Departamento de Ingeniería de Telecomunicación
Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Jaén

TEMA 3

SEÑALES ALEATORIAS EN SISTEMAS DE COMUNICACIÓN (I)

Teoría de la Comunicación (2º grado) 2020-2021

Contenidos

1. Variables aleatorias
2. Procesos estocásticos
3. Procesos estacionarios y ergódicos
4. Espectro de potencia de procesos estacionarios
5. Respuesta de un sistema LTI a un proceso estacionario

Objetivos específicos

• Concepto de **variable aleatoria**

• Concepto de **proceso estocástico** y herramientas matemáticas para la caracterización de dichos procesos

• Conceptos de **estacionariedad** y **ergodicidad**

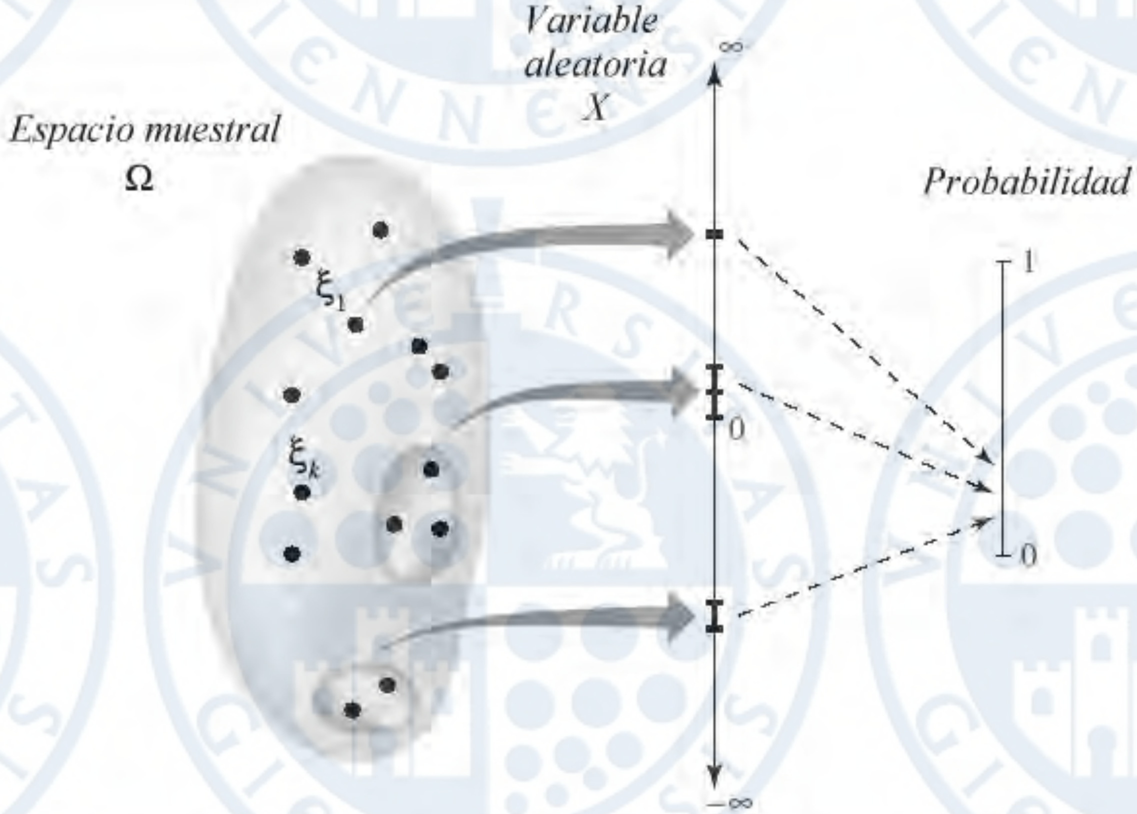
• **Autocorrelación** y **densidad espectral de potencia** asociada a señales **aleatorias**

• **Respuesta** de un **sistema LTI** ante una determinada excitación.

Variables aleatorias (I)

• Sea Ω el espacio muestral de todos los posibles resultados ξ de un experimento ε aleatorio

• Una **variable aleatoria** *X* es una función (determinista) que asocia a cada uno de los posibles resultados ξ del espacio muestral un número real asociado con una probabilidad de ocurrencia



Relación entre espacio muestral, variable aleatoria y probabilidad

Variables aleatorias (II)

- La **función densidad de probabilidad $f_X(x)$** de una variable aleatoria X define la probabilidad de que el valor de la variable se encuentre en el rango *[a,b]*

$$\Pr[a \le X \le b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Propiedades:

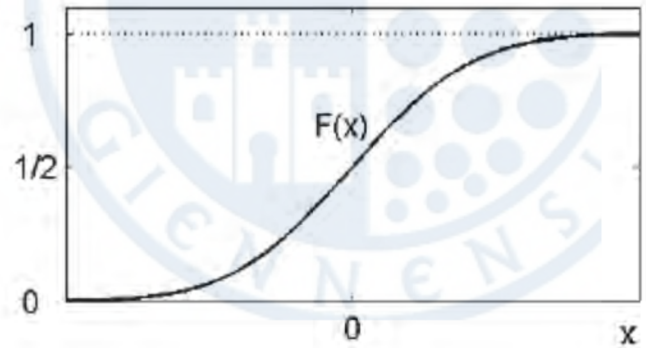
- $f_X(x) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

- La **función de distribución $F_X(x)$** de una variable aleatoria X

$$F_X(x) = \Pr[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \;\Rightarrow\; f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Propiedades:

- $0 \le F_X(x) \le 1$
- Monótona creciente: $F_X(-\infty) = 0 \quad F_X(+\infty) = 1$
- $\Pr[a \le X \le b] = F_X(b) - F_X(a)$



Variables aleatorias (III)

- **Operador esperanza *E[ ]*:** permite definir conceptos como la media *E[X]* y otros promedios (momentos) estadísticos de una variable aleatoria X

$$\bar{x} = \eta_x = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

E[X] es el valor medio más probable al analizar un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite "muchas" veces

Propiedades

- $E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$
- $E[k] = k$
- Operador lineal: $E\left[a_1 g_1(X) + a_2 \cdot g_2(X)\right] = a_1 \cdot E\left[g_1(X)\right] + a_2 \cdot E\left[g_2(X)\right]$

- **Momentos no centrales:** en sistemas de comunicaciones, los más importantes son los de orden $n = 1, 2$

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)dx$$

$$\begin{cases} \bar{x} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx & (n=1) \\ \overline{x^2} = E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx & (n=2) \end{cases}$$

- **Momentos centrales:**

$$E\left[(X-\bar{x})^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^n \cdot f_X(x)dx$$

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\bar{x})^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 \cdot f_X(x)dx$$

$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

Tarea del alumno: Demostración

Variables aleatorias (IV)

• Una **variable aleatoria bidimensional** *(X, Y)* es una función (determinista) que asocia a cada uno de los posibles resultados del espacio muestral un punto del plano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

• La **función de densidad de probabilidad conjunta** $\boldsymbol{f_{XY}(x,y)}$ y **la función de distribución conjunta** $\boldsymbol{F_{XY}(x,y)}$ de dos variables X, Y:

$$\Pr\left[\left(X,Y\right)\in A\right]=\iint_{(x,y)\in A} f_{XY}\left(x,y\right)dxdy$$

$$F_{XY}(a,b) = Pr[X \leq a, Y \leq b] = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$f_{XY}\left(x,y\right)=\frac{\partial^2 F_{XY}\left(x,y\right)}{\partial x \partial y}$$

Dos variables aleatorias $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son independientes $\Leftrightarrow \begin{cases} f_{XY}\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)\cdot f_Y\left(y\right) \\ f_Y\left(y/x\right)=f_Y\left(y\right) \end{cases}$

Variables aleatorias (V)

- **Correlación cruzada R_{XY} de dos variables aleatorias** X,Y:

$$R_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

Dos variables aleatorias $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son ortogonales $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R_{XY}} = 0$

- **Covarianza C_{XY} dos variables aleatorias** X,Y: informa como "covarían" ambas variables X,Y, es decir, si existe una dependencia entre ellas

$$C_{XY} = E\left[(X-\bar{x})\cdot(Y-\bar{y})\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})\cdot f(x,y)\,dxdy = E[XY] - \bar{x}\cdot\bar{y}$$

$C_{XY} > 0 \Rightarrow relación\ directa\ (\uparrow X \Longrightarrow \uparrow Y, \downarrow X \Longrightarrow \downarrow Y)$

$C_{XY} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{Incorrelación}$ (no existe relación lineal)

$C_{XY} < 0 \Rightarrow relación\ inversa\ (\uparrow X \Longrightarrow \downarrow Y, \downarrow X \Longrightarrow \uparrow Y)$

