

Tema 2

Estructuras reticuladas

Máster Universitario en Ingeniería
Industrial
Complemento de Formación

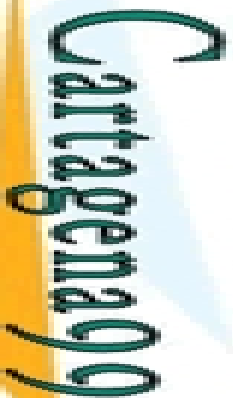


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

--

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Índice



roducción.

terminación estática/cinemática.

étodo de equilibrio. Ecuación de Navier

étodo de compatibilidad. Ecuaciones

icas

étodo de rigidez

s de estructura

ave a dos aguas (pórtico/hastial)

ificios

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Motivación

La necesidad de resolver estructuras hiperestáticas se inicia a principios del siglo XIX.

Avances científicos y sociales en el siglo XVIII.

La revolución industrial demanda estructuras e infraestructuras que favorezcan el desarrollo.

Se abren en Europa las escuelas de ingeniería.

Siméon-Denis Poisson (París) propone el método de compatibilidad en 1826 para resolver arcos hiperestáticos y vigas continuas.

P. E. Clapeyron (París y Moscú) presenta un trabajo sobre resolución de vigas continuas en 1857.

El método de compatibilidad es laborioso y no permite el tanteo sistemático. Esto motivó la aparición del método de equilibrio.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, green, cursive font. The text is positioned above a graphic element consisting of a blue and orange shape that resembles a stylized '9' or a drop.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Motivación

lización del hormigón armado en el siglo XX provoca
as estructuras se modelen como barras conectadas
udos rígidos (trabajar a flexión). Además, se
aliza la utilización de estructuras porticadas.

ado de hiperestatismo elevado (se desaconseja el uso del
étodo de compatibilidad).

dos derivados:

étodo de pendientes y flechas (Axel Bendixen – 1914)

étodo de equilibrios para la resolución de pórticos (A. Calisev
1922).

étodo de distribución de momentos o de Cross (Hardy Cross -
1932).

étodo de rigidez “utilización de computadoras para
eneralizar el método de equilibrio” (segunda mitad del siglo
). Es la forma práctica de calcular estructuras hoy en día.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, green, cursive font. The text is positioned above a graphic element consisting of a blue and orange shape that resembles a stylized '9' or a drop with a tail.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Introducción (Pórticos)

o estructura porticada es una estructura reticulada de plano medio
la a base de soportes y dinteles.

e cierra se denomina marco.

es común en ingeniería civil y edificación.

mentos trabajan a flexión compuesta recta (sometidos a momentos
es de eje perpendicular al plano medio y a esfuerzos cortantes y
contenidos en dicho plano).

rígidos.

ado de indeterminación estática.

resolver estas estructuras por el método de compatibilidad se
enda la simplificación por simetría.

e no tan necesario, la simetría también simplifica la resolución por
odo de equilibrio.

odo de rigidez es una generalización del método de equilibrio

ma aborda los tres métodos para el análisis y diseño de pórticos

ps

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, green, cursive font. The text is positioned above a graphic element consisting of a blue and orange shape that resembles a stylized '9' or a drop with a tail.

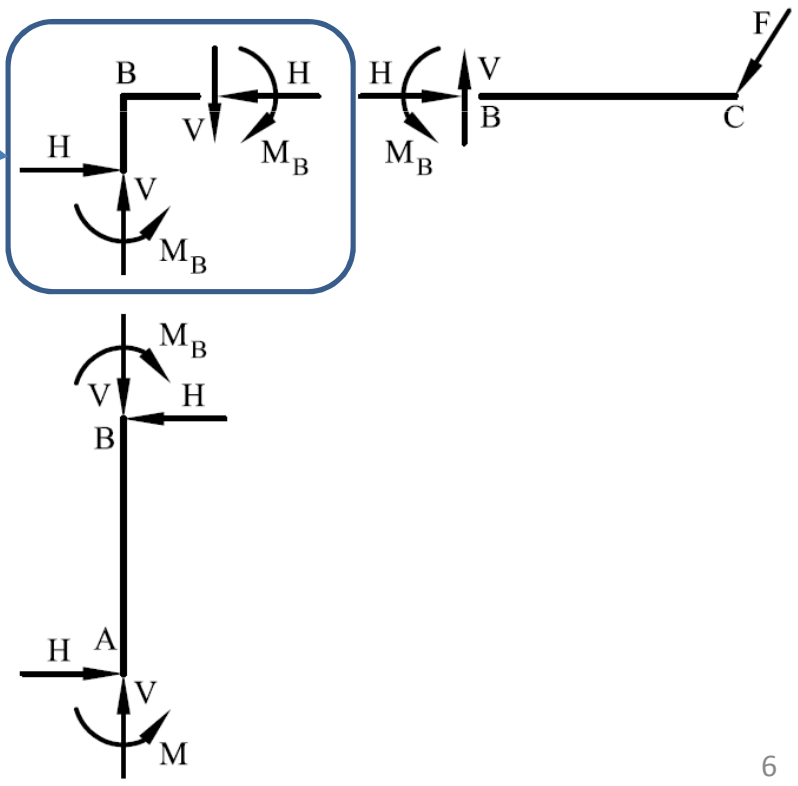
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

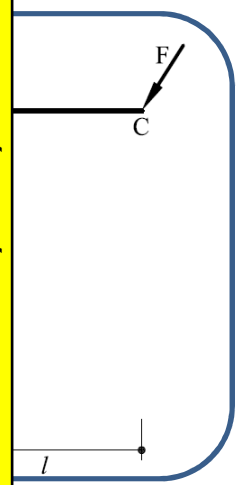
Introducción

rio estático (ecuaciones de la estática).
estructuras planas hay 3 ecuaciones estáticas linealmente independientes.
las las barras y nudos deben cumplir las ecuaciones de la estática (condición necesaria y suficiente).
peñas deformaciones (ecuaciones de equilibrio sobre la estructura sin deformar).

En una estructura reticulada hay continuidad de fuerzas y momentos en los puntos de unión.



Análisis estructura reticulada sencilla



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Introducción

Hipótesis

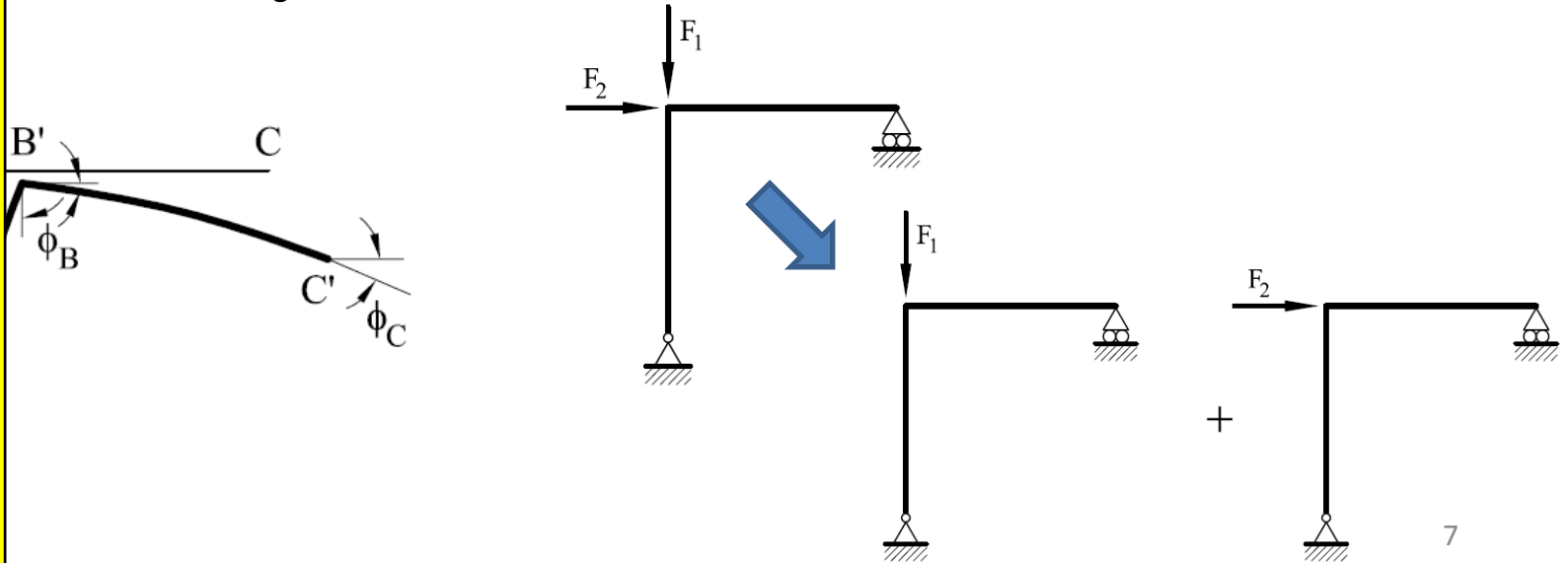
- Linealidad geométrica (pequeñas deformaciones)
- Linealidad del material (Hooke generalizada)

Simplificaciones

- Solución única al aplicar las condiciones de equilibrio y compatibilidad
- Simplificación del problema

...
... ecuaciones de equilibrio
... sobre estructura original

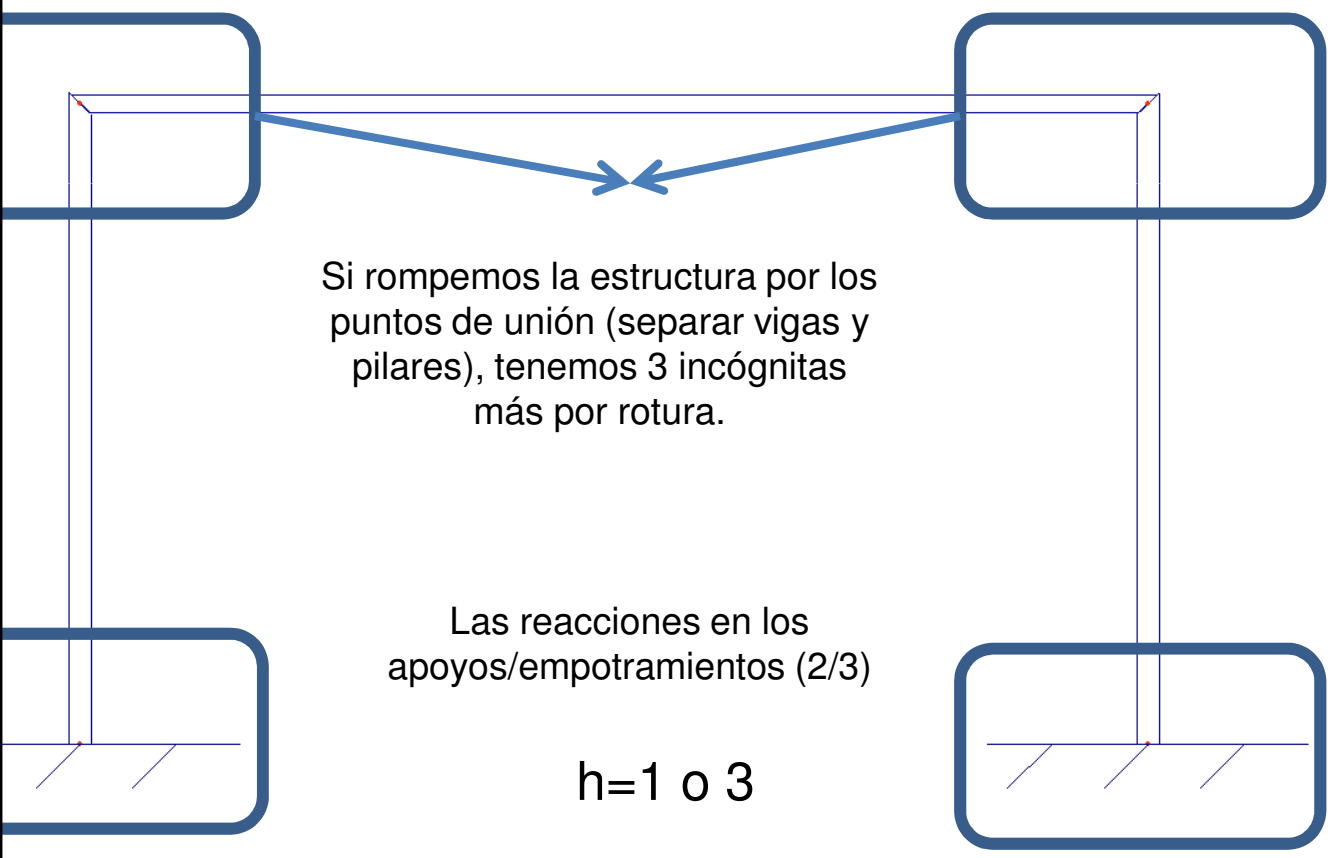
Principio de superposición



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
...
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Introducción

