$
\begin{aligned}
f_{X_1}(k_1|X_2 = k_2) &= P(X_1 = k_1|X_2 = k_2) \\
&= \frac{P(X_1 = k_1, X_2 = k_2)}{P(X_2 = k_2)} \\
&= \frac{f_{X_1,X_2}(k_1, k_2)}{f_{X_2}(k_2)}.
\end{aligned}
$$

- **Proposición 2:** La función de masa condicionada prop a distribución de probabilidades para X_1, y como tal verific e-dades:

  1. $f_{X_1}(k_1|X_2 = k_2) \geq 0$ para todo $k_1 \in S_{X_1}, k_2 \in$

  2. $\sum_{k_1 \in S_{X_1}} f_{X_1}(k_1|X_2 = k_2) = 1$

- A partir de esta función de probabilidad condicionada po u-lar, por ejemplo, esperanzas y varianzas condicionadas:

$$E\left(X_1|X_2 = k_2\right) = \sum_{k_1 \in S_{X_1}} k_1 \times f_1(k_1|k_2),$$

$$V\left(X_1|X_2 = k_2\right) = E\left(X_1^2|X_2 = k_2\right) - E^2\left(X_1|X_2 =\right.$$

La otra función de masa condicionada

- De manera similar, la función de masa de probabilidad condicionada a $X_1 = k_1$, ($X_2|X_1 = k_1$), viene dada por

$$f_{X_2}(k_2|X_1 = k_1) \;=\; \frac{f_{X_1,X_2}(k_1,k_2)}{f_{X_1}(k_1)}.$$

Ejemplo: distribuciones condicionadas

- **Ejercicio 1:** Para el caso de los abonos en la región … o anterior,

1. Determinar la distribución de la cantidad de abonos c… ,
   sabiendo que el número de abonos orgánicos empleado…).
2. Calcular $E\left(X_1 \mid X_2 = 0\right)$ y $V\left(X_1 \mid X_2 = 0\right)$.
3. Establecer la distribución de la cantidad de abonos or… ,
   cuando se sabe que el número de abonos químicos … es
   $X_1 = 1$.
4. Calcular $E\left(X_2 \mid X_1 = 1\right)$ y $V\left(X_2 \mid X_1 = 1\right)$.

Ejemplo: distribuciones condicionadas

- **Ejercicio 1:** Para el caso de los abonos en la región … o anterior,

  1. Determinar la distribución de la cantidad de abonos c… , sabiendo que el número de abonos orgánicos empleado…).
  2. Calcular $E\,(X_1 \,|\, X_1 = 0)$ y $V\,(X_1 \,|\, X_2 = 1)$.
  3. Establecer la distribución de la cantidad de abonos or… , cuando se sabe que el número de abonos químicos …s $X_1 = 1$.
  4. Calcular $E\,(X_2 \,|\, X_1 = 1)$ y $V\,(X_2 \,|\, X_1 = 1)$.

		X_1: 0	1	2	
X_2	0	0.1	0.4	0.1	0.6
	1	0.2	0.2	0	0.4
		0.3	0.6	0.1	1

Solución al Ejercicio 1

1. La función de probabilidad de X_1 condicionada por $X_2 =$

$$
\begin{aligned}
f_{X_1}(0 \,|\, X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \,|\, X_2 = 0) = \frac{f_{X_1,X_2}(0,0)}{f_{X_2}(0)} \\
f_{X_1}(1 \,|\, X_2 = 0) &= P(X_1 = 1 \,|\, X_2 = 0) = \frac{f_{X_1,X_2}(1,0)}{f_{X_2}(0)} \\
f_{X_1}(2 \,|\, X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \,|\, X_2 = 0) = \frac{f_{X_1,X_2}(2,0)}{f_{X_2}(0)}
\end{aligned}
$$

o, expresado en forma matricial,

$$
X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.
$$

Observamos que el reparto de probabilidades del númer s químicos cambia cuando se conoce cuántos de los orgá - plean. Por tanto, también se modificarán su esperanza y

Solución al Ejercicio 1 (continuación)

2. Como hemos dicho, también se modifican la esperanza a de X_1 (con respecto a los valores marginales):

$$E\left(X_1 \mid X_2 = 0\right) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{4}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = 1$$

$$E\left(X_1^2 \mid X_2 = 0\right) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{4}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$V\left(X_1^2 \mid X_2 = 0\right) = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}.$$

Solución al Ejercicio 1 (continuación)

3. Del mismo modo, la distribución de probabilidades del nú o-nos orgánicos también varía cuando sabemos cuántos abo s se utilizan.

   Así, la función de masa de X_2 condicionada por $X_1 = 1$

$$f_{X_2}(0 \mid X_1 = 1) = P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) = \frac{f_{X_1,X_2}(1,0)}{f_{X_1}(1)}$$

$$f_{X_2}(1 \mid X_1 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{f_{X_1,X_2}(1,1)}{f_{X_1}(1)}$$

   o, resumidamente,

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Solución al Ejercicio 1 (continuación)

4. Del apartado anterior se deduce que,

$$
\begin{aligned}
E\left(X_2 \mid X_1 = 1\right) &= 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\
E\left(X_2^2 \mid X_1 = 1\right) &= 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \\
V\left(X_2^2 \mid X_1 = 1\right) &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.
\end{aligned}
$$

Otro ejemplo sobre vectores discretos

- **Ejercicio 2:** Para el experimento aleatorio consistente al aire una moneda equilibrada tres veces, consideremos s aleatorias:

$$X = \text{número de caras,}$$
$$Y = \text{número de cruces que preceden a la primera}$$

1. Determinar la distribución conjunta del vector aleator
2. Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, y $V(Y)$.
3. Calcular $E(X|Y = 1)$ y $V(X|Y = 1)$.
4. Calcular $E(Y|X = 2)$ y $V(Y|X = 2)$.

resolución:.........pizarra

(∗) En caso de obtener 3 cruces ($\mathcal{XXX}$), se considerará que

Solución a (parte del) Ejercicio 2:

2.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1.5, \\
E(Y) &= 0.875, \\
V(X) &= 0.75, \\
V(Y) &= 1.1.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
E(X|Y=1) &= 1.5, \\
V(X|Y=1) &= 0.25.
\end{aligned}
$$

Solución a (parte del) Ejercicio 2:

4.

$$
\begin{aligned}
E(Y|X=2) &= 0.125, \\
V(Y|X=2) &= 0.1094.
\end{aligned}
$$

Independencia de variables aleatori

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Independencia de dos variables aleatorias

- En ocasiones, **la información referida a una variable** X **no incide la distribución de probabilidades de otra v**

- En tales casos se dice que X e Y son independientes.

- Nos planteamos la cuestión: ¿en qué medida la informaci a una variable aleatoria X incide en los valores de otra var r ejemplo, la inflación y la emisión monetaria, ¿son variab n-dientes?

- **Definición**: Las variables aleatorias X e Y son **independi** a cualquier par de conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se verifica

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

- Puede probarse que la condición anterior es **equivalente** a todos los valores $x, y \in \mathbb{R}$ se verifique

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$$

Independencia de n variables aleatorias

- **Definición**: Se dice que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ ... -**dependientes** si para cualquier colección de conjuntos A_1 ... $\subset \mathbb{R}$ se verifica

$$
\begin{aligned}
& P\left(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n\right) \\
= \; & P\left(X_1 \in A_1\right) \times P\left(X_2 \in A_2\right) \times \ldots \times P\left(X_n \in \ldots\right.
\end{aligned}
$$

- **Proposición 3:** Las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **indepen**... y solo si para todos los valores reales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se v...