- **Coeficiente r_{XY} de correlación de dos variables aleatorias** X,Y: informa acerca del grado de relación lineal entre dos variables aleatorias

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Dos variables aleatorias X e Y son incorreladas $\Leftrightarrow$ $r_{XY} = 0$

Variables aleatorias (VI)

… continuación página anterior:

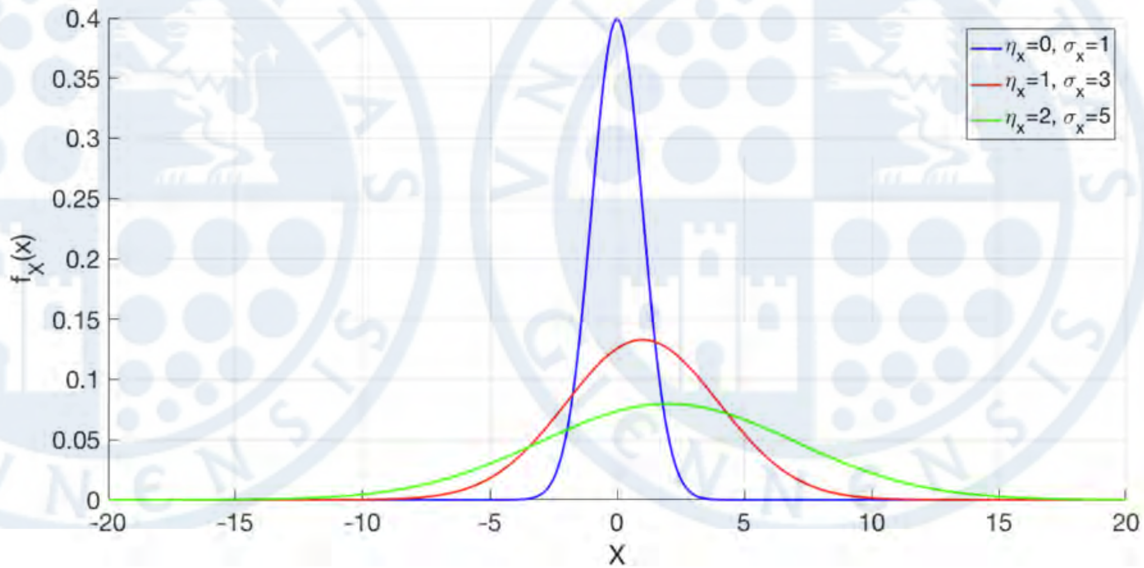
Si X e Y son independientes $\Rightarrow$ X e Y son incorreladas

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad \Rightarrow C_{XY} = 0$$

$$C_{XY} = E\left[(X-\overline{x})\cdot(Y-\overline{y})\right] = E[XY] - \overline{x}\cdot\overline{y} \underset{\text{Independientes}}{=} E[X]\cdot E[Y] - \overline{x}\cdot\overline{y} = 0$$

- **Variable aleatoria normal**:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_X}\cdot e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\cdot\sigma_X^2}}$$



Propiedades

- Simetría respecto de η_x
- Distribución $f_{X(x)}$
  $[\eta_x - \sigma_x, \eta_x + \sigma_x] \approx 68.3\%$
  $[\eta_x - 2\sigma_x, \eta_x + 2\sigma_x] \approx 95.4\%$

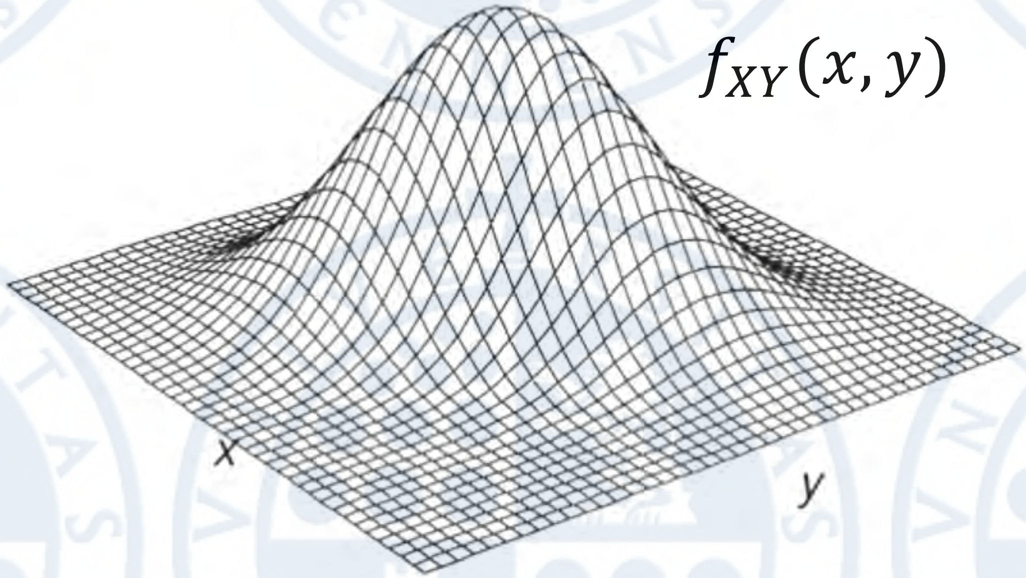
Variables aleatorias (VII)

- **Variable aleatorias conjuntamente normales**:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{1-r_{XY}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\cdot\left(1-r_{XY}^2\right)}\cdot\left[\frac{(x-\eta_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(x-\eta_Y)^2}{\sigma_Y^2}-2\cdot r_{XY}\cdot\frac{(x-\eta_X)\cdot(x-\eta_Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}\right]}$$

$$\eta_X = E[X] = \overline{x}$$

$$\eta_Y = E[Y] = \overline{y}$$



$f_{XY}(x,y)$

Teorema:

Si X e Y son incorreladas y conjuntamente normales $\Rightarrow X$ e Y son independientes

Procesos estocásticos (I)

• Una **señal aleatoria** *x(t)* es una señal que para cada instante de tiempo *t* toma un valor aleatorio, es decir, que **no conocemos a priori** (p.e: secuencia binaria)

• El modelo matemático que va a permitir representar a la señal aleatoria se denomina **proceso estocástico *x(t,ξ)***

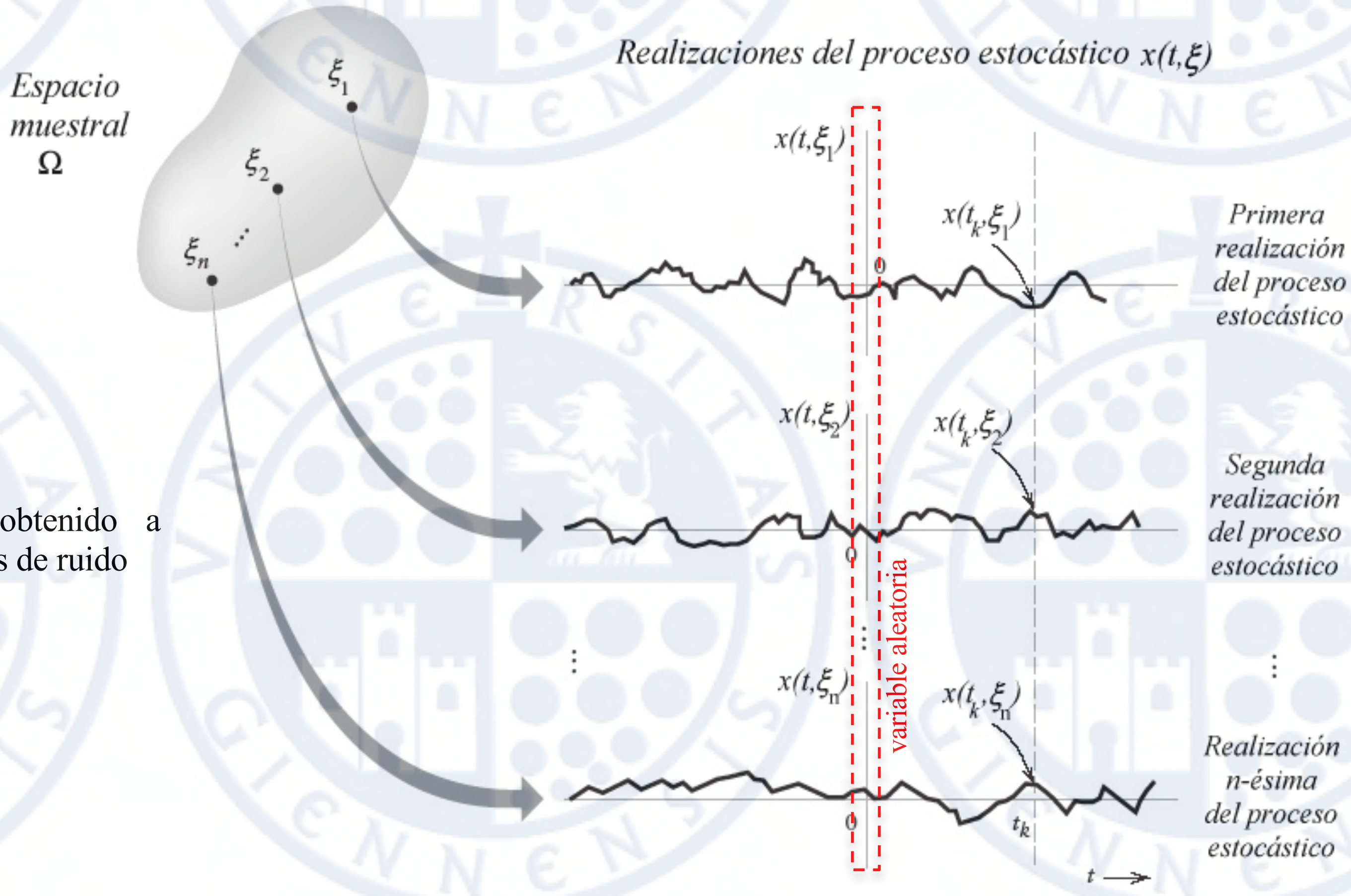
Ejemplo: proceso estocástico obtenido a partir de la salida de *n* generadores de ruido