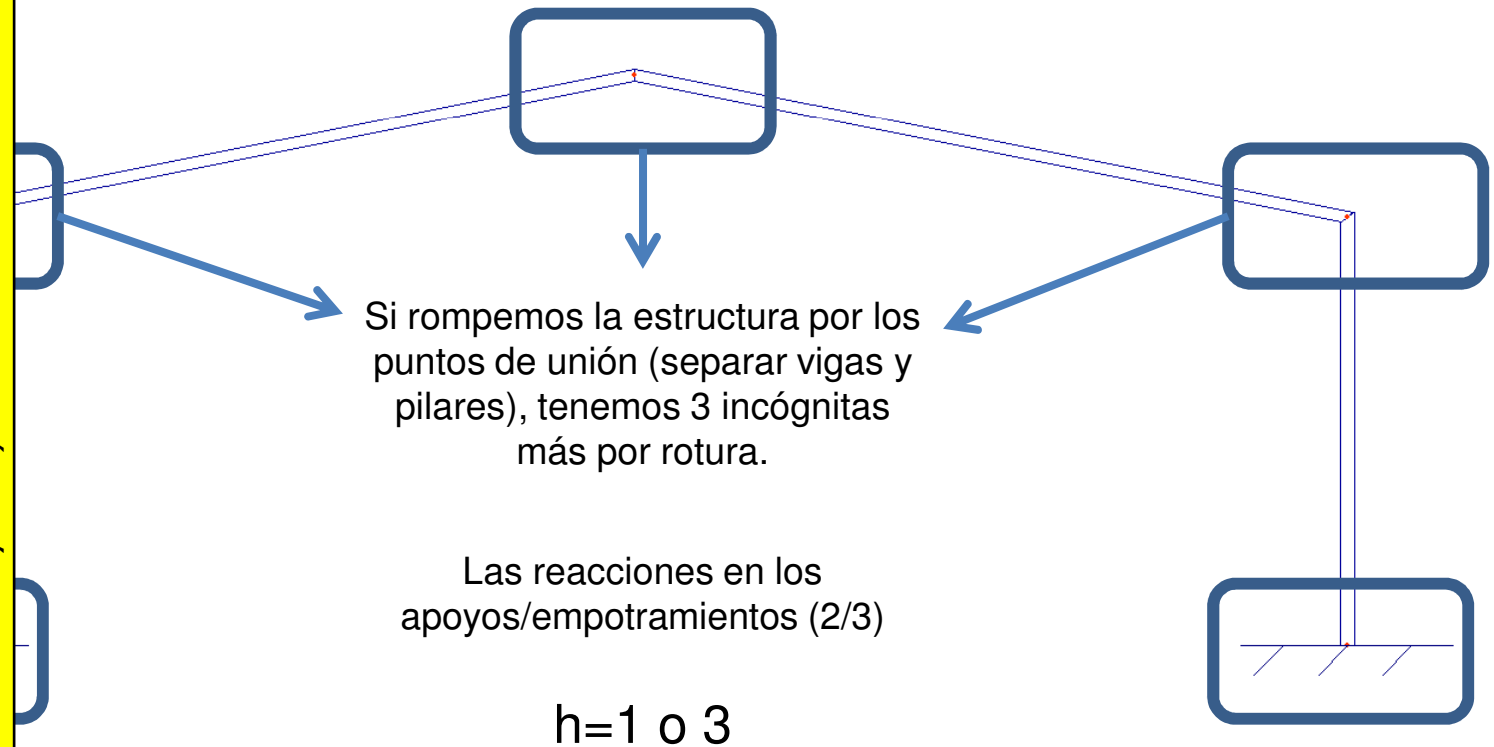
de indeterminación estática o de hiperestaticidad (**h**):
número de reacciones adicionales a las ecuaciones de equilibrio.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Indeterminación estática (Grado de Hipertatismo)

de indeterminación estática o de hiperestaticidad (h):
Número de reacciones adicionales a las ecuaciones de equilibrio.



Cartagena99

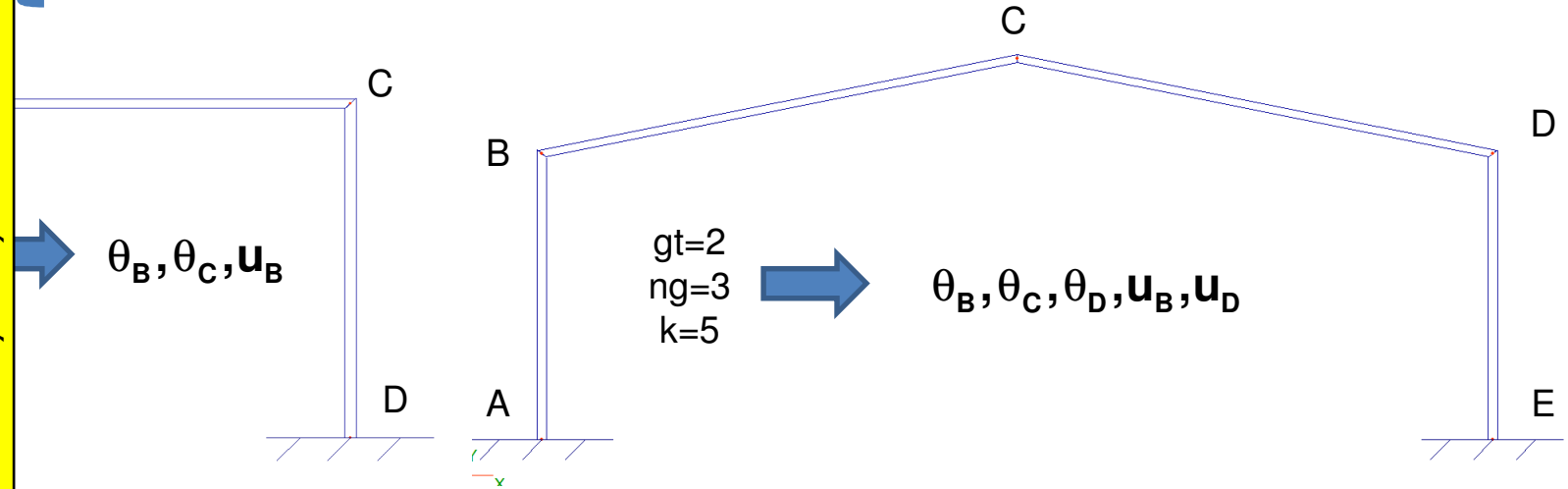
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Introducción

Grado de indeterminación cinemática (k): número mínimo de movimientos (traslaciones o giros) que es necesario conocer para determinar completamente el estado de deformaciones

Grado de traslacionalidad (gt): número de movimientos independientes de sólido rígido de las barras (traslaciones o giros alrededor de sus CIRs). **gt** se puede obtener aproximando la estructura reticulada por una articulada de barras rígidas. El valor del grado de libertad del mecanismo rígido es el valor de **gt**.

ng: número de giros de nudos desconocidos



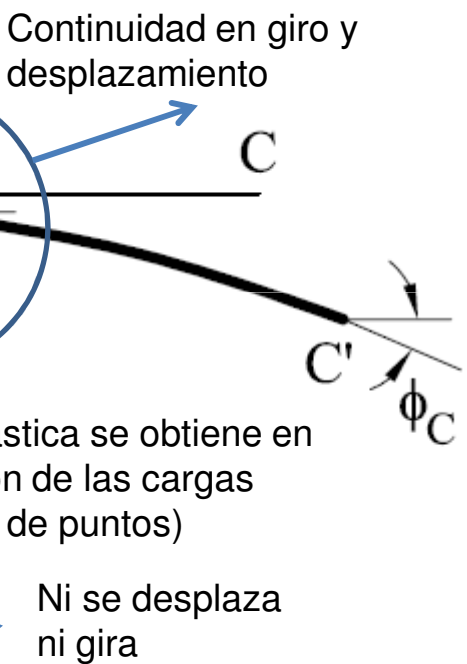
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Introducción

Notas

- Métodos de compatibilidad y equilibrio se desprecia la deformación en axil.
- Método de rigidez se considera la deformación en axil.
- Objetivo es conocer: reacciones en los apoyos, desplazamientos y giros en los extremos de cada una de las barras, dibujar diagramas de cortante y flector y dibujar la curva de la elástica aproximada



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Introducción

Una estructura es simétrica respecto a un eje cuando presenta simetría de forma y de características mecánicas (debido a flexión, axil, cortante y torsión)

En esta continuación se analizan estructuras reticuladas planas simétricas respecto a un eje. Las conclusiones se podrán aplicar a otras situaciones.

Un estado de carga puede ser simétrica o antisimétrica respecto a ese eje de simetría.

Cualquier estado de carga puede descomponerse en un estado simétrico + antisimétrico de carga.

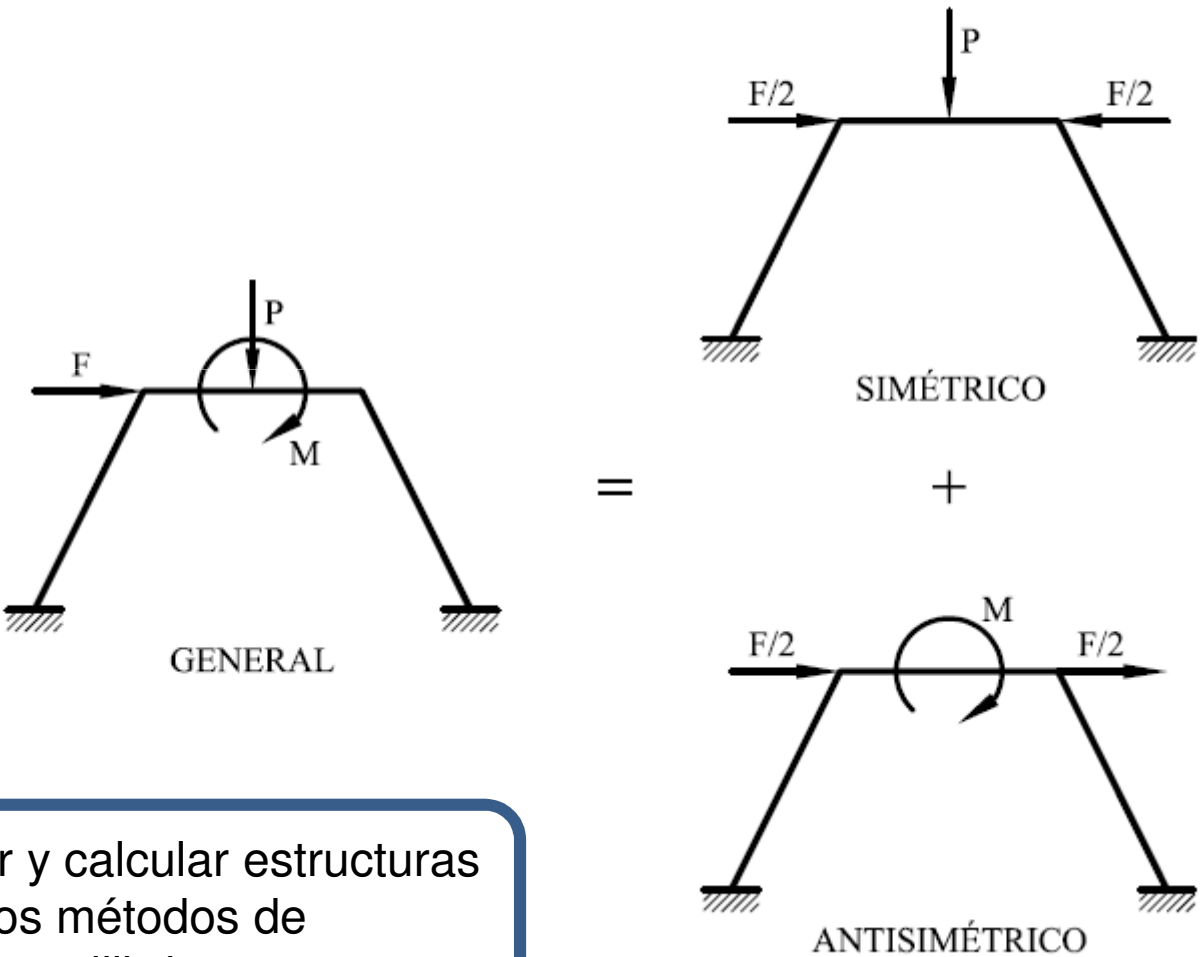
En esta continuación se verá las simplificaciones (reducción del número de indeterminación estática y cinemática) que se pueden considerar para estructuras simétricas con estados de cargas simétrico y antisimétricos.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, green, cursive font. The text is positioned above a graphic element consisting of a blue and orange shape that resembles a stylized '9' or a similar symbol.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Introducción