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \times F_{X_2}(x_2) \times \ldots$$

donde $F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}$ es la **función de distribución conju**... n variables.

- Cuando las variables son independientes, **el hecho de** ... **s valores que toman un subconjunto de ellas, no afe**... **-tribución de probabilidades de las demás**.

Conservación independencia por transform

- **Proposición 4:** Consideremos una colección de variab s independientes,

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

y un conjunto de funciones $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para $j = 1, 2, \ldots,$

Con estos elementos podemos definir una nueva colecciór s

$$Y_1 = g_1(X_1), Y_2 = g_2(X_2), \ldots, Y_n = g_n(X_n).$$

En esta situación, **las variables aleatorias transformada** Y_n **son también independientes**.

- Por ejemplo, si X, Y y Z son independientes, entonces la

$$\sqrt{X},$$
$$\cos(Y)$$
$$2Z^2 - 7Z + 3$$

también son variables aleatorias independientes.

Independencia de variables discretas

- Como hemos dicho, dos variables aleatorias X e Y son **ind** **s** si para cualquier par de conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se tiene que

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

o, equivalentemente si para todos los valores $x, y \in \mathbb{R}$ se

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$$

- En el caso de variables aleatorias discretas esto es equiv e para todos los valores del soporte se verifique

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y),$$

es decir, que **la función de masa conjunta sea el proc** **s** **funciones de masa marginales:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y) \qquad \forall x \in S_X, \ \forall y \in S$$

- Esta condición resulta fácil de verificar en la tabla de d a que resume la distribución de probabilidades del vector (.

Ejemplo: independencia de variables discre

- Las variables X_1 (número de abonos químicos) y X_2 (núr ... o-nos orgánicos) de los ejemplos anteriores, **no son indepe** ... a que, por ejemplo,

$$f_{X_1,X_2}(0,0) = 0.1 \neq 0.18 = 0.3 \times 0.6 = f_{X_1}(0) \times f$$

		X_1			
		0	1	2	
X_2	0	**0.1**	0.4	0.1	**0.6**
	1	0.2	0.2	0	0.4
		0.3	0.6	0.1	1

URJC

Otro ejemplo: independencia de variables (

- **Ejercicio 3:** La función de masa conjunta de las variab s X e Y es la que aparece en la siguiente tabla:

X

Y		0	1	2	
	1	0.15	0.09	0.01	0.25
	5	0.45	0.27	0.03	0.75
		0.60	0.36	0.04	1

1. Son independientes las variables X e Y?
2. ¿Qué relación existe entre $E(X)$, $E(X|Y=1)$ y $E(X$ A qué es esto debido?

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 3

1. En este caso, las variables X e Y sí son independientes, y … o se puede comprobar en la tabla, para todo $x \in \{0, 1, 2\}$ e … e cumple que

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y),$$

2. $E(X) = E(X|Y = 1) = E(X|Y = 5)$.

- **Proposición 5:** Cuando X_1 y X_2 son variables aleator... **-dientes**, se verifica, para todos los valores $x_1 \in S_{X_1}$ y x_2

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) &= \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} \\ &= \frac{P(X_1 = x_1) \times P(X_2 =}{P(X_2 = x_2)} \\ &= P(X_1 = x_1), \end{aligned}$$

o expresado de otra forma, que

$$f_{X_1}(x_1 | X_2 = x_2) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)}{f_{X_2}(x_2)} =$$

Análogamente se tiene que

$$f_{X_2}(x_2 | X_1 = x_1) = f_{X_2}(x_2).$$

- Es decir, para variables independientes, la distribución **c... a por cualquier valor de la otra variable coincide con l**

Otro ejemplo: vector aleatorio discreto

- **Ejercicio 4:** La junta de una comunidad vecinal está for 0 vecinos: uno del primer piso, tres del segundo, dos del ter el cuarto y uno del quinto. De los 10 miembros de la junta a al azar una comisión de dos personas.

  Se desea conocer la representación que tienen en esta junt s de los pisos más bajos.

  Sea P el número de vecinos del primer piso en la con el número de vecinos del segundo.

  1. Hallar la función de masa conjunta del vector (P, S).
  2. Encontrar las distribuciones marginales de P y S.
  3. Calcular $E(P)$, $E(P|S=0)$, $E(P|S=1)$ y $E(P|S=2$
  4. Determinar si las variables P y S son independientes.

  resolución:.........pizarra

Covarianza entre variables aleatori

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Valor esperado de transformaciones de va

- Sean X una variable aleatoria univariante, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n real.
- Recordemos que, entonces, $g(X)$ es otra variable aleator r esperado viene dado por

$$E\left(g\left(X\right)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in S_X} g\left(x_i\right) f_X\left(x_i\right) & \text{en el caso discr} \\ \displaystyle\int_{S_X} g\left(x\right) f_X\left(x\right) dx & \text{en el caso cont} \end{cases}$$

- **Ejercicio 5:** Sea X una variable aleatoria con función d

$$\begin{aligned} f_X(0) &= 0.3, \\ f_X(90) &= 0.2, \\ f_X(180) &= 0.4, \\ f_X(270) &= 0.1. \end{aligned}$$

Si los angulos se miden en grados, ¿cuál es el valor e $sen(X)$? ¿Y el de $cos(X)$?

Solución al Ejercicio 5

- Puesto que X es una variable discreta,

$$\begin{aligned} & E\left(sen\left(X\right)\right) \\ = & \sum_{x \in S_X} sen\left(x\right) f_X\left(x\right) \\ = & 0.3 \times sen(0) + 0.2 \times sen(90) + 0.4 \times sen(180) + 0.1 \\ = & \mathbf{0.1}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & E\left(cos\left(X\right)\right) \\ = & \sum_{x \in S_X} cos\left(x\right) f_X\left(x\right) \\ = & 0.3 \times cos(0) + 0.2 \times cos(90) + 0.4 \times cos(180) + 0.1 \\ = & \mathbf{-0.1}. \end{aligned}$$

Esperanza transformaciones vectores aleat

- La generalización de este resultado a dimensión $n = 2$ es e.
- **Proposición 6:** Si (X_1, X_2) es un vector aleatorio bivari o y

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

entonces $g(X_1, X_2)$ es una variable aleatoria unidimension r esperado es

$$E\left[g(X_1, X_2)\right] = \sum_{x_1 \in S_{X_1}} \sum_{x_2 \in S_{X_2}} g\left(x_1, x_2\right) f_{X_1, X_2}\left(x_1, \right.$$

Ejemplo: esperanza de transformaciones de

- **Ejercicio 6:** La función de masa conjunta de las variab s X e Y es la que aparece en la siguiente tabla:

$Y \backslash X$	-2	-1	2
0	0.1	0	0.3
4	0.2	0.3	0.1

- Hallar $E\left(\dfrac{Y}{X}\right)$ y $E(X \times Y)$ y compararlas con $\dfrac{E(Y)}{E(X)}$ y E), respectivamente.