Proceso estocástico

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

Variables aleatorias

$$a, \omega, \theta$$



Relación entre espacio muestral y realizaciones de una señal aleatoria

Procesos estocásticos (II)

- El **proceso estocástico** $\boldsymbol{x(t,\xi)}$ es una función de dos variables t (tiempo), ξ (resultado de un experimento aleatorio)
  - Cada vez que se realiza un experimento se tendrá una señal en función del tiempo que se llama **realización** $\boldsymbol{x(t,\xi_i)=x_i(t)}$
  - Para cada instante de tiempo se tiene una **variable aleatoria** $\boldsymbol{x(t_k,\xi)= x(t_k)}$
  - Una realización determinada ξ_i para un instante de tiempo determinado t_k proporciona un **valor numérico** $\boldsymbol{x(t_k,\xi_i)=x_i(t_k)}$
- Para caracterizar completamente un proceso estocástico se requiere la función de densidad de probabilidad (o función de distribución) conjunta de las infinitas variables aleatorias (t_1, t_2, …t_n) que conforman el proceso.

$$F_{x(t_1)x(t_2),\ldots x(t_n)}\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)=\Pr\left[x\left(t_1\right)\le x_1,x\left(t_2\right)\le x_2,\ldots x\left(t_n\right)\le x_n\right]$$

$$f_{x(t_1)x(t_2),\ldots x(t_n)}\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)=\frac{\partial^n F_{x(t_1)x(t_2),\ldots x(t_n)}\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}$$

En un proceso estocástico complejo $z(t) = x(t) + jy(t)$, para cada instante de tiempo t se tiene una variable aleatoria bidimensional (una para la parte real y otro para la parte imaginaria).

De lo anterior, se deduce que la caracterización completa de una señal aleatoria $x(t)$ no es posible desde un punto de vista práctico. En esta asignatura, solo se realizará una descripción parcial utilizando estadísticos de hasta segundo orden ($n\le 2$)

Procesos estocásticos (III)

- Las siguientes definiciones $\eta_x(t)$, $R_x(t_1,t_2)$, $C_x(t_1,t_2)$, $R_{xy}(t_1,t_2)$ y $C_{xy}(t_1,t_2)$ hacen referencia a procesos aleatorios **complejos** $x(t) \in \mathbb{C}$, $y(t) \in \mathbb{C}$. Si los procesos son reales, las expresiones anteriores son válidas omitiendo la conjugación *

  - La **media** $\eta_x(t)$ de conjunto o probabilística del proceso complejo aleatorio $x(t)$ es una función determinística que indica la media de cada una de las variables aleatorias que componen la señal.

$$\eta_x(t)=E[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

  - La **autocorrelación** $R_x(t_1,t_2)$ de conjunto (probabilística) de un proceso complejo $x(t)$ se define como:

$$R_x(t_1,t_2)=E[x(t_1)\cdot x^*(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\cdot x^*(t_2) \cdot f_X(x)\,dx$$

NOTA: no confundir la **media y autocorrelación probabilística** (Tema 3, mediante el operador $E[]$) con la **media y la autocorrelación temporal (**Tema 2)

$$\overline{x_i(t)} = \langle x_i(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t,\xi_i)\,dt \qquad \langle x_i(t+\tau)\cdot x_i^*(t) \rangle = R_{x_i}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau,\xi_i)\cdot x^*(t,\xi_i)\,dt$$

Procesos estocásticos (IV)

- La **autocovarianza** $C_x(t_1,t_2)$ de un proceso complejo $x(t)$ aleatorio,

$$C_x(t_1,t_2) = E\left[\left(x(t_1) - \eta_x(t_1)\right)\cdot\left(x^*(t_2) - \eta_x^*(t_2)\right)\right] = R_x(t_1,t_2) - \eta_x(t_1)\cdot\eta_x^*(t_2)$$

- La **correlación cruzada** $R_{xy}(t_1,t_2)$ de dos procesos complejos $x(t),y(t)$ aleatorios,

$$R_{xy}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)\cdot y^*(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\, y^*(t_2)\, f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

- La **covarianza cruzada** $C_{xy}(t_1,t_2)$ de dos procesos complejos $x(t),y(t)$ aleatorios,

$$C_{xy}(t_1,t_2) = E\left[\left(x(t_1) - \eta_x(t_1)\right)\cdot\left(y^*(t_2) - \eta_y^*(t_2)\right)\right] = R_{xy}(t_1,t_2) - \eta_x(t_1)\cdot\eta_y^*(t_2)$$

Dos **procesos estocásticos complejos** $x(t)$, $y(t)$ son **independientes** si y sólo si se cumple:

$$f_{x(t_1)x(t_2),\dots x(t_n),y(t'_1),y(t'_2),\dots y(t'_m)}(x_1,x_2,\dots x_n,y_1,y_2,\dots y_m) =$$
$$= f_{x(t_1)x(t_2),\dots x(t_n)}(x_1,x_2,\dots x_n)\cdot f_{y(t'_1)y(t'_2),\dots y(t'_n)}(y_1,y_2,\dots y_m)$$

para valores t_1, t_2,… t_n, t'_1 , t'_2 , … t'_m y n y m cualesquiera.

Procesos estocásticos (V)

- Dos **procesos estocásticos** son **ortogonales** si y sólo si se cumple:

$$R_{xy}\left(t_1,t_2\right)=E\left[x\left(t_1\right)\cdot y^*\left(t_2\right)\right]=0$$

- Dos **procesos estocásticos** *x(t), y(t)* son **incorrelados** si y sólo si se cumple:

$$C_{xy}\left(t_1,t_2\right)=0$$

Teoremas

- Si $x(t)$, $y(t)$ son procesos independientes ➔ $x(t)$, $y(t)$ son incorrelados

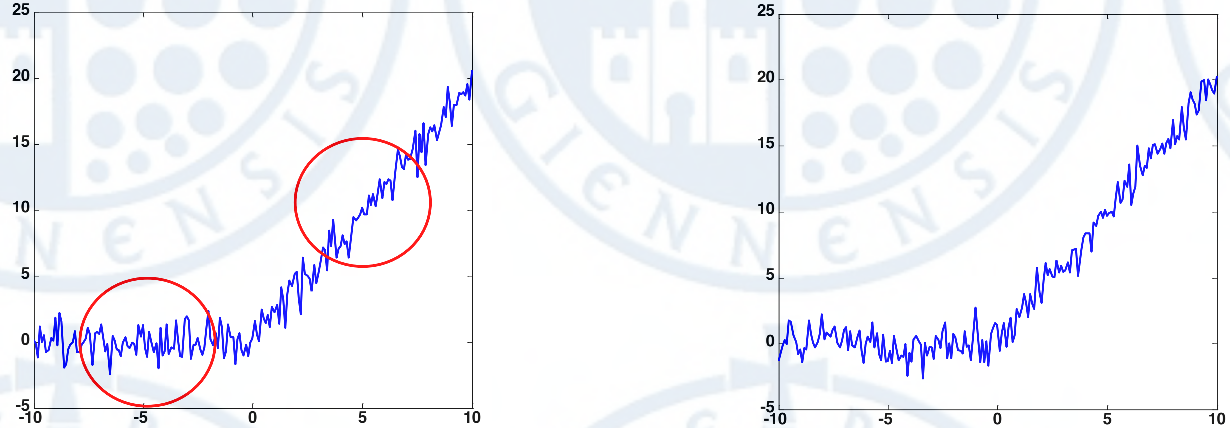
$$f_{xy}(x,y)=f_x(x)f_y(y)\Rightarrow R_{xy}(t_1,t_2)=E[x(t_1)y^*(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1)y^*(t_2)f_{xy}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1)y^*(t_2)f_x(x)f_y(y)\,dx\,dy=E[x(t_1)]E[y^*(t_2)]=\eta_x(t_1)\eta_y^*(t_2)\Rightarrow C_{xy}=0$$