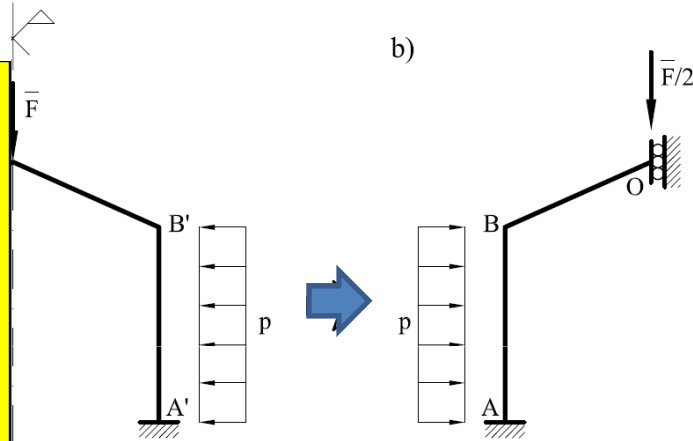
Analizar y calcular estructuras por los métodos de fuerza y equilibrio.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
-- --
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

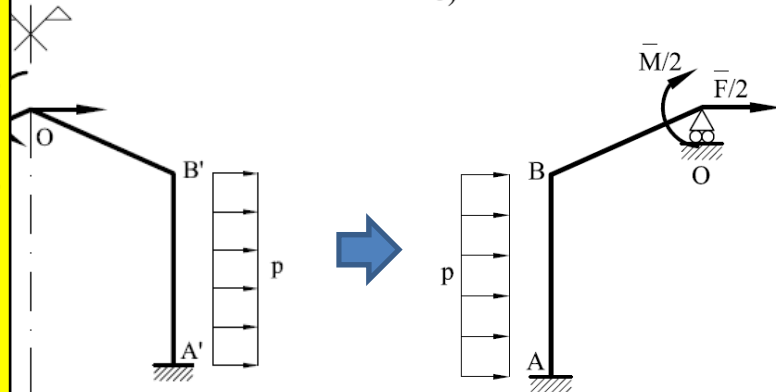
Introducción

Ástrico



h se reduce de 3 a 2
k se reduce de 5 a 2

métrico



h se reduce de 3 a 1
k se reduce de 5 a 3

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

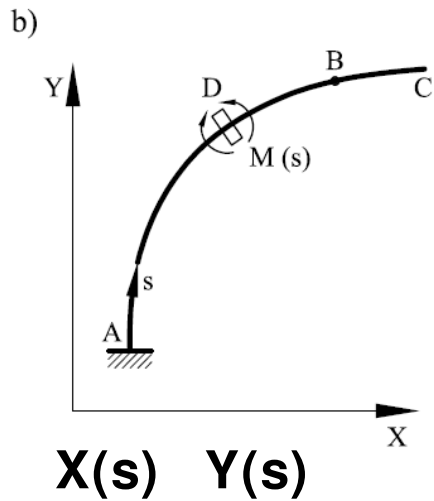
Método de compatibilidad.

Ecuación de Navier

era

$$x) + \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

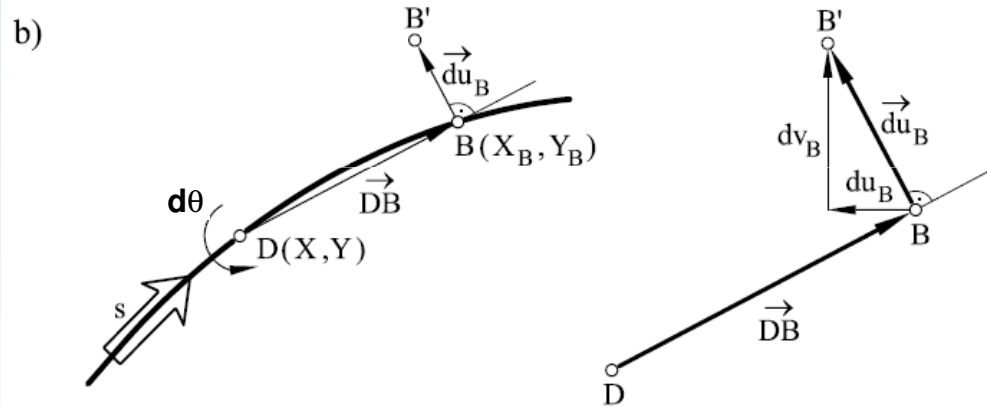
$$\left. \frac{M_z}{EI_z} \right) ds$$



as en función de la estructura

Los desplazamientos de los puntos se indican con las coordenadas del vector formado por el punto original y el punto tras la deformación.

Si se plantea el problema desde el punto de vista diferencial:



$$d\theta_B = d\theta(s)$$

$$\vec{du}_B = \vec{BB}' = d\theta \times \vec{DB}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & d\theta(s) \\ X_B - X(s) & Y_B - Y(s) & 0 \end{vmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier

Cartagena99

$$\left. \begin{aligned} \theta_B &= \int_A^B d\theta(s) \\ u_B &= -\int_A^B (Y_B - Y(s))d\theta(s) \\ v_B &= \int_A^B (X_B - X(s))d\theta(s) \end{aligned} \right\} \text{FÓRMULAS DE NAVIER}$$

FÓRMULAS DE NAVIER

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \left(\chi_0(s) + \frac{M(s)}{EI(s)} \right) ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A (Y_B - Y_A) - \int_A^B \left(\left(\chi_0(s) + \frac{M(s)}{EI(s)} \right) (Y_B - Y(s)) ds \right)$$

$$v_B = v_A - \theta_A (X_B - X_A) + \int_A^B \left(\left(\chi_0(s) + \frac{M(s)}{EI(s)} \right) (X_B - X(s)) ds \right)$$

$d\theta \times DB$

uenta
y giros en A

$\left(\frac{M_z}{I_z} \right) ds$

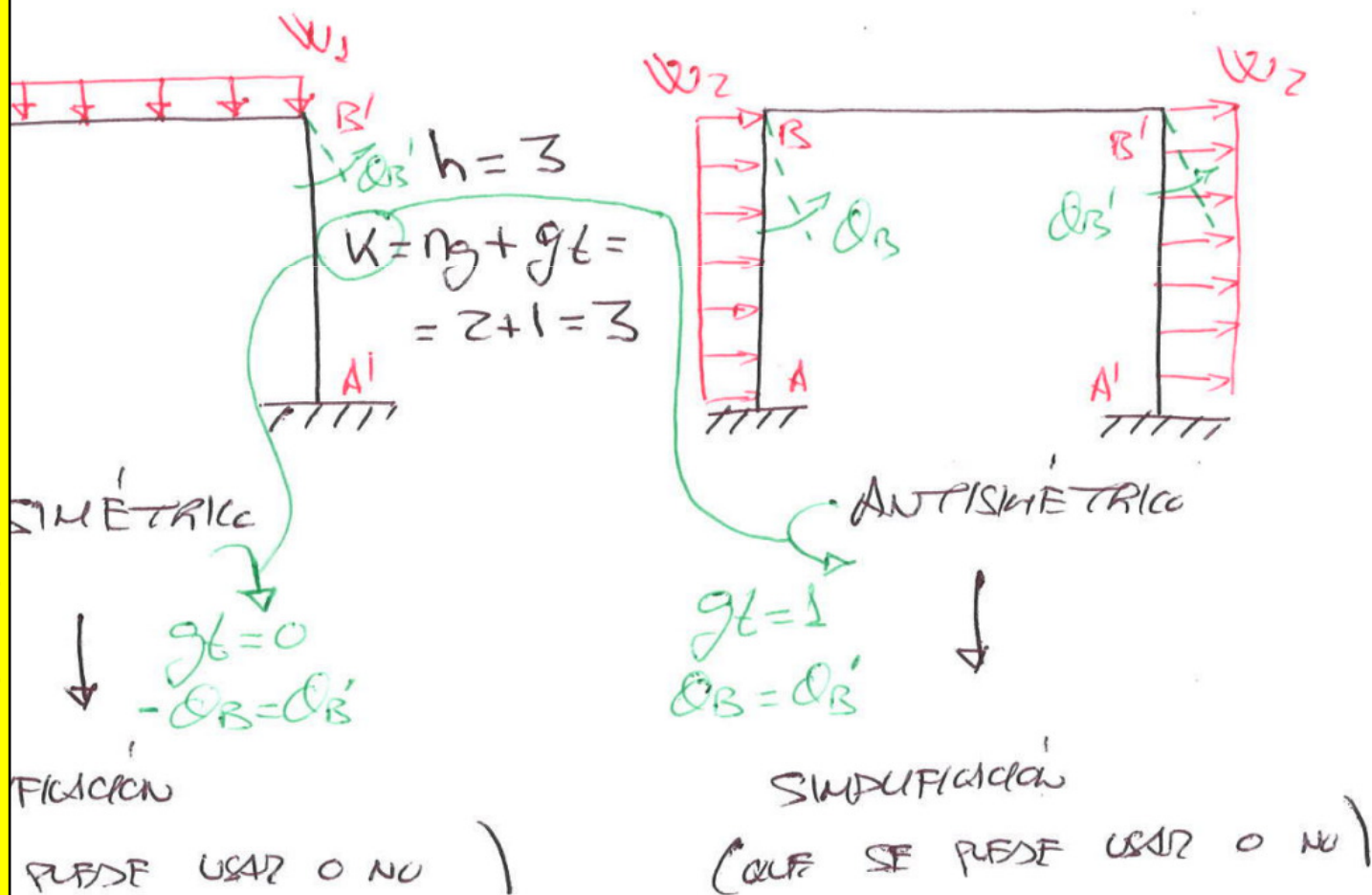
o si

uestas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

n pórtico (edificio) que puede descomponerse en simétrico y



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

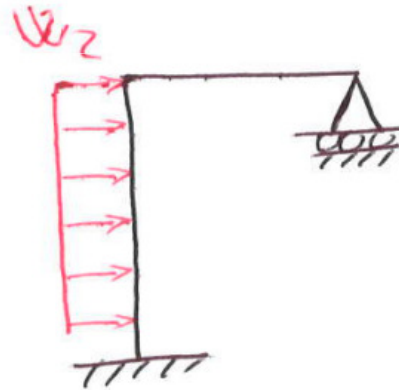
Cartagena99

SIMPLIFICACIÓN
(¿PUEDE USAR O NO)



(REDUCIDAS A DOS
DE COMPATIBILIDAD)

SIMPLIFICACIÓN
(¿PUEDE USAR O NO)

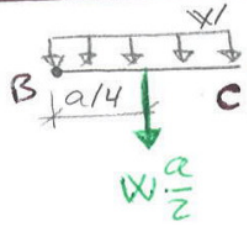


$h=1$ (REDUCIDAS A UNA
ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

TRICO - COMPATIBILIDAD



RESTRICCIONES DE N_c y M_c

Ecuaciones de compatibilidad para obtener las dos incógnitas estáticas (N_c y M_c)

Las condiciones de compatibilidad son:

$$\theta_c = 0 \text{ y } u_c = 0$$

Las ecuaciones de compatibilidad que se pueden

definir son:

$$\theta_A + \int_{s=0}^{s=\frac{3}{2}a} \left(\frac{M(s)}{EI} \right) ds = 0$$

DES PUNTOS
 $C \equiv s = \frac{3}{2}a$

$$u_A - \theta_A (y_c - y_A) - \int_A^C \left[\frac{M(s)}{EI} (y_c - y(s)) \right] ds = 0$$

ECUACIONES DE NAVIER

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

Cartagena99

$$\Theta_A = u_A = Y_A = 0 \rightarrow \text{SIMPPLICES LAS ECUACIONES}$$

El momento flector hay que definirlo a tramos.

$$AB \equiv s \in (0, a)$$

$$BC \equiv s \in (a, \frac{3}{2}a)$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M_c + N_c (a-s) & s \in (0, a) \\ -\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}a - s\right)^2 + M_c & s \in (a, \frac{3}{2}a) \end{cases}$$

$$\int_B^A \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M_c + N_c (a-s) \right] \frac{1}{EI} ds + \int_B^C \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}a - s\right)^2 + M_c \right] \frac{1}{EI} ds$$

} CAMBIO DE
VARIABLES

$$t = \frac{3}{2}a - s \rightarrow dt = -ds$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

$$Q_c = -\frac{w}{8}a^3 + M_c \cdot a + N_c \cdot a^2 - N_c \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{w}{2} \frac{1}{3} \left(0 - \frac{1}{8}a^3\right) - M_c \left(0 - \frac{1}{2}a\right) \quad (4)$$

$$\sum M_c + N_c \cdot a - \frac{7}{24} w a^2 = 0 \quad (1)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las de compatibilidad

$$Q_c = 0 = u_A - \theta_A (Y_c - Y_A) - \int_A^C \left[\frac{M(s)}{EI} (Y_c - Y(s)) \right] ds$$

$$Y_c = a ; Y(s) = \begin{cases} s ; s \in (0, a) \\ a ; s \in (a, \frac{3}{2}a) \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \text{VAMOS DE B A C} \\ Y_c - Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$Q_c = \frac{1}{EI} \int_{s=0}^{s=a} \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M_c + N_c (a-s) \right] \cdot (a-s) ds =$$

$$t = a - s \\ \downarrow dt = -ds$$

$$= - \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{t^2}{2} + M_c \frac{t^2}{2} + N_c \frac{t^3}{3} \right]_{t=a}^{t=0} = -\frac{w}{2} \cdot \frac{a^4}{8} + M_c \frac{a^2}{2} + M_c \frac{a^3}{3}$$

$$\sum M_c + 2N_c \cdot a - \frac{7}{8} w a^2 \quad (2)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