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 6

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{0}{-2}\times 0.1 + \frac{0}{-1}\times 0 + \frac{0}{2}\times 0.3 + \frac{4}{-2}\times 0.2 + \frac{4}{-1}\times 0.3 + \ldots .4,$$

$$E(X\times Y) = 0\times(0.1+0+0.3)+(-2)\times 4\times 0.2+(-1)\times 4\times 0.3 \ldots = -2$$

Por otra parte,

$$E(X) = (-2)\times 0.3 + (-1)\times 0.3 + 2\times 0.4 = - \ldots$$

$$E(Y) = 0\times 0.4 + 4\times 0.6 = \mathbf{2.4}.$$

Luego

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = -1.4 \neq -24 = \frac{E(Y)}{E(X)},$$

y

$$E(X\times Y) = -2 \neq -0.24 = -0.1\times 2.4 = E(X)\times \ldots$$

Esperanza del producto de variables aleato

- El ejemplo anterior ilustra el hecho de que, en general, pa e variables aleatorias, X_1 y X_2,

$$E(X_1 \times X_2) \neq E(X_1) \times E(X_2),$$

es decir, que **la esperanza del producto de variables r or qué coincidir con el producto de las esperanzas.**

- No obstante, en algunos casos sí se da esta igualdad.

- En particular, puede demostrarse que, si X_1 y X_2 son **va -torias independendientes**, entonces sí se verifica

$$E(X_1 \times X_2) = E(X_1) \times E(X_2).$$

Covarianza entre variables aleatorias

- Se define la **covarianza** entre dos variables aleatorias, X

$$\boxed{Cov\,(X,Y) = E\,[(X - E(X)) \times (Y - E(Y))]}$$

es decir

$$\boxed{Cov\,(X,Y) = E\,[(X - \mu_X) \times (Y - \mu_Y)]}$$

- Una fórmula alternativa para la covarianza, que hace los s sencillos, es la siguiente.

- **Proposición 7:** La covarianza entre dos variables aleat , puede expresarse como

$$\boxed{Cov\,(X,Y) = E\,[X \cdot Y] - E\,[X] \cdot E\,[Y] = E\,[X \cdot Y] - \mu}$$

demostración:.........pizarra

¿Cuál es la covariaza de X consigo misma

- Dada una variable aleatoria X, ¿cuál es la covarianza que t... o misma?
- Es decir, qué es $Cov(X, X)$?

¿Cuál es la covariaza de X consigo misma

- Dada una variable aleatoria X, ¿cuál es la covarianza que o misma?
- Es decir, qué es $Cov(X, X)$?
- Observemos que

$$Cov\left(X, X\right) = E\left[X \times X\right] - E\left[X\right] \times E\left[Y\right] = E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right] = \sigma_X^2$$

- Es decir, **la covarianza de X consigo misma es su va**

Variables aleatrorias incorrelacionadas

- Cuando la covarianza entre las variables X e Y es nula, e e verifica

$$Cov(X, Y) = 0$$

se dice que las variables son (o están) **incorrelacionada**

Ejemplo: covarianza entre variables aleato

- **Ejercicio 7:** Calcular la covarianza entre las variables a 1 (número de abonos químicos) y X_2 (número de abonos c e los ejemplos anteriores, cuya función de masa de proba a dada por

X_1

X_2		0	1	2	
	0	0.1	0.4	0.1	0.6
	1	0.2	0.2	0	0.4
		0.3	0.6	0.1	1

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 7:

- Se tiene que

$$
\begin{aligned}
E(X_1\,X_2) &= 0.2, \\
E(X_1) &= 0.8, \\
E(X_2) &= 0.4,
\end{aligned}
$$

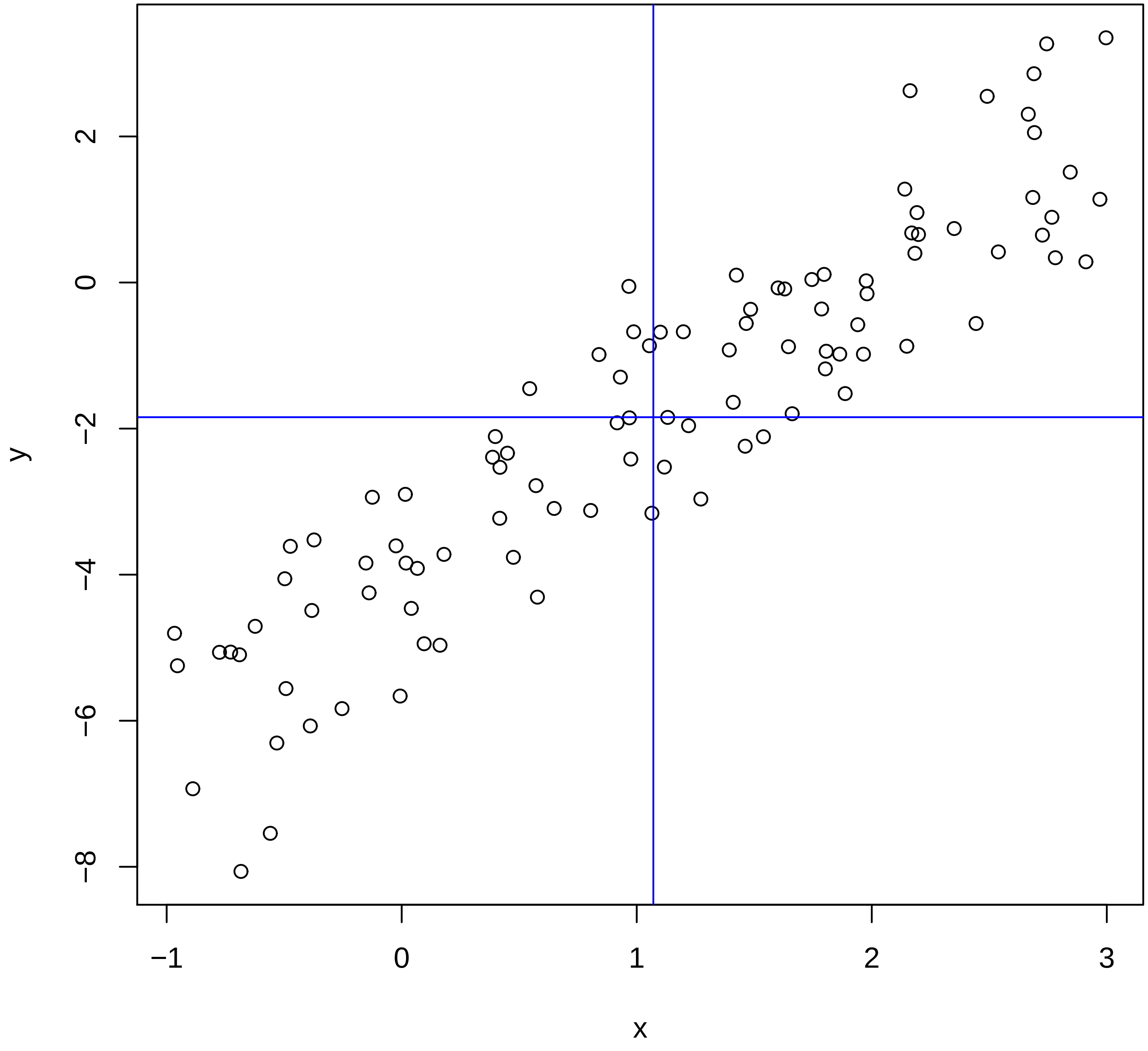
y por consiguiente

$$Cov(X_1, X_2) = E\,(X_1 X_2) - E\,(X_1) \times E\,(X_2) = 0.2 - 0.8 \times \quad 2.$$

