Soluciones al Examen

Probabilidades y Estadística II

Jueves 22 de Enero de 2016.

Problema-1 Solución:

Varios funcionarios deben revisar el equipaje de los viajeros en la aduana de un aeropuerto. Todos los viajeros llevan equipaje de mano, que es revisado en un tiempo aleatorio exponencial de media 1 minuto. La mitad de los viajeros, además llevan un maleta facturada, ambas maletas son revisadas en un tiempo aleatorio exponencial de media 4 minutos. Los viajeros llegan según un proceso de Poisson de tasa 2 viajeros por minuto al puesto de control, donde hacen una única cola.

1. Formular un modelo de colas para el puesto de control de aduanas, con el mínimo número de funcionarios.

   M/M/c, $\lambda = 2$,

   $E[s] = 0.5 * 1 + 0.5 * (4) = 5/2$, $\mu = 1/E[s] = 2.5$,

   $\rho = 2/(c * 0.3333) < 1$, $c = 7$.

2. ¿Cuál es la probabilidad de tener que esperar?

   $\pi_0 = (\sum_{n=0}^{c-1}) r^n/n! + r^c/(c! * (1-\rho))^{-1} = 0.001578781$

   $C(c = 7, r = 6) = \frac{r^c/c!}{(1-\rho)} * \pi_0 = 0.6138301$

3. ¿Cuál es la media de viajeros en el puesto de control?

   $L = c * \rho + C(7, 6) * \frac{\rho}{1-\rho} = 9.682981$

4. ¿Indicar como calcular la media de funcionarios ocupados revisando el equipaje?

   $0 * \pi_0 + 1 * \pi_1 + 2 * \pi_2 + 3 * \pi_3 + 4 * \pi_4 + 5 * \pi_5 + 6 * \pi_6 + 7 * (\pi_7 + \pi_8 + \ldots) \simeq 6$

   $\pi_n = r^n/n! * \pi_0$, $n = 0, \ldots, c$

   $0.000000000, 0.009472687, 0.056836123, 0.170508368,$
   $0.341016735, 0.511525103, 0.613830123, 0.613830123$

   $\pi_n = r^n/(c! * c^{n-c}) * \pi_0$, $n > c$

   $0.07516287, 0.06442532, 0.05522170, 0.04733289, 0.04057105, 0.03477518, 0.02980730$

5. ¿Cuál es el tiempo medio en cola?

   $W_q = \frac{C(c,r)}{c*\mu*(1-\rho)} = 1.841492$

6. ¿Cuántos funcionarios se necesitan para que el tiempo medio en cola sea al menos la mitad del anterior?

   $W_q/2 = \frac{C(c',r)}{c'*\mu*(1-\rho)}$, c'

   $0.9207461 > \frac{C(c',r)}{c'*\mu*(1-\rho)}$,

   $c' = 8$ funcionarios $\rightarrow W_q/2 = 0.9207461 > 0.6905617$

Problema-2 Solución:

Un sistema está configurado por 5 nodos, $\{A, B, C, D, E\}$, según la matriz siguiente:

	A	B	C	D	E
A	0	1/3	1/3	1/3	0
B	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	1
E	90/100	0	0	0	0

que muestra las probabilidades de que un cliente que sale del nodo de la fila i se dirija al nodo de la columna j.

Los clientes llegan al nodo A con tasa λ y reciben servicio a tasa μ_A. El nodo A distribuye en proporciones iguales los clientes a su salida entre los nodos B, C y D. Estos tres nodos envian los clientes de su salida hacia el nodo E. Los clientes reciben servicio en los nodos B, C y D a tasa $\mu_B, \mu_C y \mu_D$. El 10 % de los clientes que salen del nodo E abandona el sistema, donde recibieron servicio a tasa μ_E.

1. Modelizar el problema como una red de colas, dibujar el sistema y anotar las probabilidades en el diagrama.

2. Supuesto que la red funciona de forma estable, con dos procesadores en cada nodo calcular las tasas de servicio mínimas que permite funcionar a cada nodo de forma estable. Considerar en el resto de apartados el doble de la anterior tasa de servicio.

$\Lambda_A = \lambda + 1/3\Lambda_E * 0.90$
$\Lambda_B = 1/3\Lambda_A$
$\Lambda_C = 1/3\Lambda_A$
$\Lambda_D = 1/3\Lambda_A$
$\Lambda_E = \Lambda_B + \Lambda_C + \Lambda_D$

$\Lambda_A = \frac{\lambda}{0.1} = 10 * \lambda$
$\Lambda_B = 10/3 * \lambda$
$\Lambda_C = 10/3 * \lambda$
$\Lambda_D = 10/3 * \lambda$
$\Lambda_E = 10 * \lambda$

$c_i = 2, \forall i = A, B, C, D, E$

$\rho_A = \frac{\Lambda_A}{(c_A * \mu_A)} \leq 1,\ \mu_A = 5 * \lambda$
$\rho_B = \frac{1/3 * \Lambda_A}{(c_B * \mu_B)} \leq 1,\ \mu_B = 5/3 * \lambda$
$\rho_C = \frac{1/3 * \Lambda_A}{(c_C * \mu_C)} \leq 1,\ \mu_C = 5/3 * \lambda$
$\rho_D = \frac{1/3 * \Lambda_A}{(c_D * \mu_D)} \leq 1,\ \mu_D = 5/3 * \lambda$
$\rho_E = 5 * \lambda$

Consideramos el doble de tasa de servicio en adelante.