Cartagena99

(1) y (2) son las ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

$$N_c = \frac{1}{12} w/a \quad ; \quad M_c = \frac{5}{72} w a^2$$

$\sum F_x = 0 ; \rightarrow B_{1,x} = \frac{1}{12} w a$
 $\sum F_y = 0 ; \rightarrow B_{1,y} = w \cdot \frac{a}{2}$
 $\sum M_A = 0 ; M_{R1,A} = -\frac{5}{72} w a^2 + w \cdot \frac{a^2}{8} - \frac{1}{12} w a^2$

$$M_{R1,A} = -\frac{1}{36} w a^2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)



ISIMÉTRICO - COMPATIBILIDAD

condición de compatibilidad $v_c = 0$

DOS ZANOS DE $M(s)$

$$v_c = v_A + \theta_A (x_c - x_A) + \int_A^C \left[\frac{M(s)}{EI} (x_c - x(s)) \right] ds$$

$s \in (0, a) \rightarrow AB$
 $s \in (a, \frac{3}{2}a) \rightarrow BC$

HO AB $M(s) = V_c \cdot \frac{a}{2} - w \cdot \frac{(a-s)^2}{2}$
 IC BC $M(s) = V_c \cdot (\frac{3}{2}a - s)$

$$0 = \int_{s=0}^{s=a} \left[V_c \cdot \frac{a}{2} - w \frac{(a-s)^2}{2} \right] \left(\frac{a}{2} - 0 \right) ds + \int_{s=a}^{s=\frac{3}{2}a} V_c \cdot (\frac{3}{2}a - s) \left(\frac{a}{2} - s + a \right) ds$$

① \rightarrow CAMBIO VARIABLE $t = a - s \rightarrow dt = -ds$
 ② \rightarrow CAMBIO DE VARIABLE $t = \frac{3}{2}a - s \rightarrow dt = -ds$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)



$$\int_a^{t=0} \left(V_c \frac{a}{2} - \frac{w}{2} t^2 \right) dt - \int_{t=\frac{1}{2}a}^{t=0} V_c t^2 dt = \frac{a^3}{4} V_c - \frac{w}{12} a^4 + V_c \frac{a^3}{5.8} = 0$$

$$V_c = \frac{2}{7} w a$$

$$\left. \begin{matrix} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\sum M_A = 0 ; V_c \frac{a}{2} + M_{R,A} = \frac{w a^2}{2}$$

$$M_{R,A} = \frac{5}{14} w a^2$$

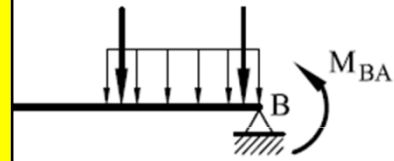
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

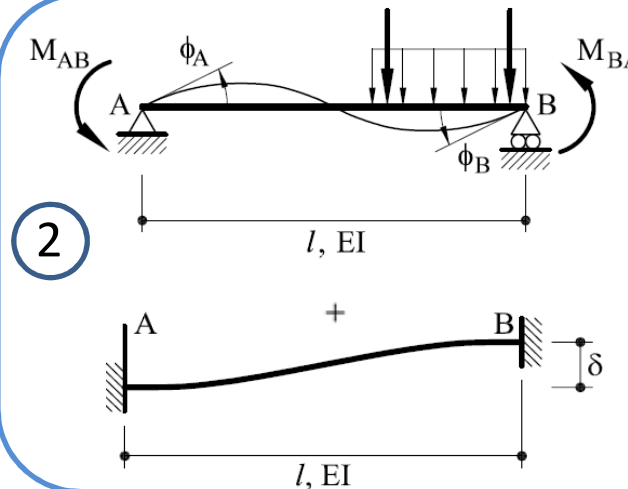
Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Las ecuaciones elásticas: permiten calcular los esfuerzos en una pieza en función de sus movimientos (desplazamientos y giros) y de la carga soportada por la barra.

... sin desplazamiento entre sus extremos



... para barras que están en nudos que no tienen desplazamiento (solo giro).

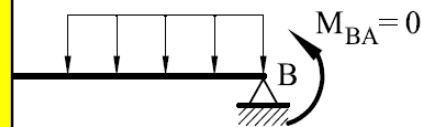


Método para deducir las ecuaciones de una pieza recta con desplazamiento transversal entre sus extremos
Es decir, si tenemos el caso (1) y hay desplazamiento relativo entre nodos.

Pieza recta articulada en uno de sus extremos (momento cero). Plantear también las ecuaciones generales (con desplazamiento transversal entre sus extremos).

Es decir, que un de los extremos de la barra estén articulados (bien el nodo bien el apoyo).

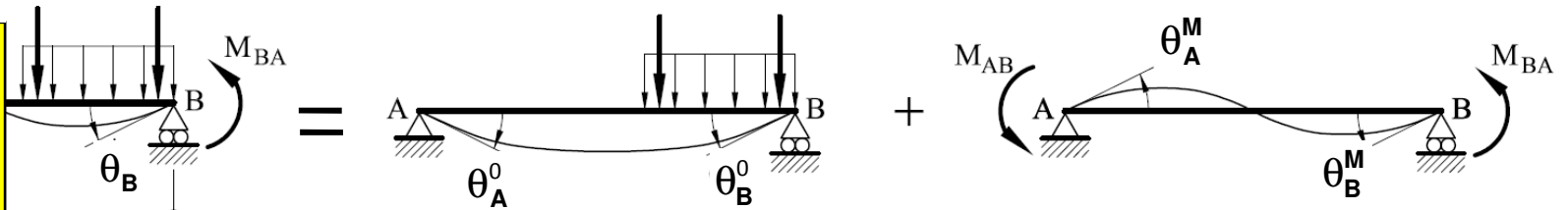
(ver los problemas que tuvieron el año pasado)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

iones elásticas de una pieza recta sin desplazamiento transversal entre extremos



θ_A^0
 θ_B^0

θ_A^M
 θ_B^M

$\theta_A^M = \theta_A(M_{AB}) + \theta_A(M_{BA}) = +\frac{M_{AB}l}{3EI} - \frac{M_{BA}l}{6EI}$
 $\theta_B^M = \theta_B(M_{AB}) + \theta_B(M_{BA}) = -\frac{M_{AB}l}{6EI} + \frac{M_{BA}l}{3EI}$

Tablas

emplea el método de
nde se separa por un
yada con las cargas
o los giros impuestos.

$$(2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^0$$

$$(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0$$

Incógnitas
cinemáticas

$$M_{AB}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_A^0 + \theta_B^0)$$

$$M_{BA}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_B^0 + \theta_A^0)$$

Tablas

Resolviendo el
sistema de
ecuaciones

$$\theta_A = +\frac{M_{AB}l}{3EI} - \frac{M_{BA}l}{3EI} + \theta_A^0$$

$$\theta_B^M = -\frac{M_{AB}l}{6EI} + \frac{M_{BA}l}{3EI} + \theta_B^0$$

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Ecuaciones elásticas de una pieza recta sin desplazamiento transversal entre extremos

$$2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^0$$

$$M_{AB}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_A^0 + \theta_B^0)$$

$$2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0$$

$$M_{BA}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_B^0 + \theta_A^0)$$

Lo importante de estas ecuaciones son las conclusiones siguientes:

Si los momentos en la viga, se simplifica como sigue:

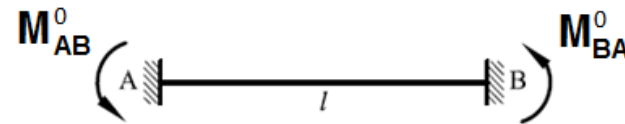
$$-\frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B)$$

$$-\frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A)$$

Si los giros θ_A, θ_B son cero, es decir, la viga es biempotrada, los momentos solo dependen de las cargas:

$$M_{AB} = M_{AB}^0$$

$$M_{BA} = M_{BA}^0$$



En la viga a la que se le imponen los

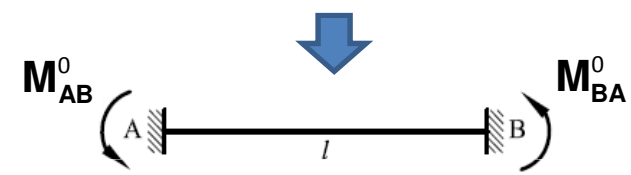
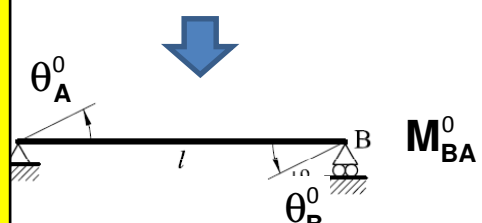
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

iones elásticas de una pieza recta sin desplazamiento transversal entre extremos

$$2\theta_A^0 + \theta_B^0) \quad M_{BA}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_B^0 + \theta_A^0)$$

$$M_{AB}^0 = M_{AB}^0 \quad M_{BA}^0 = M_{BA}^0$$



	θ_A^0	θ_B^0
	$-\frac{Pab}{6EI}(l+b)$	$+\frac{Pab}{6EI}(l+a)$
	$-\frac{pl^3}{24EI}$	$+\frac{pl^3}{24EI}$
	$-\frac{7}{360} \frac{pl^3}{EI}$	$+\frac{1}{45} \frac{pl^3}{EI}$
	$-\frac{Ml}{6EI} (3 \frac{b^2}{l^2} - 1)$	$-\frac{Ml}{6EI} (3 \frac{a^2}{l^2} - 1)$

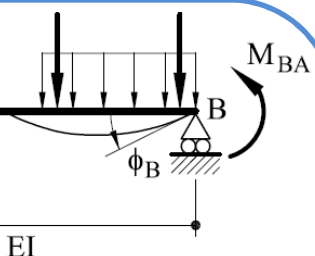
CARGA	M_{AB}^0	M_{BA}^0
	$+\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$
	$+\frac{pl^2}{12}$	$-\frac{pl^2}{12}$
	$+\frac{pl^2}{30}$	$-\frac{pl^2}{20}$
	$-b(2a-b) \frac{M}{l^2}$	$-a(2b-a) \frac{M}{l^2}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVIÁ WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

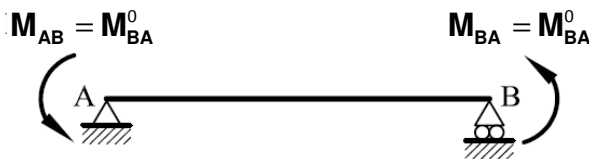
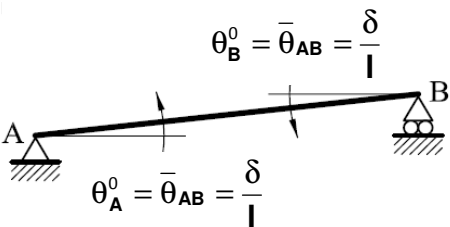
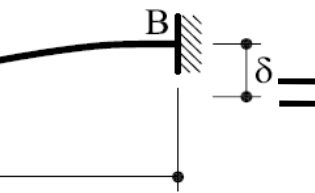
Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

elásticas de una pieza recta con desplazamiento transversal relativo entre extremos



$$\theta_A = \theta_B = 0$$

$$\begin{cases} M_{AB} = M_{AB}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_A^0 + \theta_B^0) = -\frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB} \\ M_{BA} = M_{BA}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_B^0 + \theta_A^0) = -\frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB} \end{cases}$$