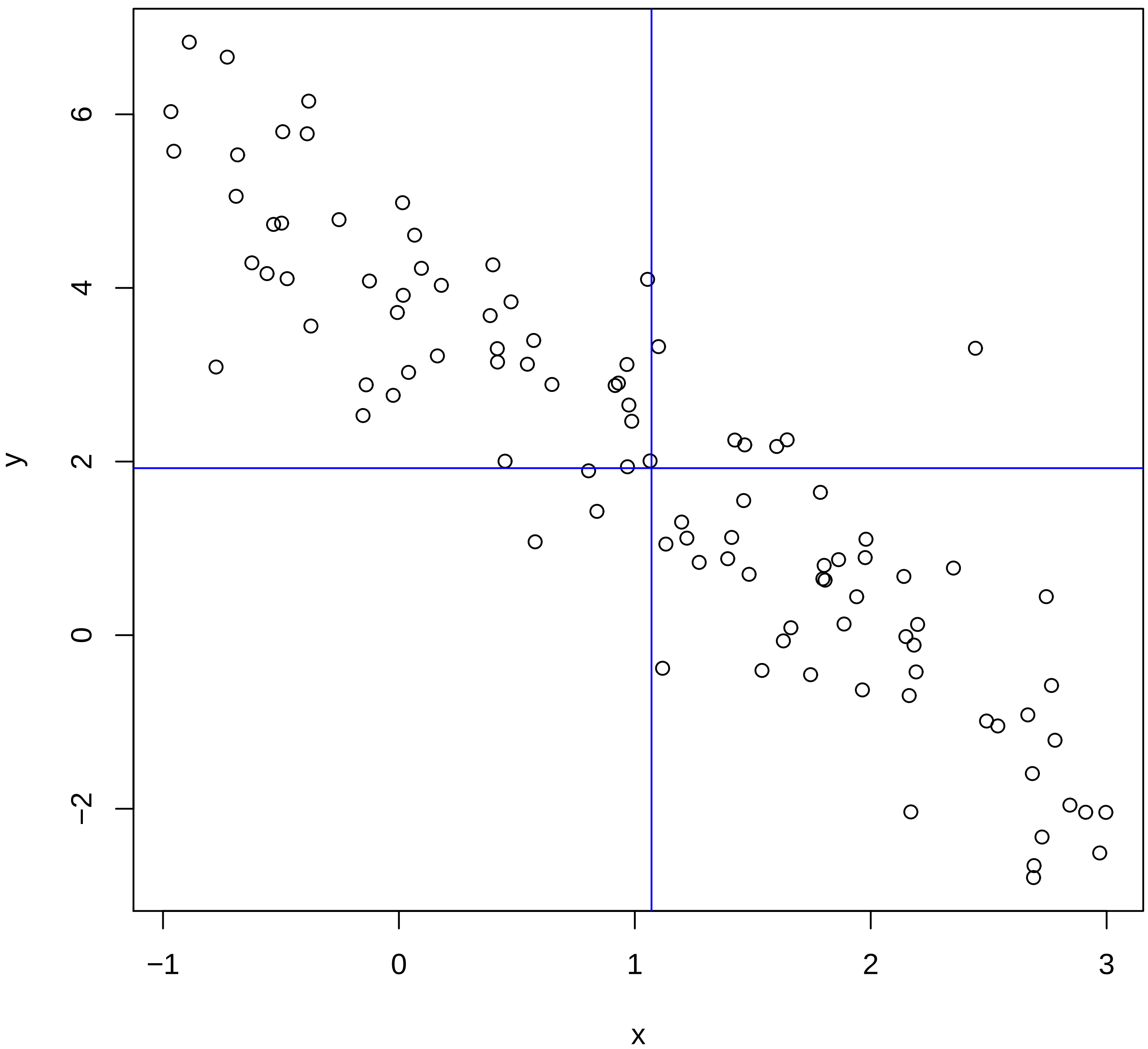
Interpretación de la covarianza

- La covarianza es una **medida de la variabilidad conju** **s variables variables** X **e** Y:
  - Cuando hay una alta probabilidad de que valores grande n asociados con valores grandes de Y, y los valores pe X vayan asociados a valores pequeños de Y, la covarian **i- tiva**.
  - Por el contrario, si existe una alta probabilidad de que n- des de X se encuentren asociados a valores pequeños e- versa, la covarianza será **negativa**.
  - Cuando no existe **ninguna relación de tipo lineal** a- riables X e Y, la covarianza entre ellas es 0, esto es n variables **incorrelacionadas**:
- Es importante señalar que la covarianza tiene en cuenta **- laciones lineales**, por lo que dos variables aleatorias inco s pueden estar relacionadas mediante otro tipo de función (, cuadrática, logarímica, sinusoidal, etc)