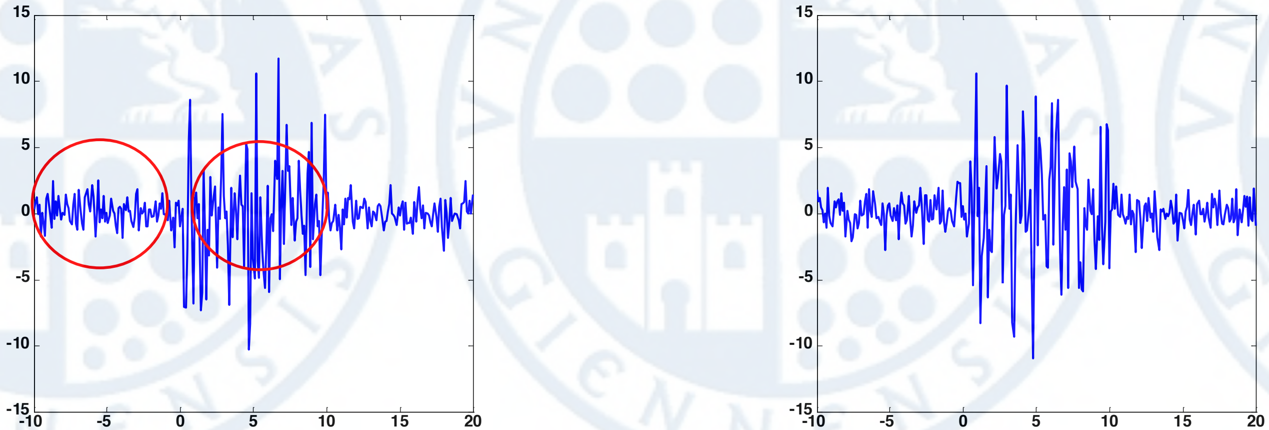
- si $x(t)$, $y(t)$ son incorrelados con $\eta_x = 0$ ó $\eta_y = 0$ ➔ $x(t)$, $y(t)$ son ortogonales
- si $x(t)$, $y(t)$ son incorrelados y conjuntamente normales ➔ $x(t)$, $y(t)$ son independientes.

Procesos estacionarios y ergódicos (I)

• Un proceso estocástico es **estacionario** si sus estadísticos probabilísticos son invariantes con el tiempo, es decir, no se ven afectadas por traslaciones en el tiempo.



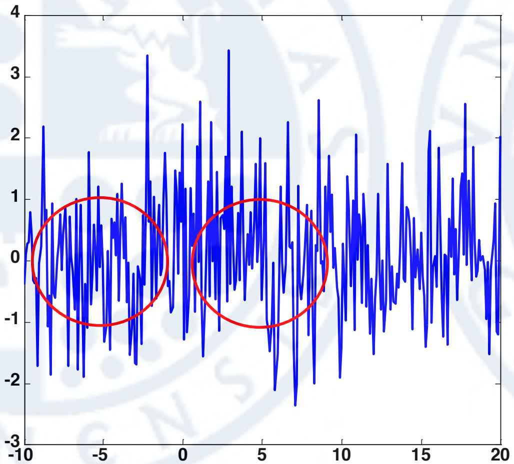
Dos realizaciones de un mismo proceso ***no estacionario*** *(la media varía con el tiempo)*

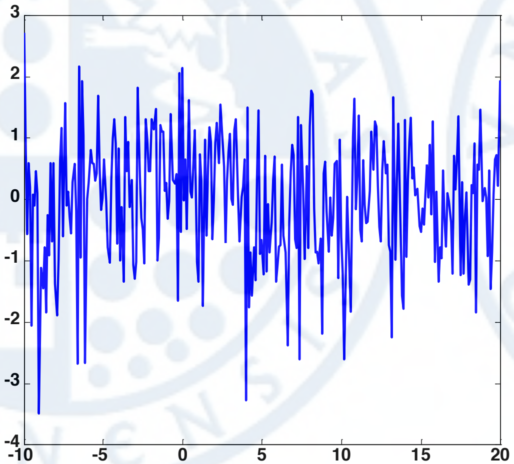


Ejemplo de proceso no estacionario: voz humana

Dos realizaciones de un mismo proceso ***no estacionario*** *(el valor cuadrático medio varía con el tiempo)*

Procesos estacionarios y ergódicos (II)





Ejemplo de proceso estacionario: ruido blanco

Dos realizaciones de un mismo proceso ***estacionario*** *(sus estadísticos son invariantes temporalmente)*

- Un proceso estocástico **estacionario en sentido estricto (Strict Sense Stationary, SSS)** es aquel proceso en el que **todos** sus estadísticos no varían con el tiempo (*x(t)* y *x(t+ε)* tiene los mismos estadísticos). Este hecho se reflejará obviamente en la función densidad de probabilidad, de manera que un proceso es estrictamente estacionario si y sólo si:

$$f_{x(t_1)x(t_2),\ldots x(t_n)}\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)=f_{x(t_1+\varepsilon)x(t_2+\varepsilon),\ldots x(t_n+\varepsilon)}\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)\quad\forall\varepsilon$$

- Dos procesos *x(t)* e *y(t)* son **conjuntamente estacionarios** si sus estadísticos conjuntos son idénticos que los de *x(t+ε)* e *y(t+ε)*

- El **proceso complejo** *z(t)=x(t)+jy(t)* es estacionario si *x(t)* e *y(t)* son conjuntamente estacionarios

Procesos estacionarios y ergódicos (III)

- **Estacionariedad en la media** $\eta_x(t)$: un proceso estocástico *x(t)* se dice estacionario en la media si todas la variables aleatorias que lo componen tiene la misma media estadística, es decir, si la media $\eta_x(t)$ de conjunto no es función del tiempo.

$$\eta_x(t) = E[x(t)] = \eta_x$$

Una señal *x(t)* estacionaria en la media significa que la media probabilística $\eta_x(t) = \eta_x$ se puede obtener promediando las medias temporales de las realizaciones,

$$E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t,\xi_i)\,dt\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E\left[x(t,\xi_i)\right]dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \eta_x\,dt = \eta_x$$

La estacionariedad en la media se produce para todos los procesos estacionarios con estacionariedad de orden $n \geq 1$

Procesos estacionarios y ergódicos (IV)

- **Estacionariedad en la autocorrelación** $R_x(t_1,t_2)$: un proceso estocástico *x(t)* estacionario en la autocorrelación implica que la autocorrelación probabilística no depende de t_1 y t_2 sino de la diferencia $\tau = t_1 - t_2$

$$R_x(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)\cdot x^*(t_2)\right] = E\left[x(t+\tau)\cdot x^*(t)\right] = E\left[x(t)\cdot x^*(t-\tau)\right] = R_x(\tau)$$

Propiedades de la autocorrelación $\boldsymbol{R_x(\tau)}$ **en señales estacionarias:**

- $R_x(0) = P_x = E\left[x(t)\cdot x^*(t)\right] = E\left[\left|x(t)\right|^2\right] \geq 0$
- Simetría hermítica: $R_x{}^*(\tau) = R_x(-\tau)$

  si *x(t)* es real → $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ (real y par)
- $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|, \forall\tau$
- Suponiendo *x(t)* real,

$$\boxed{E\left[\left(x(t+\tau)\pm x(t)\right)^2\right] = 2\left(R_x(0)\pm R_x(\tau)\right) = 2\left(P_x \pm R_x(\tau)\right)}$$

Tarea del alumno: Demostración

- Considerando la suma de dos procesos *z(t)=x(t)+y(t)*

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$$

pero si x(t) e y(t) son ortogonales: $R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$