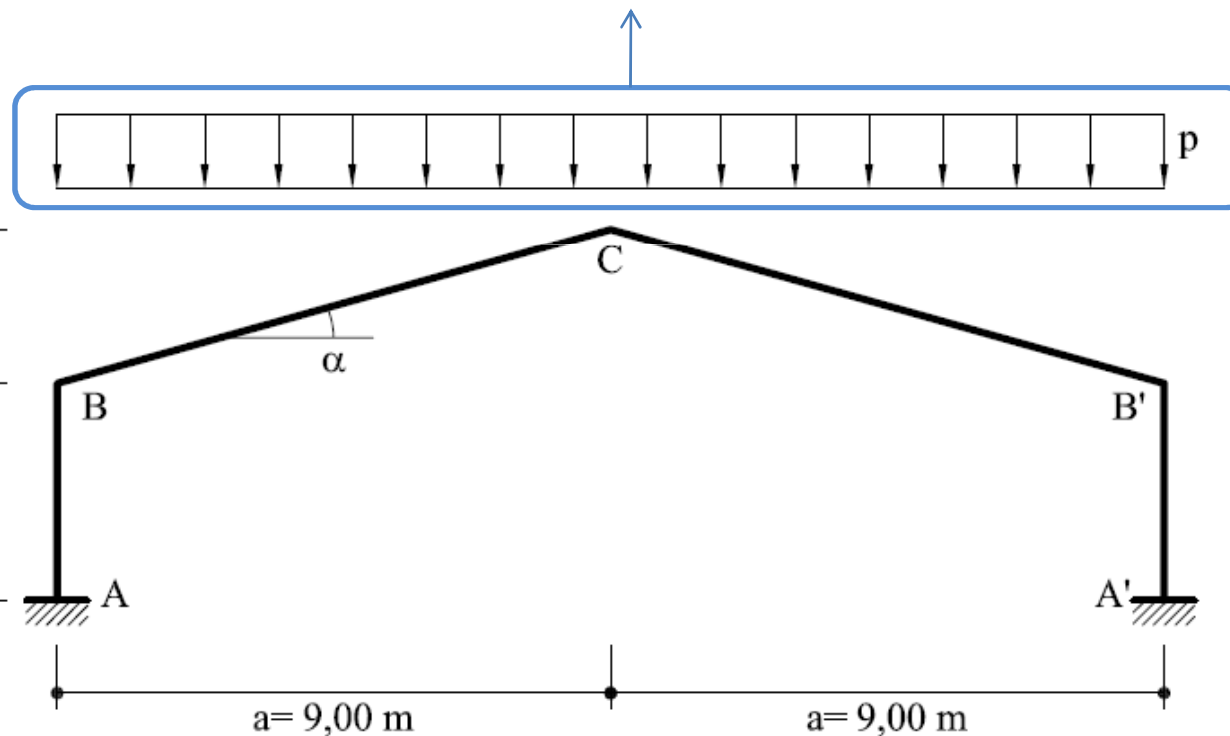
$$\begin{cases} M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB} \\ M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB} \end{cases}$$

ión más

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Matizar representación de la fuerza.
Comparar con peso propio de la viga



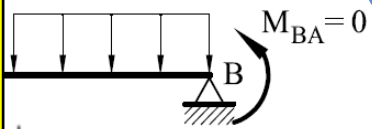
Los nudos B, C y B' se mueven. Por lo tanto, hay que estudiar el desplazamiento relativo entre nudos (pórtico traslacional)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

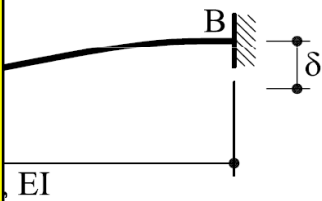
Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

ecuaciones elásticas de una pieza recta articulada en uno de sus extremos



$$M_{BA} = 0 = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB}$$

$$\theta_B = -\frac{1}{2}\theta_A + \frac{3}{2}\bar{\theta}_{AB} - \frac{l}{4EI}M_{BA}^0$$



$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB}$$

$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}\theta_A - \frac{3EI}{l}\bar{\theta}_{AB} + M_{AB}^0 - \frac{1}{2}M_{BA}^0$$

$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}\theta_A - \frac{3EI}{l}\bar{\theta}_{AB} + (M_{AB}^0)^*$$

Tablas

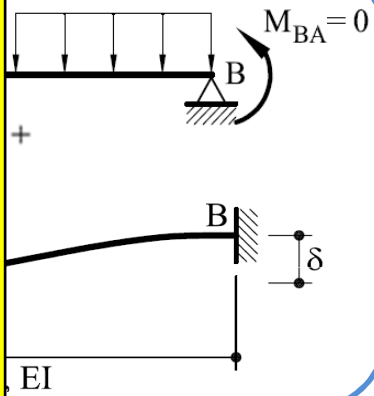
ción se contempla la posibilidad de
o transversal relativo entre sus
se representan como una viga
cargas.

Cartagena99

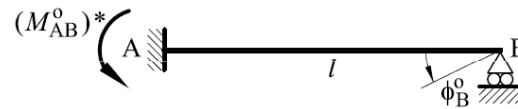
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

ecuaciones elásticas de una pieza recta articulada en uno de sus extremos



$$M_{AB} = \frac{3EI}{l} \theta_A - \frac{3EI}{l} \bar{\theta}_{AB} + (M_{AB}^0)^*$$



Tablas

CARGA	$(M_{AB}^0)^*$	ϕ_B^0
	$+\frac{Pb}{2l^2}(l^2-b^2)$	$+\frac{Pa^2b}{4EI}$
	$+\frac{pl^2}{8}$	$+\frac{pl^3}{48EI}$
	$+\frac{pl^2}{15}$	$+\frac{pl^3}{120EI}$
	$-\frac{M}{2l^2}(l^2-3b^2)$	$+\frac{M}{4EI}(4lb+l^2+3b^2)$

32

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

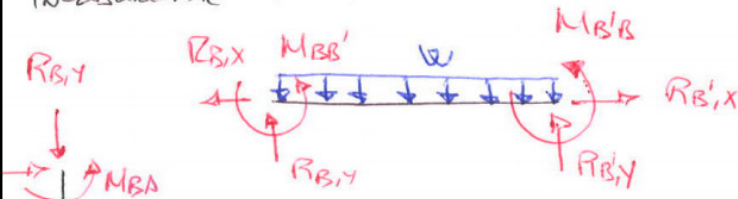
Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)



SIMÉTRICO - EQUILIBRIO

(5)

HACE FALTA LA SUPUESTACIÓN POR SIMETRÍA. ES ÚTIL SABER QUE EL PÉRTIGO
INDEFORMABLE \rightarrow SOLO HAY GIROS.



UTILIZAR LAS ECUACIONES ELÁSTICAS SABIENDO QUE:

- B y B' NO SE MUEVEN ; $\theta_B = -\theta_B'$
- $\theta_A = \theta_{A'} = 0$ (EMPOZAMIENTO)

UTILIZAR ECUACIONES DE EQUILIBRIO (EN NODOS)

$$\begin{cases} M_{AB} = \frac{2EI}{a} (\theta_B) \\ M_{BA} = \frac{2EI}{a} (2\theta_B) \\ M_{BB'} = \frac{2EI}{a} (2\theta_B - \theta_B) + \frac{w a^2}{12} = \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{w a^2}{12} \\ M_{B'B} = -\frac{2EI}{a} \theta_B - \frac{w a^2}{12} \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIÁ WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)



$$3 = 0; \rightarrow M_{BA} + M_{BB'} = 0; \quad \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{W a^2}{12} = 0;$$

$$M_{AB} = M_{R1A} = \frac{2EI}{a} \left(-\frac{W a^3}{12EI} \right) = -\frac{1}{36} W a^2$$

⊗ Igual que en equilibrio

En estos puntos ecuaciones en elementos para encontrar el estado de esfuerzos es importante conocer el estado de momento en los nodos (Ayuda a dibujar los diagramas).

$$B = 0; \quad M_{AB} + M_{BA} = R_{A,x} = 0 \rightarrow R_{A,x} = \frac{1}{12} W a^2$$

Vertical

$$= 0; \quad R_{A,y} = R_{B,y}$$

Vertical

$$= 0; \quad \underline{M_{BB'} + M_{B'B}} + \frac{W a^2}{2} = R_{B,y} \cdot a;$$

Horizontal

Para completar $M_{BB'} = -M_{B'B} = \frac{1}{18} W a^2$

⊗ Igual que por compatibilidad.

$$R_{A,y} = R_{B,y} = \frac{W a^2}{2}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)



TRICO - EQUILIBRIO

⑦

ESTE CASO SE PUEDE RESOLVER UTILIZANDO LA ESTRUCTURA SIMPLIFICADA
SIMPLIFICADA. SE PUEDE LA SIMPLIFICACION PARA VER LA UTILIDAD DE
LAS ELÁSTICAS CON EMPUJÓN-APORTADO.

$$M_{AB} = \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{6EI}{a} \frac{u_B}{a} + \frac{w a^2}{12}$$

$$M_{BC} = \frac{3EI}{(a/2)} \theta_B = \frac{6EI}{a} \theta_B$$



$$\phi_{AB} = \frac{-u_B}{a} \quad \left(\begin{array}{l} u_B \text{ Y } \phi_{AB} \\ \text{TIENEN SENTIDOS} \\ \text{OPUESTOS} \end{array} \right)$$

$\rightarrow K=2$ (gt=1 porque el punto es fijo).

$$\rightarrow K = \frac{ng + gt}{\rightarrow \theta_B} \rightarrow u_B \text{ (o } \phi_{AB})$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)

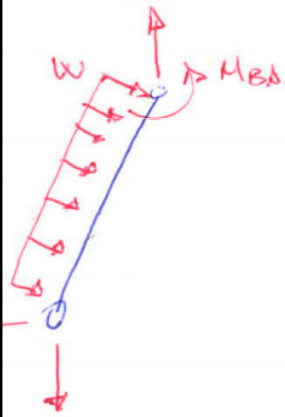


La primera ecuación de equilibrio: $M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$\frac{10EI}{a} \theta_B + \frac{6EI}{a^2} \ell_B - \frac{W a^2}{12} = 0 \quad (1)$$

⊗ LINEALIDAD GEOMÉTRICA

↳ ESTRUCTURA DE EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA SIN DEFORMAR.



$$\sum M_A = 0; M_{AB} + M_{BA} - \frac{W a^2}{2} = 0$$

$$\frac{6EI}{a} \theta_B + \frac{12EI}{a^2} \ell_B - \frac{W a^2}{2} = 0 \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \begin{cases} \theta_B = -\frac{W a^3}{42EI} \\ \ell_B = \frac{3W a^4}{56EI} \end{cases}$$

$$M_{AB} = -\frac{2}{42} W a^2 + \frac{9}{28} W a^2 + \frac{1}{12} W a^2 = \frac{5}{14} W a^2$$

⊗ IGUAL CEF POR MÉTODOS DE COMPATIBILIDAD

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)

¿CÓMO SIN SIMPLIFICAR? TAMBIÉN ES VIABLE

(8)



$$\theta_B = \theta_{B'} \quad \wedge \quad \boxed{K=2}$$

$$u_B = u_{B'}$$

$$u_{AB} = \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{6EI}{a} \frac{u_B}{a} + \frac{wa^2}{12}$$

$$u_{BA} = \frac{2EI}{a} (2\theta_B) + \frac{6EI}{a} \frac{u_B}{a} - \frac{wa^2}{12}$$

$$u_{BB'} = \frac{2EI}{a} (3\theta_B)$$

$$\frac{10EI}{a} \theta_B + \frac{6EI}{a^2} u_B - \frac{wa^2}{12} = 0$$

¡GUA! ¡GUA! SIN
LA SIMPLIFICACIÓN.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Compatibilidad y Equilibrio.

Finalización de un ejercicio



Resultados

SIMÉTRICO

$$v = \frac{1}{12} w a$$

$$\theta = \frac{1}{2} w a$$

$$M = -\frac{1}{36} w a^2$$

$$= -\frac{w a^2}{72 E I}$$

ANTISIMÉTRICO

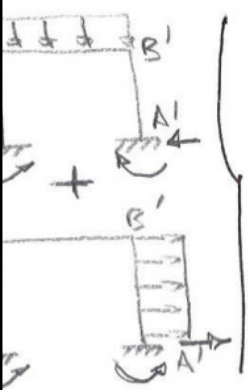
$$R_{A,x} = -w a$$

$$R_{A,y} = -\frac{2}{7} w a$$

$$M_{R,A} = \frac{5}{14} w a^2$$

$$\theta_B = -\frac{w a^3}{42 E I}$$

$$u_B = \frac{3 w a^4}{56 E I}$$



$$R_{A,x} = \frac{1}{12} w a - w a = -\frac{11}{12} w a ; R_{A,x} = \frac{13}{12} w a$$

$$R_{A,y} = \frac{1}{2} w a - \frac{2}{7} w a = -\frac{3}{14} w a ; R_{A,y} = -\frac{3}{14} w a$$

$$M_{R,A} = -\frac{1}{36} w a^2 + \frac{5}{14} w a^2 = 0,33 w a^2 ; M_{R,A} = 0,33 w a^2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Compatibilidad y Equilibrio.