3. Calcular el número medio de clientes en el sistema.

   $\rho_i = 0.5, \forall i = A, B, C, D, E$

   $L_i = \frac{2 * \rho}{1 - \rho^2} = 4/3$
   $L = 5 * L_A = 20/3$

4. Calcular el tiempo medio en la cola en cada nodo.

   $L_q = \frac{2 * \rho^3}{1 - \rho^2} = 2/3$

5. Calcular la probabilidad de tener que esperar cola en el nodo E.

   $C(2, 1) = \frac{2 * \rho^2}{1 + \rho} = 1/3$

Problema-3 Solución:

N técnicos deben mantener M máquinas, $N \leq M$. La máquina m funciona durante un tiempo exponencial con tasa $\lambda_m, m = 1, \ldots, M$, antes de sufrir una avería. Cuando una máquina se avería la repara un técnico, designado al azar entre los que no están ocupados, que se dedica en exclusiva a dicha máquina. Los tiempos de reparación, para todas las máquinas, según el técnico n que la repara son exponenciales de tasa $\mu_n, n = 1, \ldots, N$. El proceso de interés consiste en conocer la disponibilidad de cada máquina y la actividad de los técnicos. Considerar el estado 0: todas las máquinas funcionan.

1. Construir un modelo para el proceso con 1 técnico y 2 máquinas: definir los estados, dibujar el diagrama de transición de estados del proceso y calcular las tasas $q_{ij}, \forall i, j$ en función de λ_1, λ_2 y μ_1.

   Sean los estados {0,1,2,3,4}, donde $A = 0$ es la máquina A funciona y $A = 1$ es la máquina A no funciona, analogamente para la máquina B, $T = 0$ es el técnico no trabaja, $T = 1$ es el técnico trabaja en la máquina A, $T = 2$ es el técnico trabaja en la máquina B.

	A	B	T
0:	0	0	0
1:	0	1	2
2:	1	0	1
3:	1	1	1
4:	1	1	2

Q	0	1	2	3	4
0	0	λ_2	λ_1	0	0
1	μ_1	0	0	0	λ_1
2	μ_1	0	0	λ_2	0
3	0	μ_1	0	0	0
4	0	0	μ_1	0	0

2. ¿Se puede analizar este proceso como uno de nacimiento y muerte?, dar una respuesta razonada.

   No es una CMTC de nacimieno y muerte porque las trasiciones no son todas adyacentes, hay transsiciones fuera de las diagonales superior e infoerior de Q.

3. Dados $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\mu_1 = 4$, se observa que cuando ambas máquinas están averiadas las proporciones de tiempo a largo plazo que el técnico trabaja en cualquiera de las dos son iguales.

   a) Calcular el tiempo medio de permanencia en cada estado.
   $v_i = \sum_j q_{i,j}$
   $v_0 = \lambda_1 + \lambda_2 = 5$, $E[t_0] = 1/5$, $v_1 = \mu_1 + \lambda_1 = 6$, $E[t_1] = 1/6$, $v_2 = \mu_1 + \lambda_2 = 7$, $E[t_2] = 1/7$, $v_3 = \mu_1 = 4$, $E[t_3] = 1/4$, $v_4 = \mu_1 = 4$, $E[t_4] = 1/4$

   b) Calcular las probabilidades de transición entre estados.
   $p_{ij} = q_{ij}/v_i$

P	0	1	2	3	4
0	0	2/5	3/5	0	0
1	4/6	0	0	0	2/6
2	4/7	0	0	3/7	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0

   c) ¿Cuál es el estado que tiene mayor probabilidad a largo plazo?

$$
\begin{aligned}
5\pi_0 &= 4\pi_1 + 4\pi_2 \\
6\pi_1 &= 3\pi_0 + 4\pi_3 \\
7\pi_2 &= 2\pi_0 + 4\pi_4 \\
4\pi_3 &= 3\pi_2 \\
4\pi_4 &= 2\pi_1
\end{aligned}
$$

   $\pi_0 = 1/3, \pi_1 = 1/4, \pi_2 = 1/6, \pi_3 = 1/8, \pi_4 = 1/8$. Es el estado 0.

   d) ¿Cuál es la proporción de tiempo que trabaja el técnico?
   $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1/4 + 1/6 + 1/8 + 1/8 = 2/3$

4. Construir un modelo para el proceso con 2 técnicos y 2 máquinas: definir los estados, dibujar el diagrama de transición de estados del proceso y calcular las tasas $q_{0j}, \forall j$ en función de λ_1, λ_2, μ_1 y μ_2.

   Sean los estados {0,1,2,3,4,5,6}, donde $A = 0$ es la máquina A funciona y $A = 1$

es la máquina A no funciona, analogamente para la máquina B, $T = 0$ es el técnico no trabaja, $T = 1$ es el técnico trabaja en la máquina A, $T = 2$ es el técnico trabaja en la máquina B, analogamente para el técnico S.

	A	B	T	S
0:	0	0	0	0
1:	0	1	2	0
2:	0	0	1	2
3:	1	0	1	0
4:	1	0	0	1
5:	1	1	1	2
6:	1	1	2	1

Q	0	1	2	3	4	5	6
0	0	λ_2	λ_2	λ_1	λ_1		
1		0					
2			0				
3				0			
4					0		
5						0	
6							0