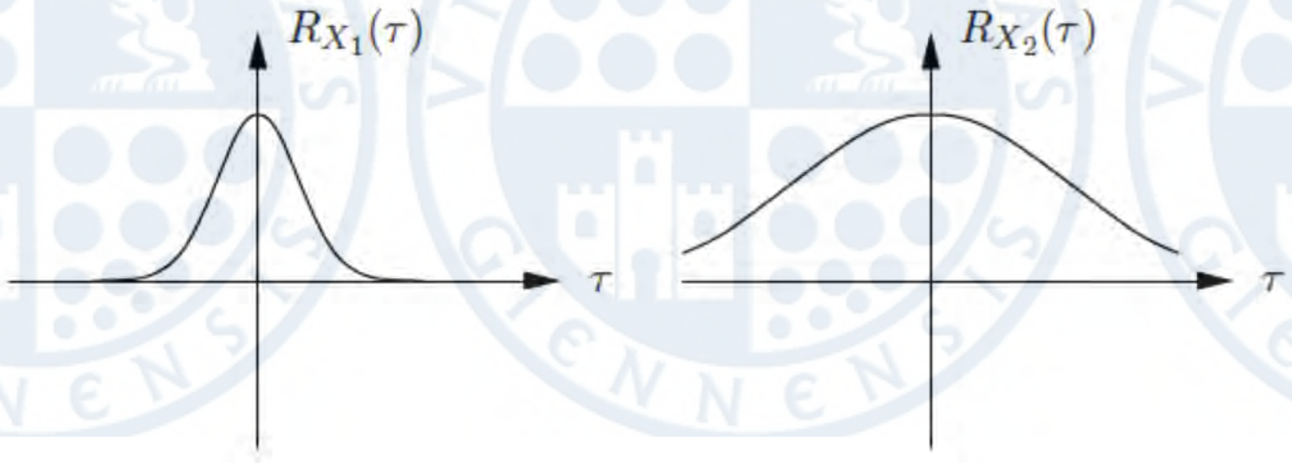
Procesos estacionarios y ergódicos (V)

si el proceso $x(t)$ es estacionario en la autocorrelación $R_x(t_1,t_2)=E[x(t_1)x^*(t_2)]=R_x(\tau)$, la autocorrelación probabilística o de conjunto $E[x(t_1)x^*(t_2)]$ se puede calcular promediando las autocorrelaciones temporales de las realizaciones $x(t,\xi_i)$

$$E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau,\xi_i)\cdot x^*(t,\xi_i)\,dt\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E\left[x(t+\tau,\xi_i)\cdot x^*(t,\xi_i)\right]dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_x(\tau)\,dt=R_x(\tau)$$

La estacionariedad en la autocorrelación se produce para todos los procesos estacionarios con estacionariedad de orden $n\geq 2$



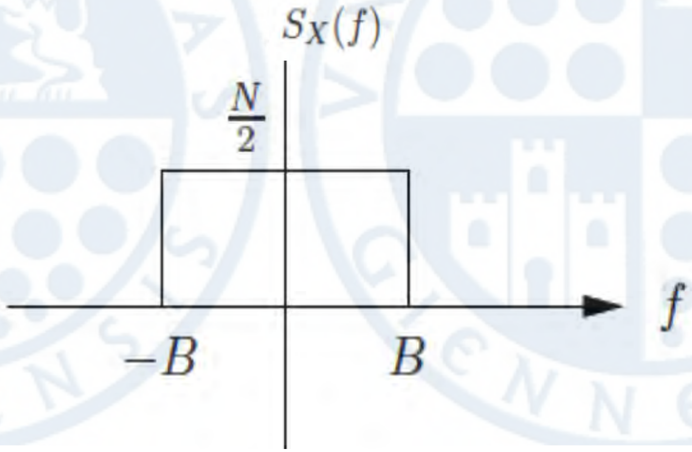
Las muestras del proceso $x_2(t)$ presentan mayor correlación (redundancia) comparadas con el proceso $x_1(t)$. Informa acerca de la velocidad de cambio de los procesos respecto del tiempo

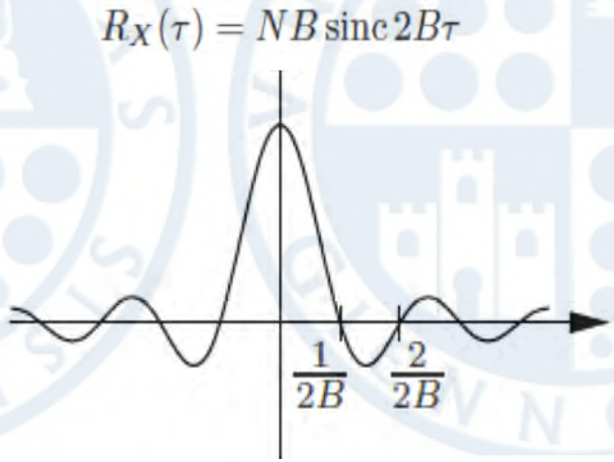
Procesos estacionarios y ergódicos (VI)

- **Estacionariedad en sentido relajado (Wide Sense Stationary, WSS):** un proceso estocástico *x(t)* se dice estacionario en sentido amplio, relajado, en sentido laxo o débilmente estacionario si es estacionario en la media y en la autocorrelación:
  - $\eta_x(t) = E[x(t)] = \eta_x$
  - $R_x(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x^*(t_2)\right] = E\left[x(t+\tau)x^*(t)\right] = R_x(t_1-t_2) = R_x(\tau)$

IMPORTANTE: a partir de este punto y a lo largo de la asignatura, cuando se hable de señales estacionarias, y salvo que se indique lo contrario, se refiere a estacionariedad débil

Ejercicio: a partir de $S_x(f)$, verifique que el proceso WSS *x(t) con* $\eta_x = 0$ es incorrelado si $\tau = \frac{k}{2B}, k \in \mathrm{Z}$





Procesos estacionarios y ergódicos (VII)

- **Dos procesos *x(t), y(t)* son conjuntamente estacionarios en sentido relajado** si cada uno de ellos es estacionario en sentido relajado y además su correlación cruzada $R_{xy}(t_1,t_2)$ depende sólo de la diferencia de tiempos $\tau = t_1 - t_2$

$$E[x(t)] = cte = \eta_x \qquad R_x(t_1,t_2) = R_x(\tau)$$

$$E[y(t)] = cte = \eta_y \qquad R_y(t_1,t_2) = R_y(\tau)$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)\,y^*(t_2)\right] = E\left[x(t+\tau)\,y^*(t)\right] = R_{xy}(t_1-t_2) = R_{xy}(\tau)$$

Propiedades:

- $x(t), y(t)$ conjuntamente estacionarios (en sentido relajado),

  la autocorrelación del proceso suma $z(t) = x(t) + y(t)$ es:

  $$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$$

- Si los procesos *x(t), y(t)* son **ortogonales**, entonces la correlación $R_z(\tau)$ del proceso suma,

  $$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$$

- **Si los procesos *x(t), y(t)* son independientes,** entonces la autocorrelación $R_w(\tau)$ del proceso producto $w(t) = x(t)\cdot y(t)$ se puede expresar mediante,

  $$R_w(\tau) = E[x(t+\tau)y(t+\tau)x^*(t)y^*(t)] = E[x(t+\tau)x(t)]E[y(t+\tau)y^*(t)] = R_x(\tau)\cdot R_y(\tau)$$

Procesos estacionarios y ergódicos (VIII)

- Un proceso *x(t)* es **cicloestacionario** si sus estadísticos dependen del tiempo pero de manera **periódica**.

Un proceso *x(t)* se llama cicloestacionario si la **media** y la **autocorrelación** son **periódicos** en *t,* con algún periodo T_0 ,

- $E\left[x(t)\right]=\eta_x(t)=E\left[x(t+T_0)\right]=\eta_x(t+T_0) \quad \forall t$
- $R_x(t+\tau,t)=E\left[x(t+\tau)\cdot x^*(t)\right]=R_x(t+T_0+\tau,t+T_0) \quad \forall t,\forall\tau$

por ejemplo: $x(t)=K\cdot\cos(\omega_0 t+\theta), \quad K\in v.a \quad \omega_0,\theta:Cte$

Procesos estacionarios y ergódicos (IX)

- **Ergodicidad en la media:** un proceso *x(t)* se dice ergódico en la media, si la media temporal $\overline{x(t,\xi_i)}$ de cualquier realización *i* coincide con la media de conjunto η_x

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t,\xi_i)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t)\,dt = E\left[x(t,\xi)\right] \quad \forall i$$

  , así, para calcular η_x de un proceso *x(t)* ergódico es suficiente con determinar la media temporal $\overline{x(t,\xi_i)}$ de una única realización $x(t,\xi_i)$ del proceso.

- **Ergodicidad en la autocorrelación:** un proceso *x(t)* se dice ergódico en la autocorrelación si la autocorrelación temporal de cualquier realización coincide con la autocorrelación de conjunto.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau,\xi_i)\cdot x^*(t,\xi_i)\,dt = E\left[x(t+\tau,\xi)\cdot x^*(t,\xi)\right] \quad \forall i$$

  , así, para calcular $R_x(\tau)$ de un proceso *x(t)* ergódico es suficiente con determinar la correlación temporal de una única realización $x(t,\xi_i)$ del proceso.

Resumiendo: en un proceso *x(t)* ergódico, se cumple que los promedios temporales de cualquier realización *i* coinciden con los promedios probabilísticos del proceso.