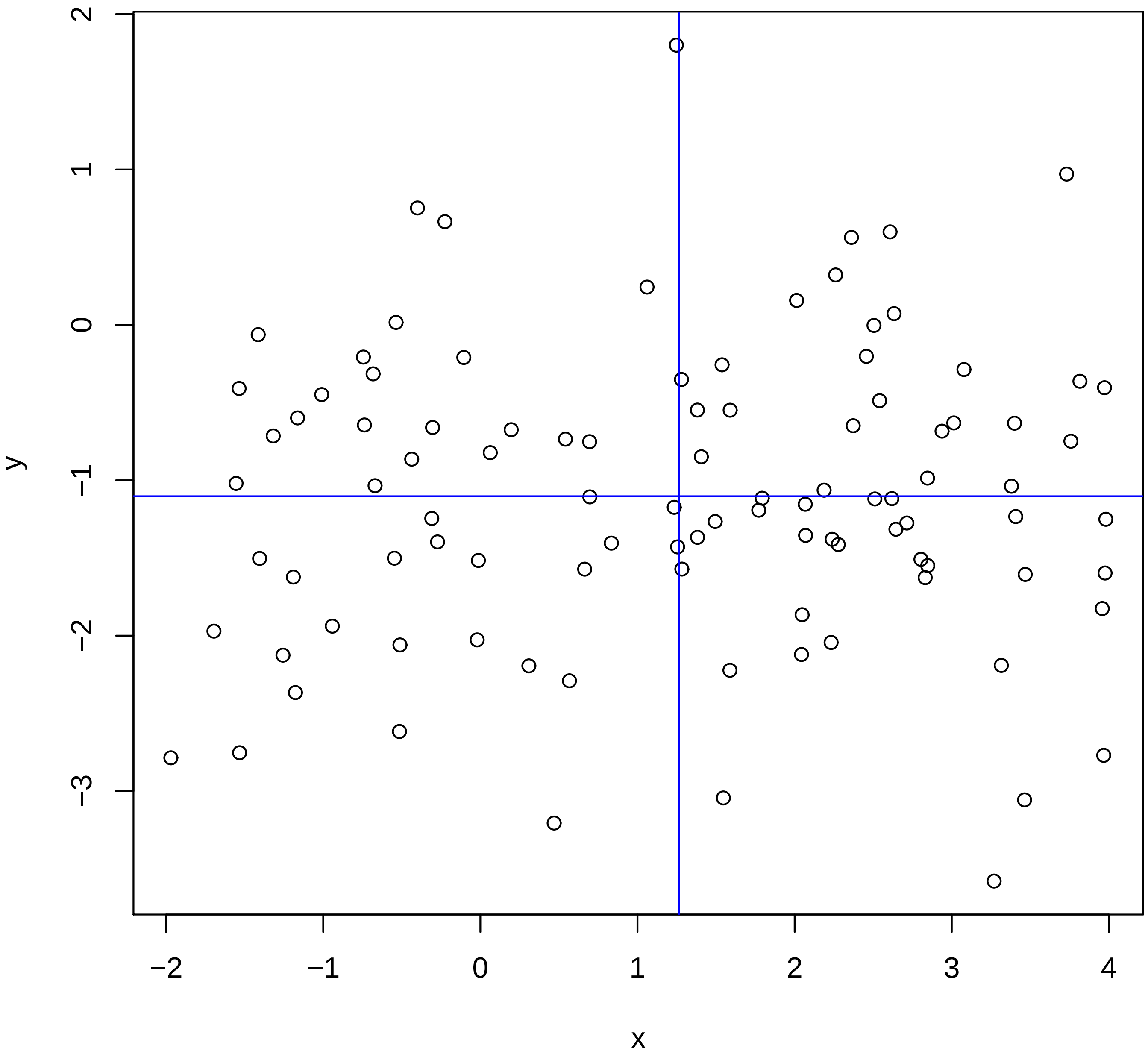
Relación lineal positiva



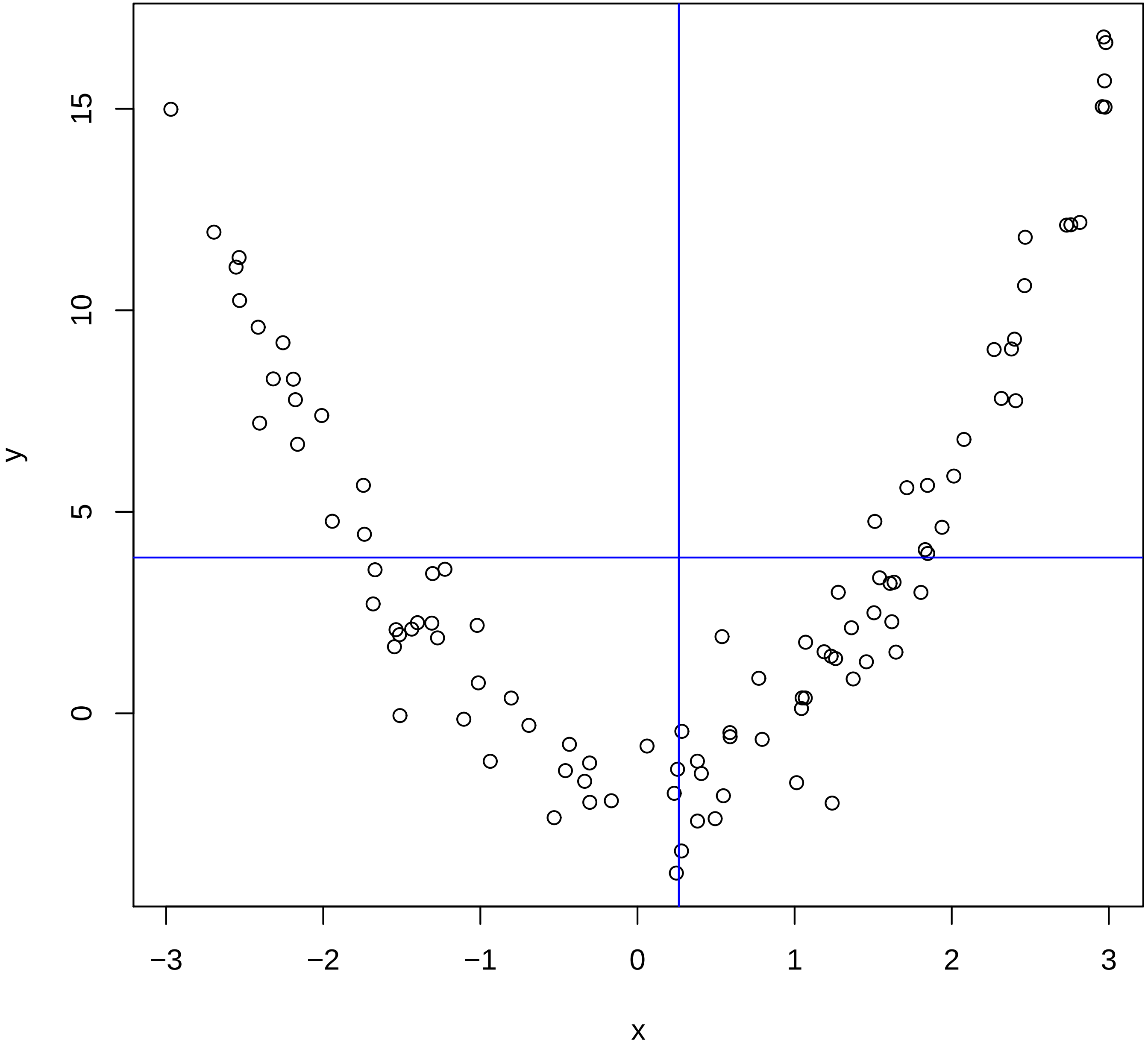
Relación lineal negativa



Ausencia de relación



Relación no lineal



URJC

Covarianza de variables independientes

- **Proposición 8:** Si X e Y son **variables aleatorias indep**–
tes, entonces se verifica

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$$

y en consecuencia

$$Cov\,(X, Y) = 0$$

demostración:.........pizarra (caso discreto)

- Por tanto, **las variables aleatorias independientes son** –
riables incorrelacionadas.

Ejemplo: covarianza de variables independ

- La función de masa conjunta de las variables aleatorias a que aparece en la siguiente tabla:

		X		
		0	1	2
Y	1	0.15	0.09	0.01
	5	0.45	0.27	0.03

- X e Y **son variables aleatorias independientes**, ya qu

$$P(X = m, Y = n) = P(X = m) \times P(Y = n) \quad \forall x \in \{0, 1, 2\} .$$

- Por tanto, X e Y tienen que ser necesariamente variabl - **cionadas**, es decir, **su covarianza debe ser nula**. Par r que esto es efectivamente así basta observar que

$$E(X) = 0.44; \quad E(Y) = 4; \quad E(X \times Y) = 1.76,$$

y en consecuencia

$$Cov\,(X, Y) = E\,[X \times Y] - E\,[X] \times E\,[Y] = 1.76 - 0.44$$

Ejemplo: incorrelación e independencia

- La función de masa conjunta de las variables aleatorias a que aparece en la siguiente tabla:

B \ A	-1	0	1
0	0.1	0.1	0.1
10	0.2	0.3	0.2

- A y B **son variables aleatorias incorrelacionadas,** ya q

$$E(A) = 0; \quad E(B) = 7; \quad E(A \times B) = 0,$$

  y por consiguiente

$$Cov\,(A, B) = E\,[A \times B] - E\,[A] \times E\,[B] = 0 - 0 \times 7$$

- Sin embargo, **las variables A y B no son independier** , por ejemplo

$$0.1 = P(A = -1, B = 0) \neq P(A = -1) \times P(B = 0) = 0.3$$

Incorrelación e independencia de variables a

- Hemos visto que las variables aleatorias independientes e variables incorrelacionadas.
- El ejemplo anterior ilustra el hecho de que, el recíproco r- mación no es cierto, ya que **dos variables aleatorias pu r covarianza cero y ser dependientes**.
- Es decir **la incorrelación no implica independencia.**
- Esto es debido a que covarianza entre X e Y lo que m - **dependencia lineal** entre dos variables aleatorias.
- Pero, evidentemente, dos variables pueden depender la u a mediante otro tipo de relación.
- Sin embargo, y como ya veremos, en el caso concreto de - **ciones normales** o gaussianas, **independencia e incorrel n equivalentes**.

