

Tema 3. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo continuo.

2015-2016

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

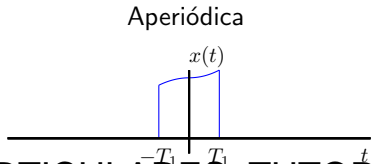
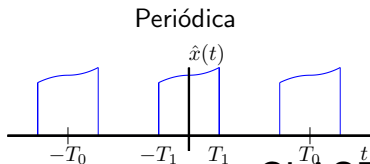
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Análisis de Fourier de señales no periódicas

Señal aperiódica (no periódica)

Se puede considerar que una señal aperiódica es una señal periódica con periodo infinito \Rightarrow el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas puede generalizarse al caso no periódico.



Cartagena99

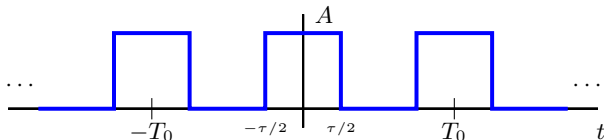
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Análisis de Fourier de señales no periódicas

Ejemplo del tren de pulsos rectangulares

$$a_k = \frac{A\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

T_0 es el periodo y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ es la pulsación fundamental.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

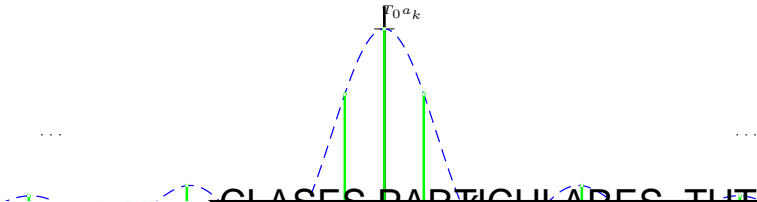
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$a_k \cdot T_0 = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

para distintos valores de T_0 veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$T_0 = 2\tau, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

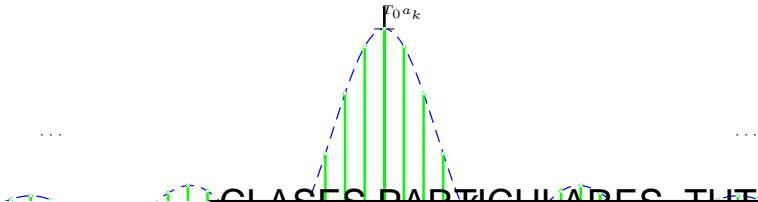
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$a_k \cdot T_0 = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

para distintos valores de T_0 veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$T_0 = 4\tau$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

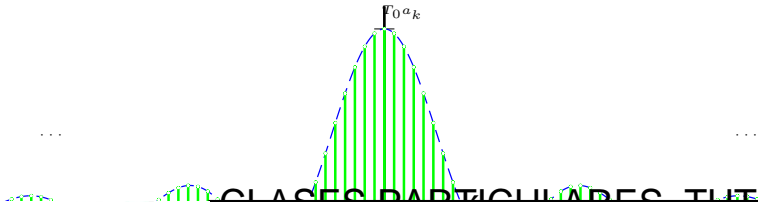
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$a_k \cdot T_0 = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

para distintos valores de T_0 veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$T_0 = 8\tau$$

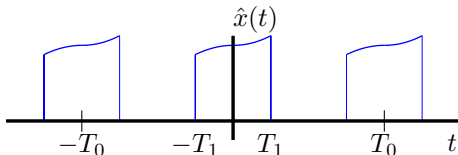


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Transformada de Fourier

Consideremos una señal cualquiera periódica, $\hat{x}(t)$:



A partir de ella consideramos la versión aperiódica cuando $T = \infty$:

$x(t)$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Definición de la transformada de Fourier

Señal periódica

La señal $\hat{x}(t)$ se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Señal aperiódica

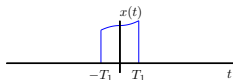
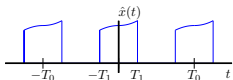
La señal $x(t)$ se puede expresar en términos de la transformada de Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relación entre DSF y TF



Consideración

Teniendo en cuenta que $x(t) = \hat{x}(t)$ para $|t| < T_0/2$ y que $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

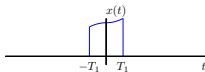
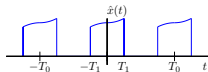
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la transformada de $x(t)$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relación entre DSF y TF



Consideración

Teniendo en cuenta que $x(t) = \hat{x}(t)$ para $|t| < T_0/2$ y que $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

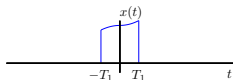
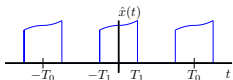
Teniendo en cuenta la transformada de $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Relación entre DSF y TF