Procesos estacionarios y ergódicos (X)

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

PROCESOS ESTACIONARIOS

$$R_x(t+\tau, t) = R_x(\tau)$$

$$E\left[x(t)\right] = Cte$$

PROCESOS ERGÓDICOS

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t+\tau)\cdot x_i^*(t)\,dt = E\left[x(t+\tau)\cdot x^*(t)\right]$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t)\,dt = E\left[x(t)\right]$$

Correlación y espectro de potencia de procesos estacionarios (I)

Considerando un **proceso *x(t)* complejo y estacionario**,

- La autocorrelación $R_x(\tau)$,

$$R_x(\tau) = E[x(t+\tau) \cdot x^*(t)]$$

- La autocovarianza $C_x(\tau)$,

$$C_x(\tau) = E\left[\left(x(t+\tau) - \eta_x\right) \cdot \left(x^*(t) - \eta_x^*\right)\right] = R_x(\tau) - \left|\eta_x\right|^2$$

Considerando dos **procesos *x(t), y(t)* complejos y conjuntamente estacionarios**,

- La correlación cruzada $R_{xy}(\tau)$,

$$R_{xy}(\tau) = E\left[x(t+\tau)\, y^*(t)\right]$$

- La covarianza cruzada $C_{xy}(\tau)$,

$$C_{xy}(\tau) = E\left[\left(x(t+\tau) - \eta_x\right) \cdot \left(y^*(t) - \eta_y^*\right)\right] = R_{xy}(\tau) - \eta_x \cdot \eta_y^*$$

Correlación y espectro de potencia de procesos estacionarios (II)

- El teorema de Wiener-Khintchine relaciona la densidad espectral de potencia $G_x(f)$ del **proceso** ***x(t)*** **estacionario** y su función de autocorrelación $R_x(\tau)$

$$G_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_x(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) e^{j\omega\tau} df$$

- El teorema de Wiener-Khintchine para **procesos** ***x(t)*** **cicloestacionarios,**

$$G_x(f) = \mathcal{F}[\tilde{R}_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{R}_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\tilde{R}_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_x(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) e^{j\omega\tau} df$$

siendo $\tilde{R}_x\left(t+\tau, t\right) = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_{T_0} R_x\left(t+\tau, t\right) dt$

con T_0 el periodo de la autocorrelación $R_x(t+\tau, t)$ del proceso cicloestacionario

Correlación y espectro de potencia de procesos estacionarios (III)

Propiedades de $R_x(\tau)$ y $G_x(f)$ de una señal $x(t)$ estacionaria

1. Simetría hermítica:

   $R^*{}_x(\tau) = Rx(-\tau) \rightarrow x(t)\ real \ \Rightarrow R_x(\tau)\ real\ y\ par \ \Rightarrow R_x(\tau) = Rx(-\tau)$
   $R_{xy}(\tau) = R^*{}_{yx}(-\tau) \rightarrow x(t), y(t)\ reales \ \Rightarrow R_{xy}(\tau), R_{yx}(\tau)\ par \ \Rightarrow R_{yx}(-\tau) = Rxy(\tau)$

2. $z(t) = x(t) + y(t) \ \Rightarrow R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$
   $x(t) \perp y(t) \Rightarrow R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$

3. $w(t) = x(t)\,y(t) \Rightarrow x(t), y(t)\, indep \Rightarrow R_w(\tau) = R_x(\tau) \cdot R_y(\tau)$

4. $P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df = E\left[\left|x(t)\right|^2\right] \geq \left|R_x(\tau)\right| \geq 0$

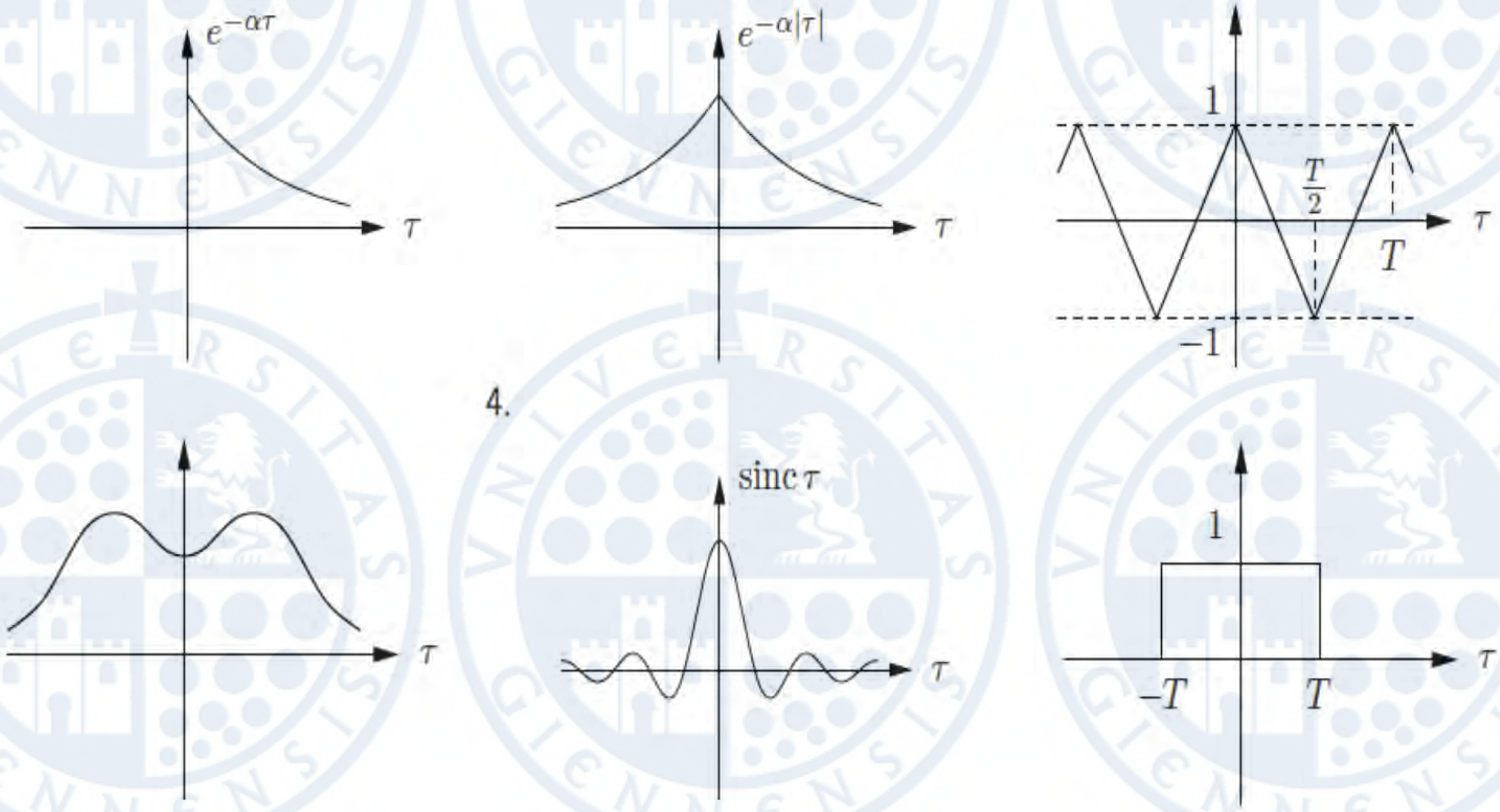
5. $P_{x_{f1-f2}} = \int_{-f_2}^{-f_1} G_x(f)df + \int_{f_1}^{f_2} G_x(f)dx$

6. $G_x(f)$ siempre es real con $G_x(f) \geq 0$, independientemente de $x(t)$

7. $x(t)\ real \ \Rightarrow G_x(f)\ es\ par \Rightarrow G_x(f) = G_x(-f) \Rightarrow \ P_{x_{f1-f2}} = 2\int_{f_1}^{f_2} G_x(f)df$