Limitaciones de la covarianza

- La covarianza es una medida de la variabilidad conjunta ... -bles X e Y que tiene en cuenta sólo co-dependencias de ...
- Además, la covarianza entre dos variables varía si cambia... -dades en las que medimos alguna de ellas.
- Por ejemplo, si la variable aleatoria X está está expresad... s, su covarianza con cualquier otra variable Y será 1000 vec... e la covarianza entre esa misma variable X expresada en k...
- Por tanto, **tiene sentido fijarse en el signo de la cova... o su valor absoluto no resulta de utilidad**.

Matriz de varianzas-covarianzas

y vector de medias

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Matriz de varianzas y covarianzas

- Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ un **vector aleatorio** $n-$ **dime**
- La **matriz de varianzas y covarianzas** de $\mathbf{X}$ es la matr

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \ldots & Cov(X_1, X \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) & \ldots & Cov(X_2, X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_1) & \ldots & V(X_n) \end{pmatrix}$$

- Puesto que

  $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[YX] - E[Y]E[X] =$,

  es evidente que la matriz de covarianzas $\Sigma_{\mathbf{X}}$ es una **matri** ,
  es decir, verifica $\Sigma_{\mathbf{X}}' = \Sigma_{\mathbf{X}}$

- Además puede demostrarse que la matriz de varianzas y s
  de cualquier vector aleatorio es **semidefinida positiva.**

- Para **variable aleatoria bidimensional**,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

la **matriz de varianzas y covarianzas** es

$$\Sigma_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

Vector de medias

- Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ un **vector aleatorio** $n-$**dimen**
- El **vector de medias** de $\mathbf{X}$ es

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

- En particular, para **variable aleatoria bidimensional**,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

el vector de medias es

$$\mu_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: vector de medias y matriz de cov

- Para las variables aleatorias X_1 (número de abonos quí ... $_2$ (número de abonos orgánicos) de los ejemplos anteriores

$$E(X_1) = 0.8, \qquad V(X_1) = 0.36,$$
$$E(X_2) = 0.4, \qquad V(X_2) = 0.24,$$
$$Cov(X_1, X_2) = -0.12.$$

- Por tanto, el vector de medias y la matriz de varianzas y ... s del vector (X_1, X_2) son, respectivamente

$$\mu_{(X_1,X_2)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{\Sigma_{(X_1,X_2)}} = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.12 \\ -0.12 & 0.24 \end{pmatrix}$$

Coeficiente de correlación

entre variables aleatorias

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Correlación entre dos variables aleatorias

- Se define el **coeficiente de correlación** entre dos variabl s, X y Y, como

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- Evidentemente, el coeficiente de correlación siempre cons o **de la covarianza**, por lo que

  - Cuando hay una alta probabilidad de que valores grande n asociados con valores grandes de Y, y los valores pe X estén asociados con valores pequeños de Y, $\rho_{X,Y}$ será
  - Cuando existe una alta probabilidad de que valores g X se encuentren asociados a valores pequeños de Y y vi , será **negativo**.

- Pero además, puede demostrarse que **el coeficiente de** **n** entre dos variables aleatorias **siempre toma valores ent** s decir, $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$, para cualquier par de variables X e

Interpretación del coeficiente de correlació

- Esto permite **evaluar el grado de dependencia lineal** e -riables aleatorias.
  - Si $\rho_{X,Y} = 0$, es decir, si X e Y son **incorrelacionad** e ninguna dependencia lineal entre ellas.
  - Si $\rho_{X,Y} = 1$, X es una función lineal de Y con pendien
  - Si $\rho_{X,Y} = -1$, X es una función lineal de Y con pendie a.
  - Si $\rho_{X,Y}$ **toma un valor próximo a 1**, X e Y tiene e dependencia lineal de tipo positivo.
  - Si $\rho_{X,Y}$ **toma un valor próximo a -1**, X e Y tiene e dependencia lineal de tipo negativo.
  - Si $\rho_{X,Y}$ **toma un valor próximo a 0**, la dependenci e X e Y es leve.

Ejemplo: coeficiente de correlación

- Para las variables aleatorias X_1 (número de abonos quí ... $_2$ (número de abonos orgánicos) de los ejemplos anteriores ... o que la matriz de varianzas y covarianzas del vector $(X_1,$ ...

$$\mathbf{\Sigma}_{(\mathbf{X_1},\mathbf{X_2})} = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.12 \\ -0.12 & 0.24 \end{pmatrix}$$

- Por tanto su coeficiente de correlación es

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{Cov\,(X_1, XX_2)}{\sqrt{V(X_1)\times V(X_2)}} = \frac{-0.12}{\sqrt{0.36\times 0.24}} = -0.$$

- Este valor del coeficiente de correlación indica que existe c ... n lineal negativa entre ambas variables, aunque no muy fue

M. de varianzas y covarianzas: caso bivaria

- Para **variable aleatoria bidimensional**,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

la **matriz de varianzas y covarianzas** es

$$\Sigma_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

- Observemos que $\Sigma_{\mathbf{Z}}$ puede expresarse también de la forn

$$\Sigma_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{X,Y} \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X \times \sigma_Y \times \\ \sigma_x \times \sigma_Y \times \rho_{X,Y} & \sigma_X^2 \end{pmatrix}$$

donde $\sigma_X^2 = V(X)$, $\sigma_Y^2 = V(Y)$, $\sigma_{X,Y} = Cov(X,Y)$, y

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \times \sigma_Y}.$$

Ejercicio 4 (continuación)

- La junta de una comunidad vecinal está formada por 10 … o del primer piso, tres del segundo, dos del tercero, tres del … o del quinto. De los 10 miembros de la junta se selecciona… a comisión de dos personas.

  Se desea conocer la representación que tienen en esta junt… s de los dos pisos más bajos. Sea P el número de vecinos de… o en la comisión y S el número de vecinos del segundo.

  1. Hallar la función de masa conjunta del vector (P, S).
  2. Encontrar las distribuciones marginales de P y S.
  3. Calcular $E(P)$, $E(P|S=0)$, $E(P|S=1)$ y $E(P|S=2$
  4. Determinar si las variables P y S son independientes.
  5. Calcular el coeficiente de correlación entre P y S.

  resolución:.........pizarra

Solución a (parte del) Ejercicio 4:

3.

$$
\begin{aligned}
E(P) &= \frac{3}{15} = 0.2, \\
E(P|S=0) &= \frac{2}{7}, \\
E(P|S=1) &= \frac{1}{7}, \\
E(P|S=2) &= 0.
\end{aligned}
$$

5.

$$\rho_{(P,S)} = -0.2181$$

Vectores aleatorios continuos

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Vectores aleatorios continuos

- **Definición**: Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X$ ... es **continuo** si para cada componente $i = 1, 2, \ldots, n,$ X_i es ... e aleatoria continua.