Consideración

Teniendo en cuenta que $x(t) = \hat{x}(t)$ para $|t| < T_0/2$ y que $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

los a_k de la versión periódica se pueden expresar:

Cartagena99

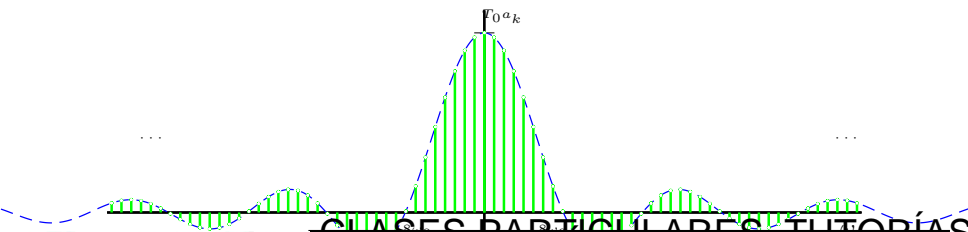
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relación entre DSF y TF

Conclusión

- La TF de la aperiódica es la envolvente del DSF de la periódica.
- El DSF de la periódica es el muestreo de la TF de la aperiódica.

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Transformada de Fourier: definición

Ecuación de análisis: Transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Ecuación de síntesis: Transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos de transformadas de Fourier

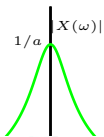
Ejemplo1

Obtener la transformada de Fourier de la señal:

$$x(t) = e^{-at} u(t) ; a > 0$$

Resultado

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} ; a > 0$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplos de transformadas de Fourier

Ejemplo2

Obtener la transformada de Fourier de la señal:

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Resultado

$$X(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Comparar con el DSF de la versión periódica:

$$a_k = \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - **Tabla de Transformadas de Fourier**
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Tabla de Transformadas de Fourier

Señal	Transformada
Señal Periódica, con periodo T_0 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$x(t) = A$	$X(\omega) = 2\pi A \delta(\omega)$
$x(t) = A e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega) = 2\pi A \delta(\omega - \omega_0)$
$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$	$X(\omega) = \pi A [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$x(t) = A \sin(\omega_0 t)$	$X(\omega) = \frac{\pi}{j} A [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
Pulso rectangular de anchura τ $x(t) = \begin{cases} A, & t < \tau/2 \\ \dots & \dots \end{cases} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$X(\omega) = \frac{2A \sin(\omega\tau/2)}{\omega} = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Tabla de Transformadas de Fourier

Señal	Transformada
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$x(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega > \omega_c \end{cases}$
$x(t) = A\delta(t)$	$X(\omega) = A$
$x(t) = A\delta(t - t_0)$	$X(\omega) = Ae^{-j\omega t_0}$
$x(t) = u(t)$	$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$x(t) = e^{-at}u(t), \Re(a) > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

$$x(t) = e^{-at}u(t), \Re(a) > 0$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - **Propiedades de la transformada de Fourier**
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Señal	Transformada
	$x(t), y(t)$	$X(\omega), Y(\omega)$
Definición	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
	$x(t)$ Par	$X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$
	$x(t)$ Impar	$X(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$X(\omega) e^{-j\omega t_0}$
Modulación	$x(t) e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(\omega) Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Señal	Transformada
	$x(t), y(t)$	$X(\omega), Y(\omega)$
Simetría señales reales	$x(t)$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $\Re\{X(\omega)\} = \Re\{X(-\omega)\}$ $\Im\{X(\omega)\} = -\Im\{X(-\omega)\}$ $ X(\omega) = X(-\omega) $ $\text{Arg}\{X(\omega)\} = -\text{Arg}\{X(-\omega)\}$
Simetría señales reales pares	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
Simetría señales reales impares	$x(t)$ real y impar	$X(\omega)$ imaginaria pura e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$	$\Re\{X(\omega)\}$
	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$	$j\Im\{X(\omega)\}$
Dualidad	$f(t)$	$G(\omega)$
	$G(t)$	$2\pi f(-\omega)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Transformada de Fourier de señales periódicas

Hasta ahora

- Señales periódicas → DSF
- Señales aperiódicas → TF

Se puede calcular la TF de una señal periódica??

Sea la siguiente señal:

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Si ahora consideramos la señal:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Su transformada será:

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Transformada de Fourier de señales periódicas

Proposición:

La transformada de Fourier de una señal periódica consiste en un tren de impulsos (deltas) equiespaciados en frecuencia.