Finalización de un ejercicio

Cartagena99

$$= -0,0377 \frac{w a^3}{EI} ; \quad \theta_{B'} = -0,01 \frac{w a^3}{EI}$$

(↻)

$$\theta_{B'} = \frac{\int w a^4}{56}$$

ANAL

NECESARIO CONOCER LOS VALORES EN B Y B'

$$0,33 w a^2 \rightarrow M(0) = -0,33 w a^2$$

$$-\frac{11}{12} w a \rightarrow M(s) = -0,33 w a^2 + \frac{11}{12} w a \cdot s$$

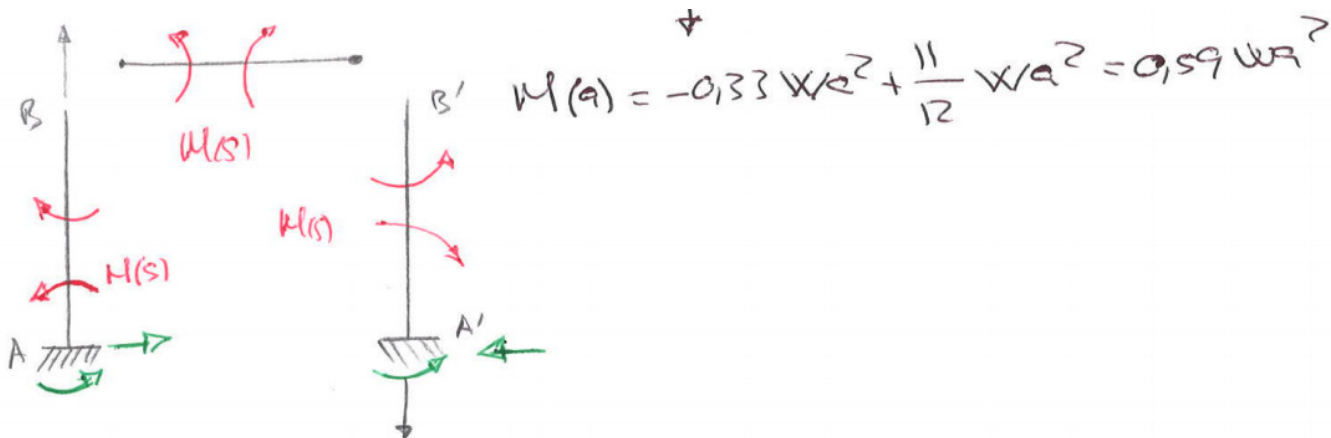
SG(0,2)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Compatibilidad y Equilibrio. Finalización de un ejercicio

Cartagena99



$$M(a) = -0,33 W a^2 + \frac{11}{12} W a^2 = 0,59 W a^2$$

$$z, a' = 0,38 W a^2 \rightarrow M(3a) = 0,38 W a^2$$

$$x = + \frac{15}{12} W a \rightarrow M(s) = 0,38 W a^2 - (3a-s) \cdot \frac{13}{12} W a$$

SE(2a, 3a)

$$M(z) = -1,79 W a^2$$

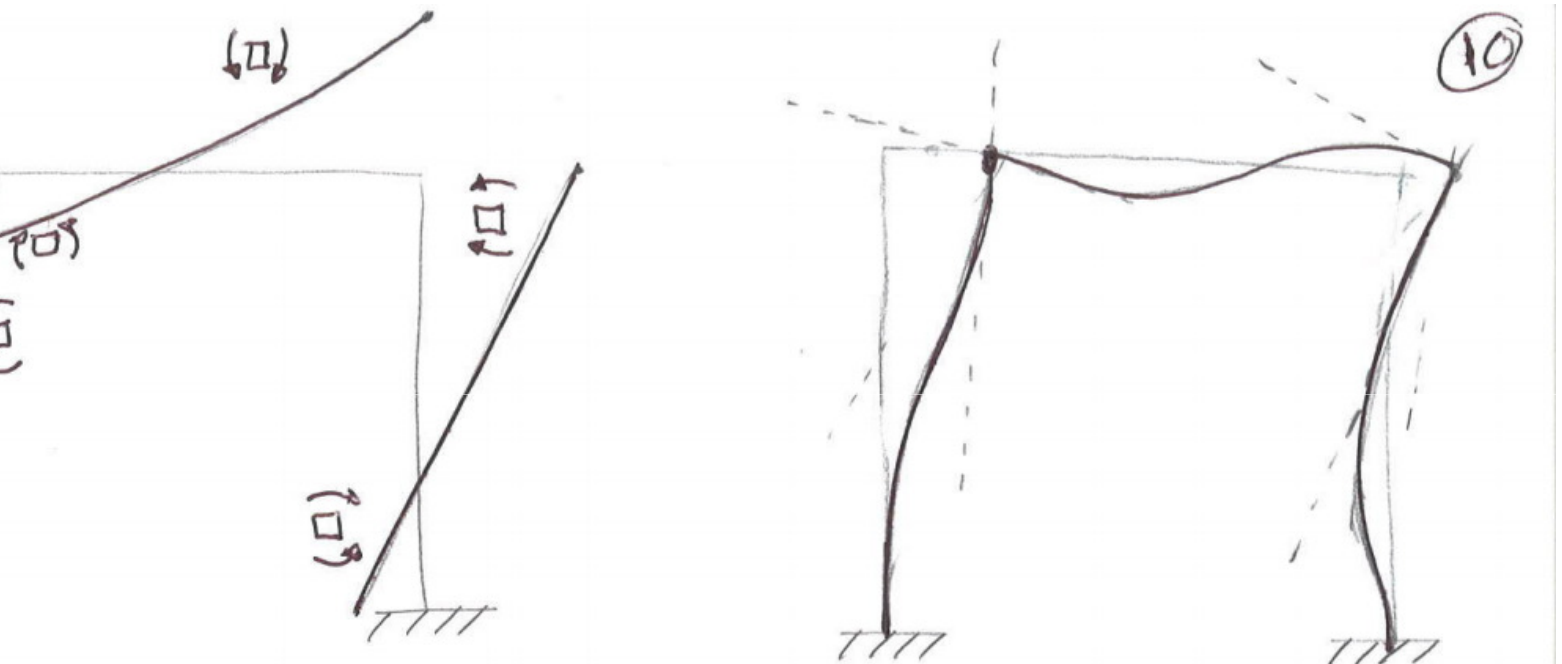
$$M(s) = 0,59 W a^2 - \frac{3}{14} W a (s-a) - W \frac{(s-a)^2}{2}$$

SE(a, z)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Compatibilidad y Equilibrio. Finalización de un ejercicio

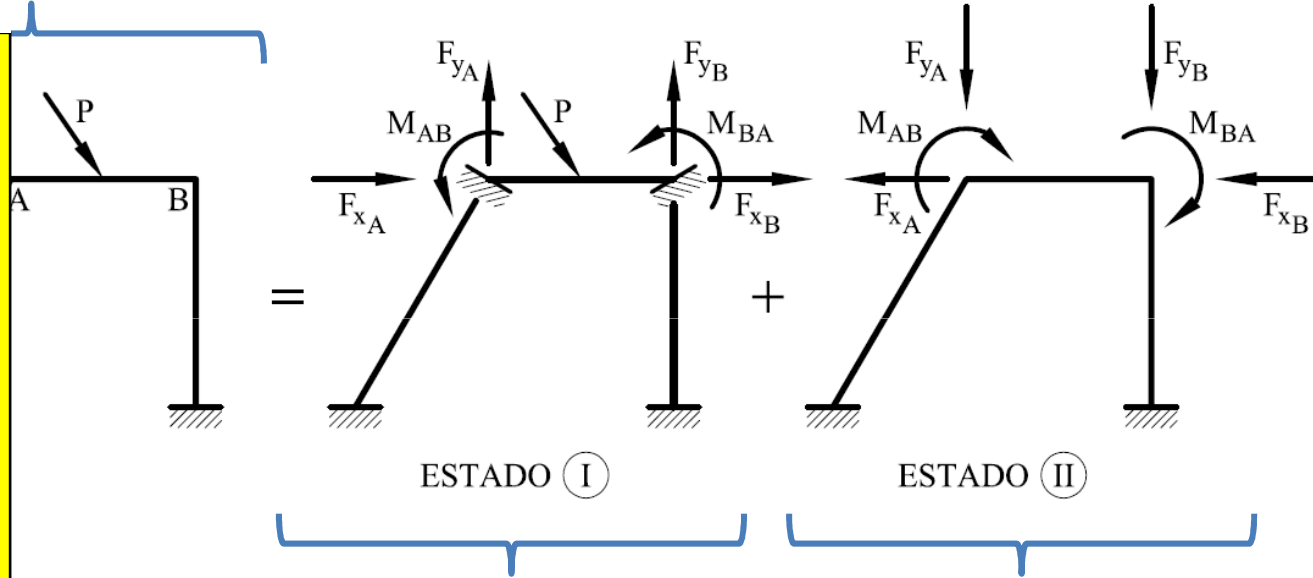


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
-- --
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El método de rigidez

El sistema en dos estados.
La suma de los dos.



Analizar cada una de las piezas por separado y calcular las reacciones. Estas reacciones se utilizan como carga en los nudos en el estado II. Las piezas se resuelven con tablas o mediante las técnicas vistas con anterioridad.

Estructura traslacional con fuerzas y momentos aplicados en los nudos. El método de rigidez permite de forma sistemática resolver este estado.

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

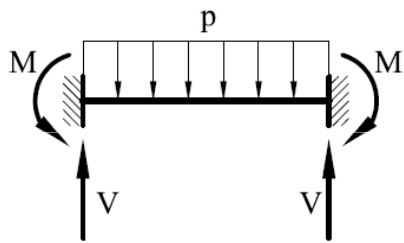
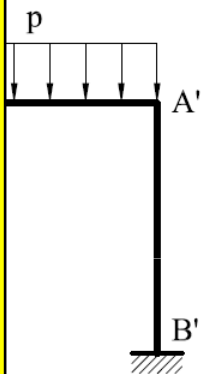
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

El método de rigidez

s en el

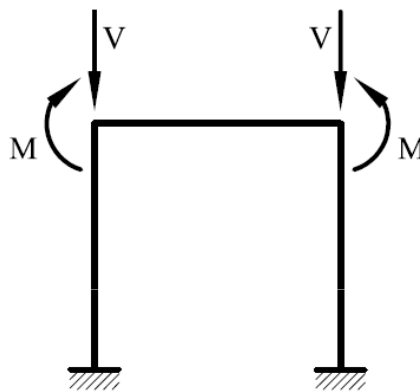
istema en dos estados.
suma de los dos.

Está resuelto en tablas



ESTADO I

+



ESTADO II

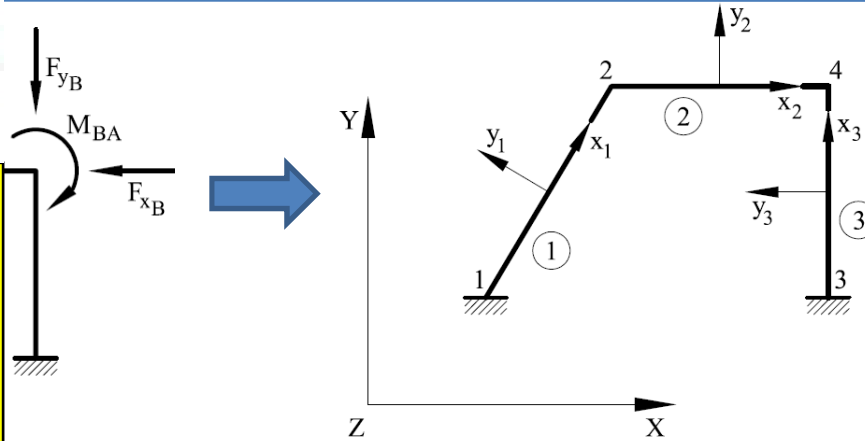
Analizar cada una de las piezas por separado y calcular las reacciones. Estas reacciones se utilizan como carga en los nudos en el estado II. Las piezas se resuelven con tablas o mediante las técnicas vistas con anterioridad.

Estructura traslacional (o que puede serlo) con fuerzas y momentos aplicados en los nudos. El método de rigidez permite de forma sistemática resolver este estado.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

El método de rigidez nición geométrica de la estructura



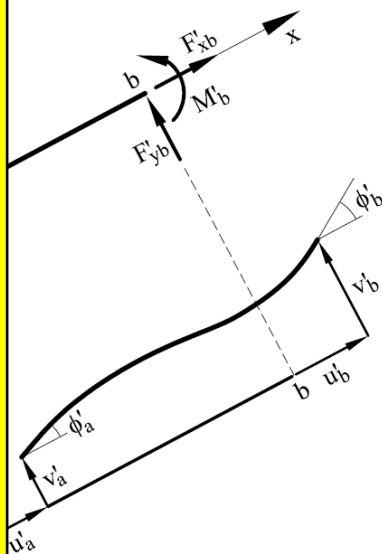
Definición geométrica de la estructura. La notación está orientada a la programación.

- Nudo
- Barra
- Material

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

al de cada una de las barras (ecuaciones elásticas).

Ecuaciones elásticas generales donde solo se aplica carga en los nudos



	FUERZAS		
a	F'_{xa}	F'_{ya}	M'_a
b	F'_{xb}	F'_{yb}	M'_b
	MOVIMIENTOS		
a	u'_a	v'_a	ϕ'_a
b	u'_b	v'_b	ϕ'_b

SISTEMA LOCAL DE REFERENCIA

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) + \cancel{M_{AB}^0} - \frac{6EI}{l}\theta_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + \cancel{M_{BA}^0} - \frac{6EI}{l}\theta_{AB}$$



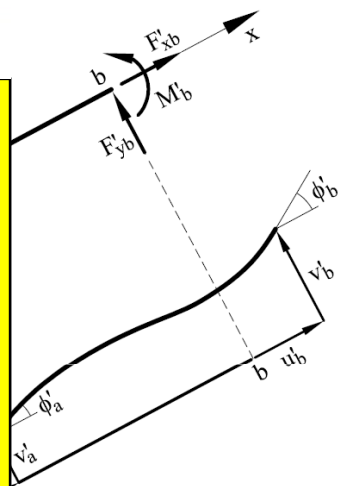
$$M'_a = \frac{4EI}{l}\theta'_a + \frac{2EI}{l}\theta'_b - \frac{6EI}{l}\frac{v'_b - v'_a}{l}$$

$$M'_b = \frac{2EI}{l}\theta'_a + \frac{4EI}{l}\theta'_b - \frac{6EI}{l}\frac{v'_b - v'_a}{l}$$

El método de rigidez

Cargas actuantes sobre las piezas

al de cada una de las barras (ecuaciones elásticas).