Vectores aleatorios continuos bivariantes

- La distribución de probabilidades de un vector aleatorio bi n- tinuo, (X_1, X_2), viene determinada por una **función de de n- junta**, $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, que satisface

$$1.- \qquad f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

y

$$2.- \qquad \int_{S_{X_2}} \int_{S_{X_1}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

- La probabilidad de que el vector aleatorio tome valores en i- nado conjunto se calcula integrando esta función de densi o conjunto:

$$P\,(a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2$$

Ejemplo: vectores aleatorios continuos biv

- La cantidad de dos elementos en cierto tipo de mineral (e dada por la función de densidad

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 6e^{-2x_1}e^{-3x_2} & \text{si } x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 & \text{en el resto de ca} \end{cases}$$

1. Comprobar que esta función bivariante es en efecto ur e densidad conjunta.

2. Calcular las probabilidades,

$$P\left(1 \leq X_1 \leq 2, 2 \leq X_2 \leq 3\right)$$

y

$$P\left(0 \leq X_1 \leq 2, 2 \leq X_2 \leq \infty\right)$$

Solución al ejemplo sobre vectores continu

URJC

1. Es claro que $f(x_1, x_2) \geq 0$ para todos los valores de x_1 y

   Además
   $$\int_{S_{X_2}} \int_{S_{X_1}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_2 dx_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty 6e^{-2x_1} e^{-3x_2} d$$

   Por tanto $f(x_1, x_2)$ es una función de densidad.

2. $$\begin{aligned} P(1 \leq X_1 \leq 2, 2 \leq X_2 \leq 3) &= \int_2^3 \int_1^2 6e^{-2x_1} e^{-3x_2} dx_1 d \\ &= \left(e^{-4} - e^{-2}\right)\left(e^{-9} - e^{-6}\right) \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} P(0 \leq X_1 \leq 2, 2 \leq X_2 \leq \infty) &= \int_0^2 \int_2^\infty 6e^{-2x_1} e^{-3x_2} dx_2 d \\ &= \left(1 - e^{-4}\right) e^{-6} = \mathbf{0.0024} \end{aligned}$$

Funciones de densidad marginales

- Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio continuo. La **función** … **d marginal** de X_1 viene dada por

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{S_{X_2}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_2,$$

- De forma análoga, la función de densidad marginal de X… a por

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{S_{X_1}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1.$$

- A partir de estas densidades marginales se pueden calcula… -za, varianza, etc, de cada una de las variables aleatorias … s individualmente.

Ejemplo: funciones de densidad marginales

- En el caso de los dos elementos del mineral, la función d marginal de X_1 es

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_2 = \begin{cases} 0 & \text{para} \\ 2e^{-2x_1} & \text{para} \end{cases}$$

- La densidad marginal de X_2 es

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^\infty f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 = \begin{cases} 0 & \text{para} \\ 3e^{-3x_1} & \text{para} \end{cases}$$

- Por consiguiente,

$$E(X_1) = \int_0^\infty 2xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}, \qquad V(X_1) = \frac{1}{4}$$

y

$$E(X_2) = \int_0^\infty 3xe^{-3x}dx = \frac{1}{3}, \qquad V(X_2) = \frac{1}{9}$$

Otro ejemplo: funciones de densidad marg

- Se desea analizar la proporción (o tanto por uno) que p s desechos orgánicos (X) y los microorganismos patógen el agua de cierta región. Su función de densidad bivariante

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & \text{para } 0 < x < 1, \quad 0 < y \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Queremos saber cuál es la **proporción esperada de cad s sustancias contaminantes por separado.**

- La función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \quad 1) \\ \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy & \quad 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \\ \frac{2}{3}(x+1) & \text{si } 0 \end{cases}$$

Otro ejemplo: densidades marginales (conti

- Por tanto, la proporción esperada de desechos orgánicos es

$$E(X) = \int_0^1 x\,\frac{2}{3}\,(x+1)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(x^2+x\right)dx =$$

- Por otra parte, la función de densidad marginal de Y es

$$f_Y(y) = f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \quad 1) \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx & \quad 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \\ \dfrac{1}{3}(1+4y) & \text{si } 0 \end{cases}$$

- Luego la proporción esperada de micoorganismos patóge

$$E(Y) = \int_0^1 x\,\frac{1}{3}(1+4x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\left(x+4x^2\right)dx =$$

Funciones de densidad condicionadas

- Al igual que ocurre en el caso discreto, cuando se sabe que … e ha tomado un determinado valor, la distribución de prob… e la otra variable aleatoria puede verse modificada.

- La función de densidad de X_1 **condicionada** por la o… el suceso $X_2 = x_2$ ($X_1|X_2 = x_2$) es

$$f_{X_1}(x_1|X_2 = x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

  Esta función de densidad tiene sentido si (y sólo si) $x_2 \in$ …

- De igual forma, para $x_1 \in S_{X_1}$, podemos considerar l… e densidad de X_2 condicionada por el suceso $X_1 = x_1$ (X_2 …

$$f_{X_2}(x_2|X_1 = x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}.$$

Ejemplo: funciones densidad condicionadas

- En el caso de los dos elementos del mineral, la función de ... e X_1 condicionada por que ha ocurrido $X_2 = x_2$ (con $x_2 >$ ...

$$f_{X_1}(x_1|X_2 = x_2) = \begin{cases} \dfrac{6e^{-2x_1}e^{-3x_2}}{3e^{-3x_2}} & \text{si } x_1 > 0, \\ 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-2\cdots} & \cdots 0, \\ 0 & \cdots 0 \end{cases}$$

- Observamos que en este caso se verifica $f_{X_1}(x_1|X_2 = x_2 \ldots)$ para todo x_2, es decir, que las funciones de densidad c... s por cualquier valor de X_2 coinciden con la marginal.

- De forma similar se comprueba que, si $x_1 > 0$,

$$f_{X_2}(x_2|X_1 = x_1) = \begin{cases} 3e^{-3x_2} & \text{si } x_2 > 0, \\ 0 & \text{si } x_2 \leq 0 \end{cases}$$

- Como puede verse, también se verifica $f_{X_2}(x_2|X_1 = x_1 \ldots)$ para todo x_1.

Otro ejemplo: funciones densidad condicio

- En el ejemplo de los contaminantes del agua, suponga -bemos que la proporción de sustancias radioctivas es y queremos saber cómo se distribuye la probabilidad para X (proporción de microorganismos patógenos)

- La densidad de X condicionada a $Y = y$ (con $y \in (0,1)$)

$$f\,(x|Y=y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{2}{3}(x+2y)}{\frac{1}{3}(x+4y)} & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2x+4y}{1+4y} & \quad 1, \\ 0 & \quad \text{so} \end{cases}$$

- En particular, la densidad de X condicionada por $Y = 0.$

$$f_X\,(x|Y=0.25) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1} & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Nótese que, en este caso, $f_X\,(x|Y=0.25) \neq f_X(x)$.

Independencia de variables aleatorias conti

- Recordemos que dos variables aleatorias X e Y son **ind** **s** si para cualquier par de conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se verifica

$$P\left(X \in A, Y \in B\right) = P\left(X \in A\right) \times P\left(Y \in B\right).$$

- Puede demostrarse que, en el caso de variables aleatori s esto es equivalente a que para todos los valores del soport e

$$f_{X,Y}\left(x,y\right) = f_X\left(x\right) \times f_Y\left(y\right) \qquad \forall\, x \in S_X,\ \forall y \in S$$

es decir, que **la función de densidad conjunta sea el** **e** **las funciones de densidad marginales.**

Ejemplo: v. al. continuas independientes

- En el caso de los dos elementos del mineral, las variables n **independientes**, ya que se verifica

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 6e^{-2x_1}e^{-3x_2} = 2e^{-2x_1} \times 3e^{-3x_1} = f_{X_1}(x_1 \quad ,$$

para todo $x_1 \in S_{X_1}$, $x_2 \in S_{X_2}$.