Expresión de la transformada

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relación de Parseval

Señales definidas en energía

Son aquellas en las cuales la energía es finita. Cumplen por tanto:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

En ese caso también se puede calcular la energía a partir de la transformada de Fourier:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Por esta razón, el espectro de amplitudes está relacionado con la distribución de la energía en la frecuencia.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Convergencia de la transformada de Fourier

Condiciones de Dirichlet

Condición 1. $x(t)$ debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Ejemplo donde no se cumple:

$$x(t) = \frac{1}{t^2}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

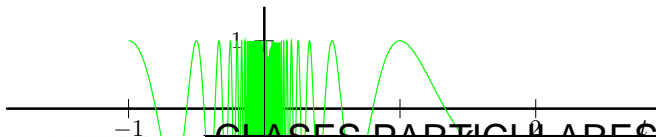
Convergencia de la transformada de Fourier

Condiciones de Dirichlet

Condición 2. $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo.

Ejemplo donde no se cumple:

$$x(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{t}\right) & -1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

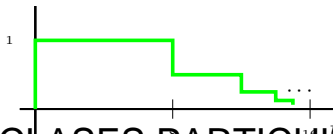
Convergencia de la transformada de Fourier

Condiciones de Dirichlet

Condición 3. $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito y éstas deben ser finitas.

Ejemplo que no cumple

Señal compuesta por infinitas secciones donde cada una de ellas tiene la mitad de anchura y de altura que la anterior. Está definida en el intervalo $(0,16)$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

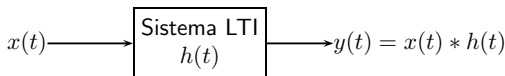
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

Dominio del tiempo

Sea un sistema LTI, la salida $y(t)$ es:



Dominio de la frecuencia

Si obtenemos las transformadas de Fourier de $x(t)$, $y(t)$, $h(t)$ y aplicamos la propiedad de la convolución de la transformada de Fourier:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta en frecuencia

Definición

Despejando $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = |H(\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

- La transformada de Fourier de la respuesta al impulso, $H(\omega)$, se le conoce como **respuesta en frecuencia del sistema**.
- Su módulo, $|H(\omega)|$, se conoce como módulo de la respuesta en frecuencia o respuesta en amplitud.
- La fase, $\phi(\omega)$ se conoce como respuesta en fase.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta en frecuencia

Efecto de la respuesta en frecuencia:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Tiene un efecto de **filtrado**:

- si $|H(\omega)|$ es nulo o casi nulo en unas determinadas frecuencias, esas se eliminarán y no estarán en la señal de salida.
- Si $|H(\omega)|$ tiene un valor “grande” en unas frecuencias, estas aparecerán reforzadas a la salida.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

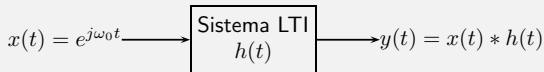
- 1 Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
 - Transformada de Fourier
 - Ejemplos de transformadas de Fourier
 - Tabla de Transformadas de Fourier
 - Propiedades de la transformada de Fourier
 - Transformada de Fourier de señales periódicas
 - Relación de Parseval
 - Convergencia de la transformada de Fourier
- 2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
 - Autofunciones de un sistema LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de un sistema LTI a una exponencial compleja

Autofunción



Las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$H(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \rightarrow \text{Autovalor (Respuesta en frecuencia)}$$

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow \text{Autofunción}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

$$y(t) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Problema:

Si se introduce a la entrada una señal sinusoidal:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$$

Se puede poner en forma exponencial mediante la relación de Euler:

$$x(t) = A \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right) = \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Aplicando la propiedad de linealidad y de autofunción:

$$y(t) = H(\omega_0) \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + H(-\omega_0) \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

$$y(t) = |H(\omega_0)| \cdot e^{j\phi(\omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + |H(-\omega_0)| \cdot e^{j\phi(-\omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Consideración

Si el sistema es real se cumplen las siguientes propiedades de la transformada:

$$H^*(\omega) = H(-\omega) \Rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = |H(-\omega)| \\ \phi(\omega) = -\phi(-\omega) \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Usando esta propiedad:

$$y(t) = |H(\omega_0)| \cdot e^{j\phi(\omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + |H(\omega_0)| \cdot e^{-j\phi(\omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Finalmente:

$$y(t) = |H(\omega_0)| \frac{A}{2} \left(e^{j(\omega_0 t + \theta + \phi(\omega_0))} + e^{-j(\omega_0 t + \theta + \phi(\omega_0))} \right)$$

$$y(t) = A \cdot |H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \theta + \phi(\omega_0))$$

Conclusión

- El coseno es atenuado o amplificado por el módulo de la respuesta en frecuencia y se desfasa con la fase de la respuesta en frecuencia.
- En ambos casos la respuesta en frecuencia se evalúa en la frecuencia del coseno.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70