FUERZAS			
a	F'_{xa}	F'_{ya}	M'_a
b	F'_{xb}	F'_{yb}	M'_b
MOVIMIENTOS			
a	u'_a	v'_a	ϕ'_a
b	u'_b	v'_b	ϕ'_b

SISTEMA LOCAL DE REFERENCIA

$$M'_a = \frac{4EI}{l} \theta'_a + \frac{2EI}{l} \theta'_b + \frac{6EI}{l^2} (v'_a - v'_b)$$

$$M'_b = \frac{2EI}{l} \theta'_a + \frac{4EI}{l} \theta'_b + \frac{6EI}{l^2} (v'_a - v'_b)$$

$$F'_{xa} = -F'_{xb} = \frac{EA}{l} (u'_a - u'_b)$$

$$\sum M_a = 0; M'_a + M'_b + F'_{yb} \cdot l = 0 \Rightarrow F'_{ya} = -F'_{yb} = \frac{M'_a + M'_b}{l};$$

$$F'_{ya} = -F'_{yb} = + \frac{6EI}{l^2} \theta'_a + \frac{6EI}{l^2} \theta'_b + \frac{12EI}{l^3} (v'_a - v'_b)$$

$$K'_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$K'_{ba} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$f'_a = \begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_a \end{bmatrix} \quad f'_b = \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_b \end{bmatrix} \quad d'_a = \begin{bmatrix} u'_a \\ v'_a \\ \theta'_a \end{bmatrix} \quad d'_b = \begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ \theta'_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f'_a \\ f'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{aa} & K'_{ab} \\ K'_{ba} & K'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_a \\ d'_b \end{bmatrix}$$

El método de rigidez

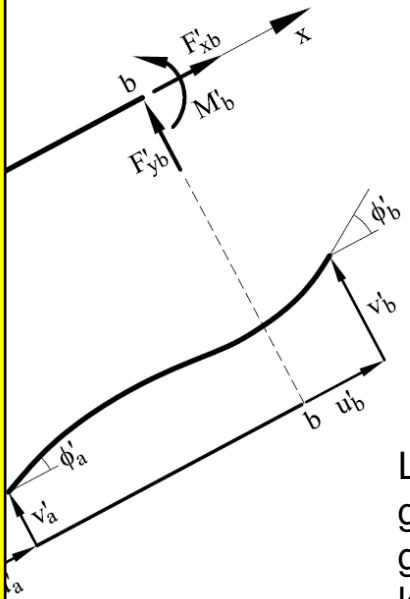
Matriz elemental de rigidez

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}' \mathbf{d}' \quad \text{Forma matricial compacta}$$

$$f'_i = \sum_{j=1}^m K'_{ij} d'_j$$

Componente del vector de fuerzas en función de las componentes de la matriz de rigidez y del vector de desplazamiento.

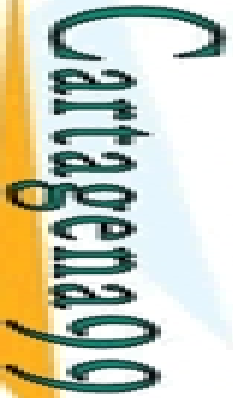
$$\begin{matrix} ab \\ bb \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{K}' \rightarrow$$

Esta matriz es no invertible porque la barra tiene movimiento de sólido rígido. Si se fija uno de los extremos, la matriz resultante se podría invertir, siendo esta inversa la matriz de flexibilidad.

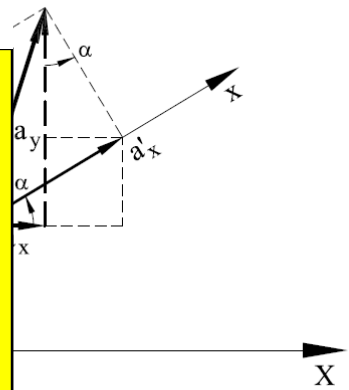
Lo interesante de esta conclusión es que la matriz del sistema global no se podrá invertir para obtener los desplazamientos y giros desconocidos hasta que no se impongan las restricciones de los apoyos.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

El método de rigidez

Matriz global de rigidez



$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{a}'$$

Como es una transformación ortogonal, la traspuesta es igual que su inversa.

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T}^T \mathbf{a}$$

Desplazamientos y fuerzas en el sistema de referencia son:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_a &= \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a & \mathbf{d}'_b &= \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}'_a &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_a & \mathbf{f}'_b &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_a &= \mathbf{K}'_{aa} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{K}'_{ab} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}'_b &= \mathbf{K}'_{ba} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{K}'_{bb} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{T} \mathbf{f}'_a = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{aa} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{T} \mathbf{K}'_{ab} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_a &= \mathbf{T} \mathbf{f}'_b = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{ba} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{T} \mathbf{K}'_{bb} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{ij} \mathbf{T}^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{K}_{aa} \mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_a &= \mathbf{K}_{ba} \mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{bb} \mathbf{d}_b \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

El método de rigidez

Matriz global de rigidez

$$K_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & -S\frac{6EA}{l^2} \\ +S^2\frac{EA}{l} + C^2\frac{12EA}{l^3} & +C\frac{6EA}{l^2} & +\frac{4EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_{ab} = \begin{bmatrix} -C^2\frac{EA}{l} - S^2\frac{12EA}{l^3} & -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EA}{l^3}\right) & -S\frac{6EA}{l^2} \\ -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EA}{l^3}\right) & -S^2\frac{EA}{l} - C^2\frac{12EA}{l^3} & +C\frac{6EA}{l^2} \\ S\frac{6EA}{l^2} & -C\frac{6EA}{l^2} & +\frac{2EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_{bb} = \begin{bmatrix} \frac{12EA}{l^3} & -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EA}{l^3}\right) & S\frac{6EA}{l^2} \\ -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EA}{l^3}\right) & -S^2\frac{EA}{l} - C^2\frac{12EA}{l^3} & -C\frac{6EA}{l^2} \\ S\frac{6EA}{l^2} & -C\frac{6EA}{l^2} & +\frac{4EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_{bb} = \begin{bmatrix} C^2\frac{EA}{l} + S^2\frac{12EI}{l^3} & SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & S\frac{6EA}{l^2} \\ SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & +S^2\frac{EA}{l} + C^2\frac{12EA}{l^3} & -C\frac{6EA}{l^2} \\ S\frac{6EA}{l^2} & -C\frac{6EA}{l^2} & +\frac{4EA}{l} \end{bmatrix}$$

simétrica

Matriz elemental de rigidez es simétrica en cualquier sistema de referencia.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

El método de rigidez

Matriz global de rigidez

Se trata de formar un sistema que iguale las fuerzas externas de cada uno de los nudos (**F**) con la matriz global del sistema (**K**) multiplicada por el vector desplazamiento global del sistema (**D**).

Se trata de ensamblar la matriz global de rigidez a partir de las matrices de todas las barras. Tener en cuenta cómo están conectadas con los nudos (ver diagrama de ensamblaje).

La matriz global de rigidez se define según nudos y está formado por los desplazamientos en X e Y más el giro. La matriz global de rigidez se ensambla.

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \dots \\ \mathbf{f}_i \\ \dots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1i} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{i1} & \dots & \mathbf{K}_{ii} & \dots & \mathbf{K}_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{ni} & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \dots \\ \mathbf{d}_i \\ \dots \\ \mathbf{d}_n \end{bmatrix}$$

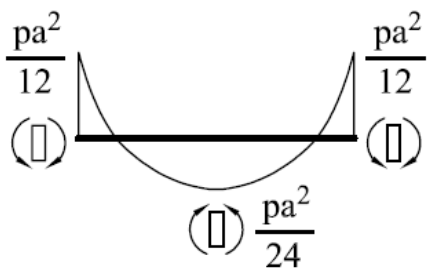
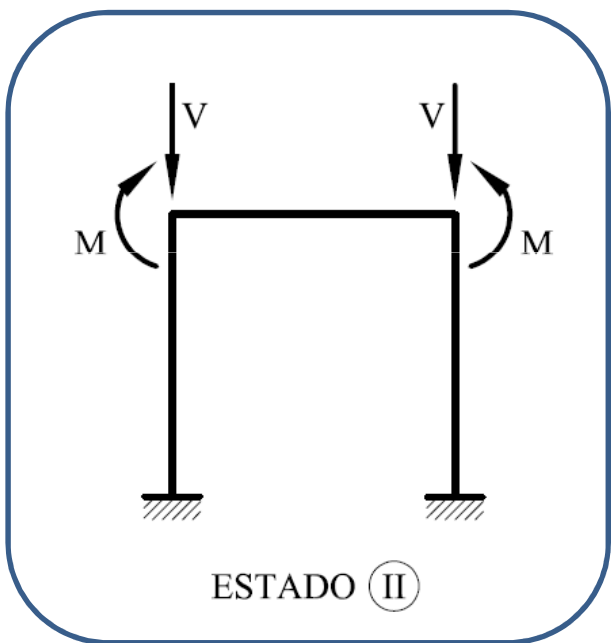


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

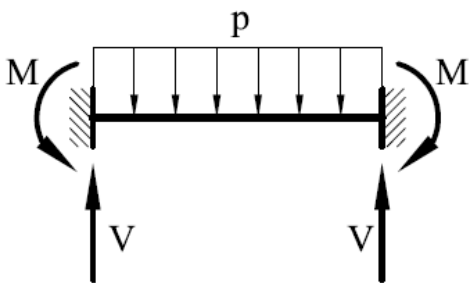
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

El método de rigidez

Ejemplo

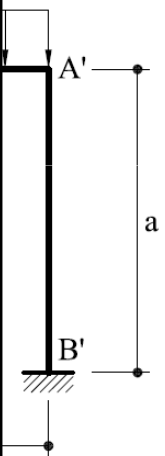


ESTADO ①



ESTADO ①

$$M = \frac{pa^2}{12}; V = \frac{pa}{2}$$



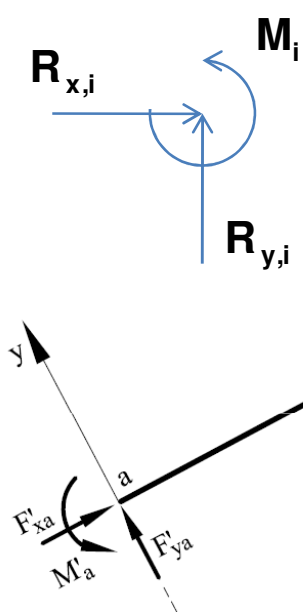
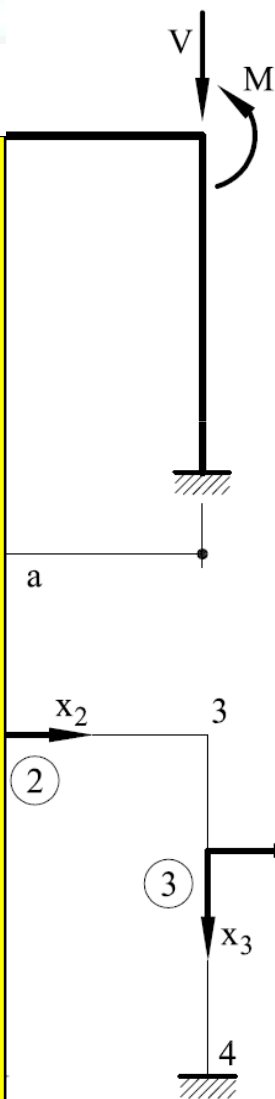
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

El método de rigidez

Ejemplo

Cartagena99



Cada nudo hay que tener en cuenta las fuerzas exteriores. El sentido positivo es el que se indica.

Considerar cada barra en el sistema particular y hacer después la transformación.

Las fuerzas exteriores del nudo se igualan a las fuerzas de cada barra que confluyen en el nudo. El signo de las fuerzas y momentos exteriores, que son fuerzas como V y M en los nudos 2 y 3 o las reacciones de empotramiento en los nudos 1 y 4, se corresponden con el sistema global de referencia.