- Esto explica por qué en este ejemplo las distribuciones c s coinciden con las marginales.

Ejemplo: v. al. continuas dependientes

URJC

- En el caso de los dos contaminantes del agua, las variab o **son independientes**, ya que, por ejemplo,

$$f_{X,Y}(0.5, 0.25) = \frac{1}{3} \neq 1 \times \frac{2}{3} = f_X(0.5) \times f_Y(0.2$$

- Nótese que esto también podía haberse deducido direc el hecho de que

$$f_X\,(x|Y = 0.25) \neq f_X(x).$$

Vectores aleatorios continuos de dimensió

- Los conceptos y resultados que hemos analizado para -
riante ($n = 2$), se pueden extender al caso n variante, n
variables continuas, $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- La **función de densidad conjunta** verificará

1.− $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in$

2.− $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2$

- La **distribución marginal** de X_k viene dada por

$$f_{X_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{k-} \quad x_n$$

Distribución normal multivariante

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Distribuciones gaussianas multivariantes

- Sean $\mu \in \mathbb{R}^n$ un vector n-dimensional y $\mathbf{\Sigma}$ una matriz e orden n simétrica y semidefinida positiva.

- Se dice que el vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ si s- **tribución normal n-variante con vector de medias μ e covarianzas Σ** si su función de densidad es

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right\}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

- Esto se denota como

$$\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \mathbf{\Sigma}).$$

Distribuciones gaussianas bivariantes

- Consideremos ahora el caso particular $n = 2$, es decir, e... -ciones gaussianas bivariantes. Sea $\mathbf{Z} = (X, Y)'$ un vector ...

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\mu_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \cdots_{X,Y} \\ \sigma_X \times \sigma_Y \times \rho_{X,Y} & \end{pmatrix} \right)$$

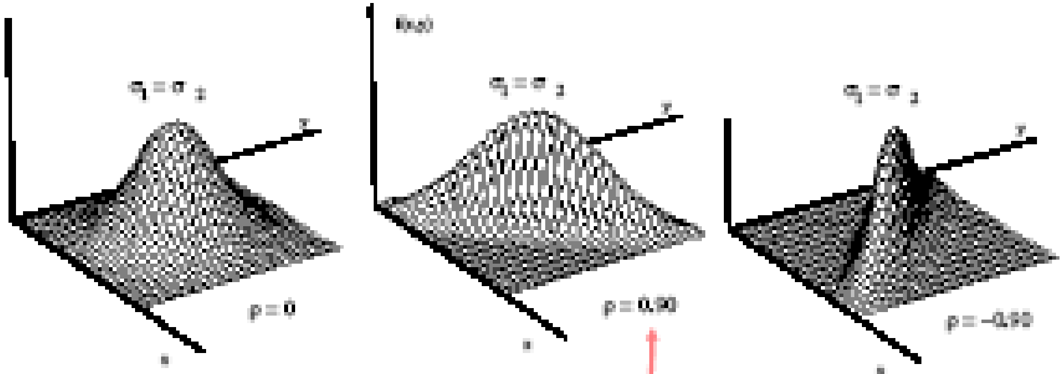
- La función de densidad bivariante de $\mathbf{Z}$, puede expresarse ...

$$f_{\mathbf{Z}}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1 - \rho_{X,Y}^2}} \times$$

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho_{X,Y}^2)} \left[\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho_{X,Y} \left(\frac{x \cdots}{} \right) \cdots \mu_y \right) \right.$$

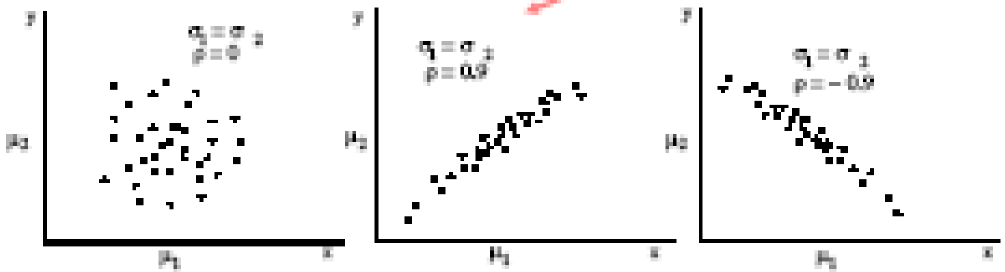
para todo $\mathbf{z} = (x, y)' \in \mathbb{R}^2$,

Gráficos de distribuciones gaussianas bivar



Función de densidad

Diagrama de dispersión



Transformaciones lineales de normales

- Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio con **distribución gaussiana**,

$$\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \mathbf{\Sigma}),$$

  y sea A cualquier matriz de dimensión $p \times n$ con $p \leq n$.

- Consideremos el vector aleatorio

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X}.$$

- Puede probarse que **la distribución de $\mathbf{Y}$ también es g**

- Es decir, **al aplicar cualquier transformación a una n lineal, la variable resultante es también normal.**

- Más concretamente

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X} = N_p(A\mu, A\mathbf{\Sigma}A^t).$$

Ejemplo: transformaciones lineales de norr

- **Ejercicio 8:** Consideremos el vector aleatorio

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

A partir de este vector definimos las variables

$$T = X + Y$$

$$Z = X - 2Y,$$

Determinar la distribución del vector aleatorio $(T, Z)^t$.

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 8

- **Solución:**

$$\begin{pmatrix} T \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right.$$

Ejercicio 9: transformaciones lineales de n

- Consideremos el vector aleatorio tridimensional

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

A partir de este vector definimos las variables

$$C = -2X + 3Z$$

$$D = X + Y - Z,$$

Determinar la distribución del vector aleatorio $(C, D)^t$.

resolución:.........pizarra

(Ejercicio incluído en la Hoja de Problemas de Repaso 2)

Independencia de variables gaussianas

- En el caso de **distribuciones normales, independencia** n- **ción son equivalentes**.
- Es decir, si X e Y son variables gaussianas, entonces se n- dientes si y sólo si su **matriz de varianzas y covariar** a **matriz diagonal**, esto es, de la forma

$$\Sigma_{\mathbf{X},\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

con $a \geq 0$, $b \geq 0$.

- Recordemos que las **variables independientes siempre** o- **lacionadas**, pero que el recíproco, en general, no es cier
- Sin embargo, para variables gaussianas, la incorrelación a independencia.

Ejemplo: independencia de variables norma

- **Ejercicio 10:** Consideremos el vector aleatorio

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

A partir de este vector definimos $T = X + Y$ y $Z = X -$

¿Son las variables aleatorias X e Y independientes?

¿Lo son las variables Z y T?

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 10:

- Las variables X **e** Y **sí son independientes,** ya que

$$Cov(X,Y) = 0,$$

y para distribuciones gaussianas, la incorrelación garant -dencia.

Por otra parte, hemos visto que

$$\begin{pmatrix} T \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & - \\ -1 & \end{pmatrix}\right.$$

Puesto que

$$Cov(Z,T) = -1 \neq 0,$$

las variables Z **y** T **no son independientes**.

Ejercicio 9 (continuación)

- Consideremos el vector aleatorio tridimensional

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

A partir de este vector definimos las variables

$$C = -2X + 3Z$$

$$D = X + Y - Z,$$

Determinar si las variables C y D son o no son independ

resolución:.........pizarra

(Ejercicio incluído en la Hoja de Problemas de Repaso 2)