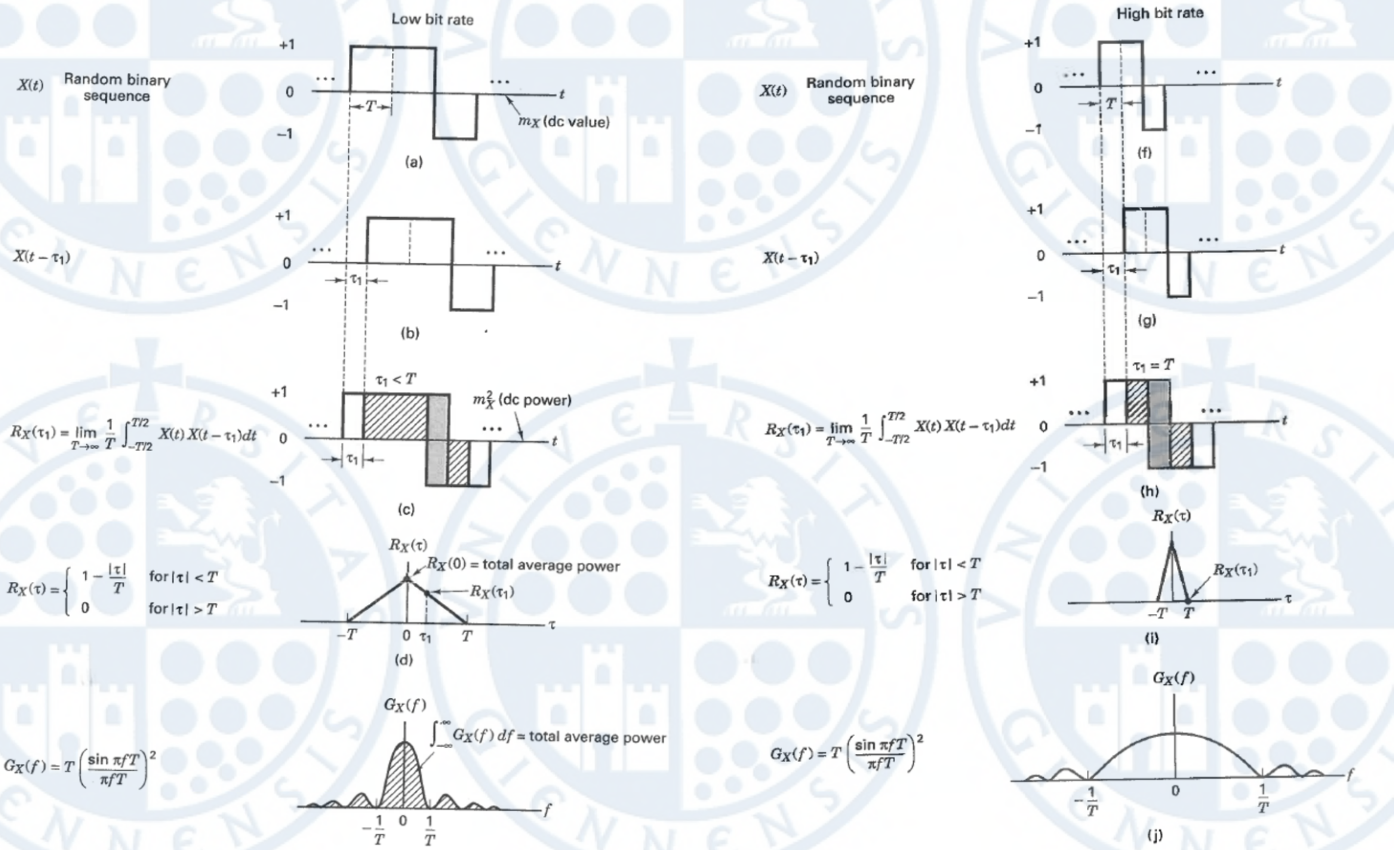
Correlación y espectro de potencia de procesos estacionarios (IV)

Ejemplo: ¿Qué funciones pueden ser $R_x(\tau)$ válidas de un proceso $x(t)$ estacionario?



Correlación y espectro de potencia de procesos estacionarios (V)

Propiedades de $R_x(\tau)$ y $G_x(f)$ de un proceso $x(t)$ estacionario



Correlación y espectro de potencia de procesos estacionarios (VI)

• El **espectro cruzado** $\boldsymbol{G_{xy}(f)}$ de **potencia** de dos señales *x(t), y(t)* conjuntamente estacionarias,

$$G_{xy}(f) = \mathcal{F}[R_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

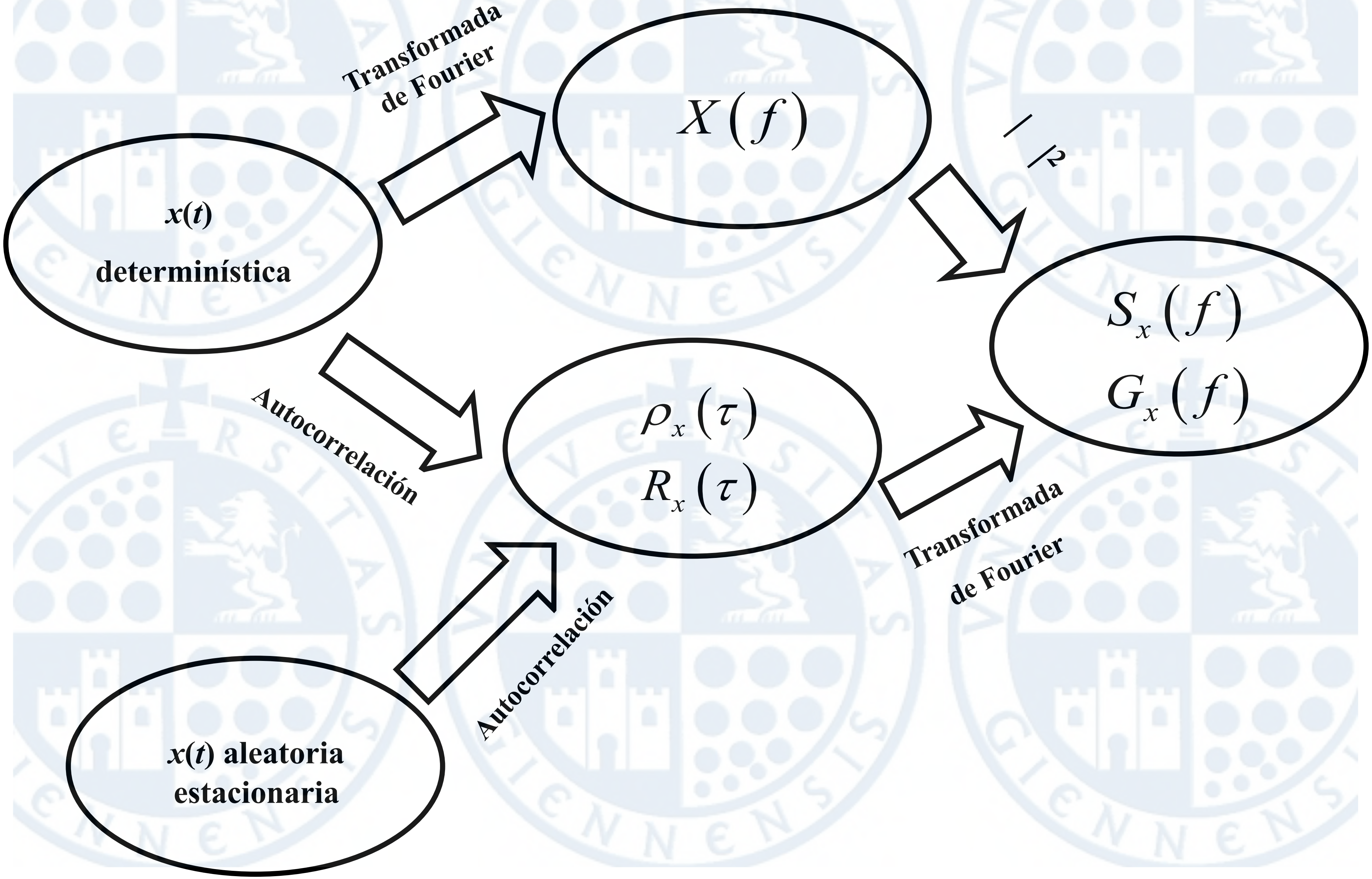
$$R_{xy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_{xy}(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xy}(f) e^{j\omega\tau} df$$

Propiedades de la densidad espectral cruzada $\boldsymbol{G_{xy}(f)}$ de potencia:

1. $R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xy}(f) df = E\left[x(t) \cdot y^*(t)\right]$

2. Si los procesos $x(t)$ e $y(t)$ son **ortogonales,**
   1. $R_{xy}(\tau) = 0 \Rightarrow G_{xy}(f) = 0$
   2. $R_{x+y}(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \Rightarrow G_{x+y}(f) = G_x(f) + G_y(f)$

Correlación y espectro de potencia de procesos estacionarios (VII)



Correlación y espectro de potencia de procesos estacionarios (VIII)

Funciones $R_x(\tau)$ y $G_x(f)$ de procesos relacionados con $x(t)$ estacionario

$x(t)$	$R_x(\tau)$	$G_x(f)$
$ax(t)$	$\|a\|^2 R_x(\tau)$	$\|a\|^2 G_x(f)$
$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$-\dfrac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2}$	$\omega^2\, G_x(f)$
$\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(-1)^n \dfrac{d^{2n} R_x(\tau)}{d\tau^{2n}}$	$\omega^{2n} G_x(f)$
$x(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$R_x(\tau)e^{\pm j\omega_0 \tau}$	$G_x(f \mp f_0)$

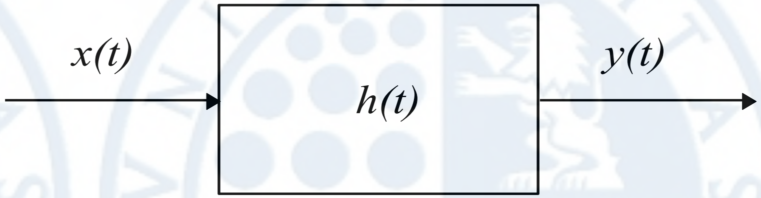
Respuesta de un sistema LTI a un proceso estacionario (I)

• El comportamiento de un **sistema LTI** queda completamente caracterizado por su **respuesta al impulso** $h(t)$ o su **respuesta en frecuencia** $H(f)$, que como sabemos se encuentran relacionadas mediante la transformada de Fourier:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j\omega t} df$$

• La respuesta de un sistema LTI ante una determinada excitación, sabemos que se expresa como la **convolución** de dicha excitación con la respuesta impulsiva del sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$



• En los sistemas con **existencia física** la respuesta al impulso *h(t)* será **real** y además se espera **causalidad** en el sistema,

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Respuesta de un sistema LTI a un proceso estacionario (II)

• Un proceso estocástico queda completamente caracterizado por la función de densidad de probabilidad o la función de distribución conjunta de las infinitas variables aleatorias que lo componen.