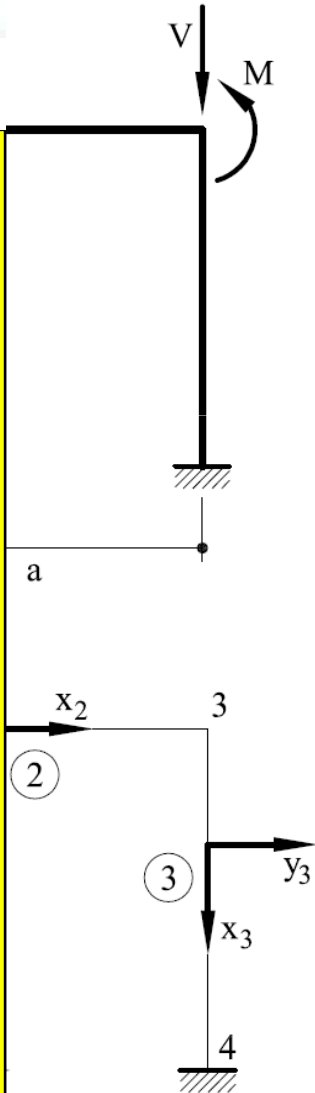
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

El método de rigidez

Ejemplo

Cartagena99



$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{aa})_{12} & (\mathbf{K}_{ab})_{12} & 0 & 0 \\ (\mathbf{K}_{ba})_{12} & (\mathbf{K}_{bb})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{23} & (\mathbf{K}_{ab})_{23} & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{ba})_{23} & (\mathbf{K}_{bb})_{23} + (\mathbf{K}_{aa})_{34} & (\mathbf{K}_{ab})_{34} \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_{ba})_{34} & (\mathbf{K}_{bb})_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{K}_{aa})_{12} \mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{ab})_{12} \mathbf{d}_2$$

$$\mathbf{f}_2 = (\mathbf{K}_{ba})_{12} \mathbf{d}_1 + \{(\mathbf{K}_{bb})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{23}\} \mathbf{d}_2 + (\mathbf{K}_{ab})_{23} \mathbf{d}_3$$

$$\mathbf{f}_3 = (\mathbf{K}_{ba})_{23} \mathbf{d}_2 + \{(\mathbf{K}_{bb})_{23} + (\mathbf{K}_{aa})_{34}\} \mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ab})_{34} \mathbf{d}_4$$

$$\mathbf{f}_4 = (\mathbf{K}_{ba})_{34} \mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{bb})_{34} \mathbf{d}_4$$

A un nudo pueden llegar varias barras. En función de si la barra empieza o termina en un nudo, se emplea como subíndice "a" (origen) o "b" (extremo).

Por ejemplo, en el nudo 2 se tienen la barra 12 (cuyo nudo 2 es el extremo) y la 23 (cuyo nudo 2 es el origen).

El ensamblaje de la matriz se puede hacer por nudos, viendo todas las barras que llegan al nudo, o por barras. En el caso de las barras se puede ver que una barra ij ocupa posiciones en las columnas y filas (i,j).

En la numeración de los nudos hay que procurar que la diferencia máxima entre dos nudos unidos sea mínima (ahorra memoria al almacenar matrices).

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

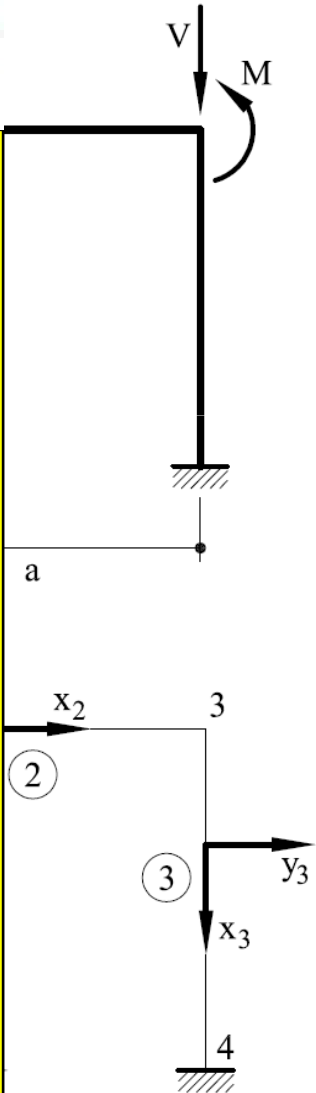
El método de rigidez

Ejemplo

$$\begin{aligned} (K_{aa})_{12} &= (K_{aa})_{23} = (K_{aa})_{34} \\ (K_{ab})_{12} &= (K_{ab})_{23} = (K_{ab})_{34} \\ (K_{ba})_{12} &= (K_{ba})_{23} = (K_{ba})_{34} \\ (K_{bb})_{12} &= (K_{bb})_{23} = (K_{bb})_{34} \end{aligned}$$

Este es un ejemplo muy sencillo donde todas las barras tienen la misma longitud, sección y rigidez. Se recomienda consultar las transparencias que vienen a continuación, donde se proponen unas líneas de código en MATLAB, junto con el ejemplo 6.10 de la referencia de Miguel Cervera

```
%Ejemplo 1. Método de rigidez (Ejemplo 6.10.1 de la
página 312 del libro)
%Definición de la estructura
%Parámetros
clear all;close all;clc
a=5;
EI=2e8;
EA=1e10;
%Nudos
N1=[0 0];
N2=[0 a];
N3=[a a];
N4=[a 0];
%Barras
alpha12=(180/pi)*atan((N2(2)-N1(2))/(N2(1)-N1(1)));
alpha23=(180/pi)*atan((N3(2)-N2(2))/(N3(1)-N2(1)));
alpha34=(180/pi)*atan((N4(2)-N3(2))/(N4(1)-N3(1)));
```



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

El método de rigidez

Ejemplo

`%Matrices en la base de cada una de las barras. Se puede apreciar que todas las matrices son iguales.`

```
K_p_aa=[EA/a 0 0;0 12*EI/a^3 6*EI/a^2;0 6*EI/a^2 4*EI/a];
```

```
K_p_ab=[-EA/a 0 0;0 -12*EI/a^3 +6*EI/a^2;0 -6*EI/a^2 2*EI/a];
```

```
K_p_ba=[-EA/a 0 0;0 -12*EI/a^3 -6*EI/a^2;0 +6*EI/a^2 2*EI/a];
```

```
K_p_bb=[EA/a 0 0;0 12*EI/a^3 -6*EI/a^2;0 -6*EI/a^2 4*EI/a];
```

`%Matrices en la base global`

`%Barra 12`

```
K_aa_12=Trans_Mat(K_p_aa, alpha12);
```

```
K_ab_12=Trans_Mat(K_p_ab, alpha12);
```

```
K_ba_12=Trans_Mat(K_p_ba, alpha12);
```

```
K_bb_12=Trans_Mat(K_p_bb, alpha12);
```

`%Barra 23`

```
K_aa_23=Trans_Mat(K_p_aa, alpha23);
```

```
K_ab_23=Trans_Mat(K_p_ab, alpha23);
```

```
K_ba_23=Trans_Mat(K_p_ba, alpha23);
```

```
K_bb_23=Trans_Mat(K_p_bb, alpha23);
```

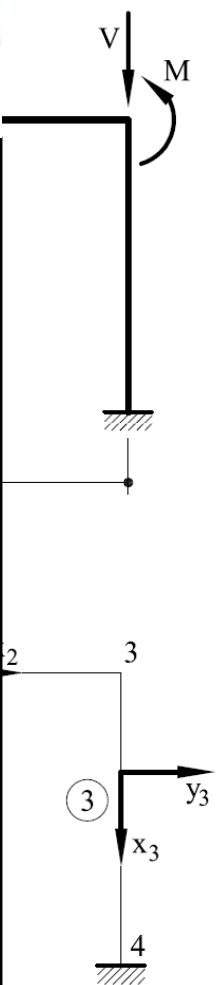
`%Barra 34`

```
K_aa_34=Trans_Mat(K_p_aa, alpha33);
```

```
K_ab_34=Trans_Mat(K_p_ab, alpha33);
```

```
K_ba_34=Trans_Mat(K_p_ba, alpha33);
```

```
K_bb_34=Trans_Mat(K_p_bb, alpha33);
```



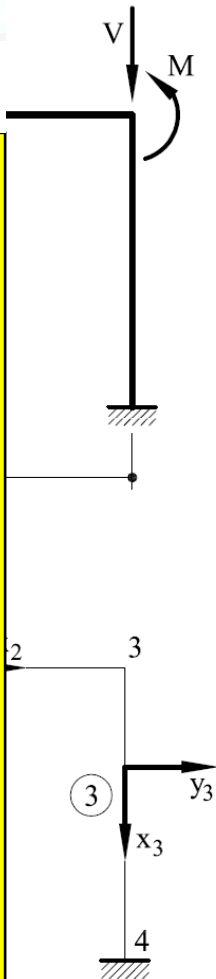
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El método de rigidez

Ejemplo



```

%Matriz de rigidez total del sistema
K=[K_aa_12    K_ab_12    zeros(3,3)    zeros(3,3);...
   K_ba_12    K_bb_12+K_aa_23 K_ab_23    zeros(3,3);...
   zeros(3,3) K_ba_23    K_bb_23+K_aa_34 K_ab_34;...
   zeros(3,3) zeros(3,3)    K_ba_34    K_bb_34];

%Eliminando los desplazamientos y giros de los nodos 1 y 4
%(conocidos) queda una matriz resumida. Esta matriz no
considera tampoco las reacciones en esos puntos
K_pres=K(4:9,4:9);
F_pres=[0 -50e3 -41.67e3 0 -50e3 41.67e3]'; % Ver signo
%Calculo de desplazamientos desconocidos
D_pres=inv(K_pres)*F_pres %La matriz se puede invertir

%Vector de desplazamiento completo
D_1=[0 0 0]'; %Empotramiento (desplazamientos y giros nulos)
D_4=[0 0 0]';
D=[D_1; D_pres; D_4];

%Cálculo de reacciones (ver Ecuación 6.11 del libro)
%Reacciones en nudo 1 (empotramiento)
FX_1=K(1,1:end)*D
FY_1=K(2,1:end)*D
M_1 =K(3,1:end)*D
%Reacciones en nudo 4 (empotramiento)
FX_4=K(10,1:end)*D
FY_4=K(11,1:end)*D
M_4 =K(12,1:end)*D
    
```

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

El método de rigidez

Ejemplo

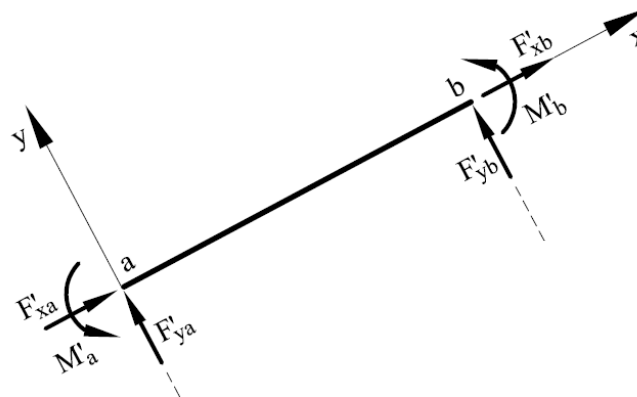
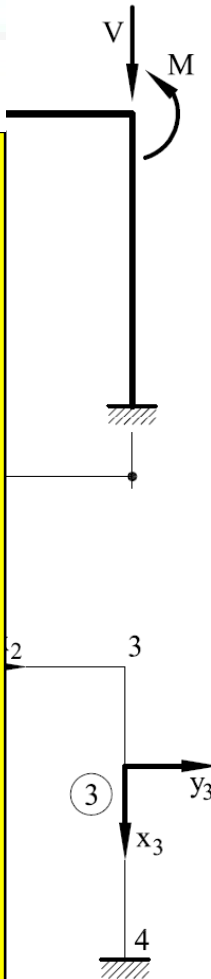
`%Esfuerzos en cada una de las barras. Es interesante ver el
%sentido de los momentos y las fuerzas en las barras y
%relacionarlas con las reacciones y fuerzas externas.`

```
D1_p=Trans_Vec(D(1:3), alpha12);
D2_p=Trans_Vec (D(4:6), alpha12);
f_p_12=[K_p_aa K_p_ab; K_p_ba K_p_bb]*[D1_p; D2_p]
```

```
D2_p=Trans_Vec(D(4:6), alpha23);
D3_p=Trans_Vec (D(7:9), alpha23);
f_p_23=[K_p_aa K_p_ab; K_p_ba K_p_bb]*[D2_p; D3_p]
```

```
D3_p=Trans_Vec(D(7:9), alpha34);
D4_p=Trans_Vec (D(10:12), alpha34);
f_p_34=[K_p_aa K_p_ab; K_p_ba K_p_bb]*[D3_p; D4_p]
```

`%Los esfuerzos en los extremos de las barras nos permite
obtener los esfuerzos en cada punto de la barra`



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

SE TEMA 2

AYUDAS Y/O SUGERENCIAS?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

--

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, green, cursive font. The text is set against a light blue background that resembles a map outline of the city of Cartagena. A yellow and orange arrow-like shape points upwards from the bottom left towards the text.