• Suponiendo que se dispone de la información acerca de la excitación de un sistema LTI, determinar la función de densidad de probabilidad o la función de distribución del proceso de salida $y(t)$ a la salida del sistema LTI no resulta fácil.

• En determinados casos es muy sencillo conocer el tipo de distribución estadística existente a la salida de un sistema LTI:

1. Si el proceso $x(t)$ estocástico a la entrada es normal, la salida $y(t)$ también será normal.
2. Si el proceso $x(t)$ estocástico a la entrada es blanco y sus variables aleatorias que lo componen son independientes, la salida $y(t)$ será normal.

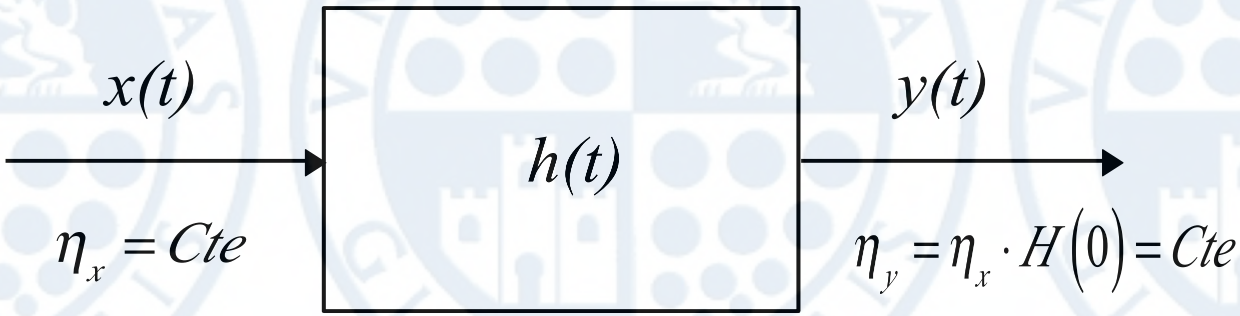
Respuesta de un sistema LTI a un proceso estacionario (III)

- **Media del proceso de salida *y(t)***

Cuando la excitación *x(t)* de un sistema LTI es estacionaria en la media $\eta_x(t) = \eta_x$, entonces la salida *y(t)* del sistema será también estacionaria en la media $\eta_y = \eta_x \cdot H(0)$, es decir, igual a la media a la entrada η_x multiplicada por la respuesta del sistema en continua, es decir, $H(0)$

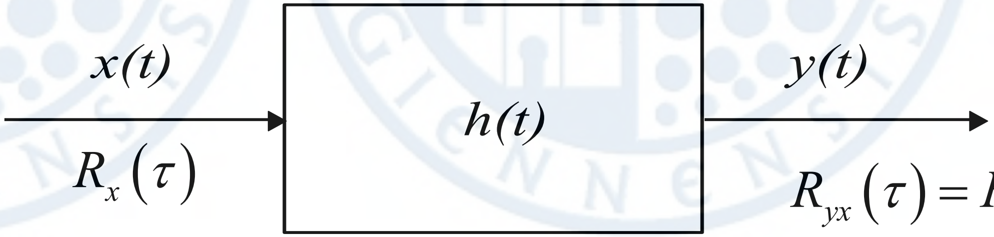
$$E[y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t-\tau)]h(\tau)\,d\tau$$

$$\eta_y = \eta_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,d\tau = \eta_x \left\langle h\left(t\right)\right\rangle = \eta_x \cdot H\left(0\right)$$



Respuesta de un sistema LTI a un proceso estacionario (IV)

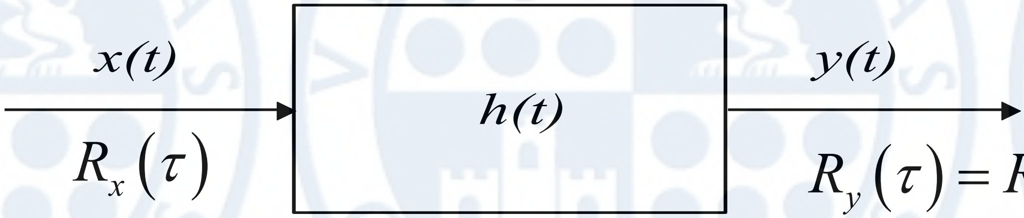
- **Correlación cruzada $R_{yx}(\tau)$ de la salida $y(t)$ respecto a la entrada $x(t)$ estacionaria**



$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h^*(-\tau)$$

- **Autocorrelación de salida $R_y(\tau)$:** si la entrada *x(t)* es un proceso estacionario en la autocorrelación, la salida *y(t)* también lo es



$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * \rho_h(\tau)$$

resumiendo, si la entrada *x(t)* es estacionaria en sentido relajado, entonces la salida *y(t)* de un sistema LTI será estacionaria en sentido relajado.

Respuesta de un sistema LTI a un proceso estacionario (V)

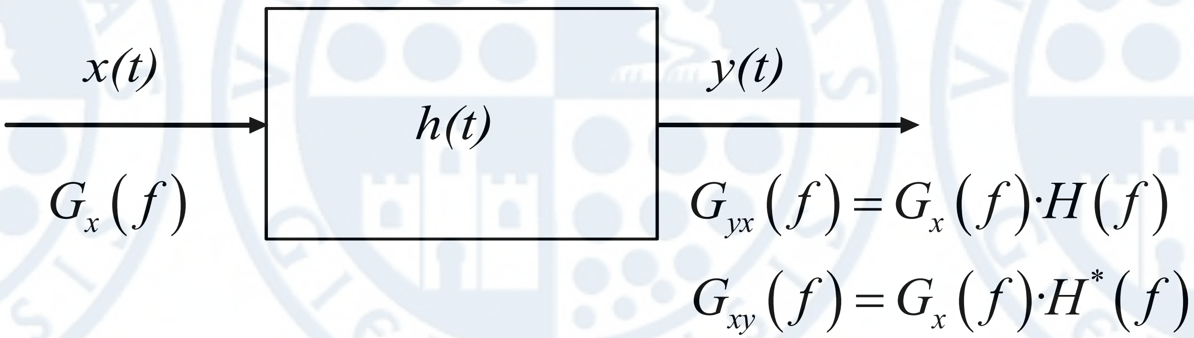
- **Espectro de potencia cruzada $G_{xy}(f)$ a la salida del sistema LTI ante un proceso $x(t)$ estacionario**

$$G_{yx}(f)=\mathcal{F}\left\{E\left[y(t+\tau)x^*(t)\right]\right\}=\mathcal{F}\left\{R_x(\tau)*h(\tau)\right\}=G_x(f)\cdot H(f)$$

$$G_{yx}(f)=G_x(f)\cdot H(f)$$

$$G_{xy}(f)=\mathcal{F}\left\{E\left[x(t+\tau)y^*(t)\right]\right\}=\mathcal{F}\left\{R_x(\tau)*h^*(-\tau)\right\}=G_x(f)\cdot H^*(f)$$

$$G_{xy}(f)=G_x(f)\cdot H^*(f)$$



Respuesta de un sistema LTI a un proceso estacionario (VII)

- **Espectro de potencia $G_y(f)$ a la salida del sistema LTI ante un proceso $x(t)$ estacionario**

$$G_y(f) = \mathcal{F}\left\{E\left[y(t+\tau)\,y^*(t)\right]\right\} = \mathcal{F}\left\{R_x(\tau) * \rho_h(\tau)\right\} = G_x(f)\cdot\left|H(f)\right|^2$$

$$G_y(f) = G_x(f)\cdot\left|H(f)\right|^2$$