

FECHA DE ENTREGA: **Miércoles, 10 de Abril**

1. Enunciar la **desigualdad de Markov** para una variable aleatoria X no negativa, y demostrarla para el caso en el que X es **discreta**.

(Examen de Mayo de 2018)

Solución: La desigualdad de Markov establece que si X una variable aleatoria X no negativa con esperanza finita ($E(X) < \infty$), entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ se verifica

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X)}{\epsilon}.$$

Demostración para el caso discreto: Llamemos μ al valor esperado de la variable no negativa X , es decir,

$$\mu = E(X),$$

que evidentemente verifica

$$0 \leq \mu < \infty.$$

La esperanza de la variable discreta X responde a la fórmula

$$\mu = E(X) = \sum_{k \in S_X} k \cdot P(X = k),$$

que puede descomponerse en dos sumandos

$$\mu = \sum_{\{k \in S_X: k < \epsilon\}} k \cdot P(X = k) + \sum_{\{k \in S_X: k \geq \epsilon\}} k \cdot P(X = k).$$

Puesto que, por ser $X \geq 0$,

$$\sum_{\{k \in S_X: k < \epsilon\}} k \cdot P(X = k) \geq 0$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mu &\geq \sum_{\{k \in S_X: k \geq \epsilon\}} k \cdot P(X = k) \\ &\geq \sum_{\{k \in S_X: k \geq \epsilon\}} \epsilon \cdot P(X = k) \\ &= \epsilon \sum_{\{k \in S_X: k \geq \epsilon\}} P(X = k) \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. A día de hoy, y tras los incendios desatados en los últimos días, el consumo diario de agua de los habitantes de Pedrógao Grande (Portugal) es una variable aleatoria A con distribución normal de media 4 litros y varianza 9 litros².

Determinar la media y la mediana de A , y calcular los cuantiles $\varphi_{0.242}(A)$ y $\varphi_{0.998}(A)$.

(Examen de Junio de 2017)

Solución: La función de densidad de la distribución normal con respecto a μ y por tanto su media y su mediana (o segundo cuartil) coinciden:

$$E(A) = q_2(A) = 4 \text{ litros.}$$

El cuantil $\varphi_{0.242} = \varphi_{0.242}(A)$ es el valor que verifica

$$F_A(\varphi_{0.242}) = P(A \leq \varphi_{0.242}) = 0.242,$$

y por tanto

$$P\left(\frac{A-4}{3} < \frac{\varphi_{0.242}-4}{3}\right) = P\left(Z < \frac{\varphi_{0.242}-4}{3}\right) = 0.242,$$

donde Z denota la distribución normal estándar, $Z \sim N(0, 1)$. En la tabla de la normal observamos que

$$P(Z \leq 0.7) = 0.758,$$

luego

$$P(Z \geq 0.7) = 0.242,$$

y por la simetría de Z ,

$$P(Z \leq -0.7) = 0.242,$$

De aquí se deduce que

$$\frac{\varphi_{0.242}-4}{3} = -0.7,$$

y despejando obtenemos que

$$\varphi_{0.242}(A) = 4 - 0.7 \cdot 3 = \mathbf{1.9} \text{ litros.}$$

Del mismo modo se deduce que

$$\varphi_{0.998}(A) = 4 + 2.88 \cdot 3 = \mathbf{12.64} \text{ litros.}$$

3. Demostrar que si X una variable aleatoria continua con función de densidad f_X , y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función que verifica $g'(x) > 0$ para todo $x \in S_X$, entonces, la variable aleatoria

$$Y = g(X)$$

tiene función de densidad dada por

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

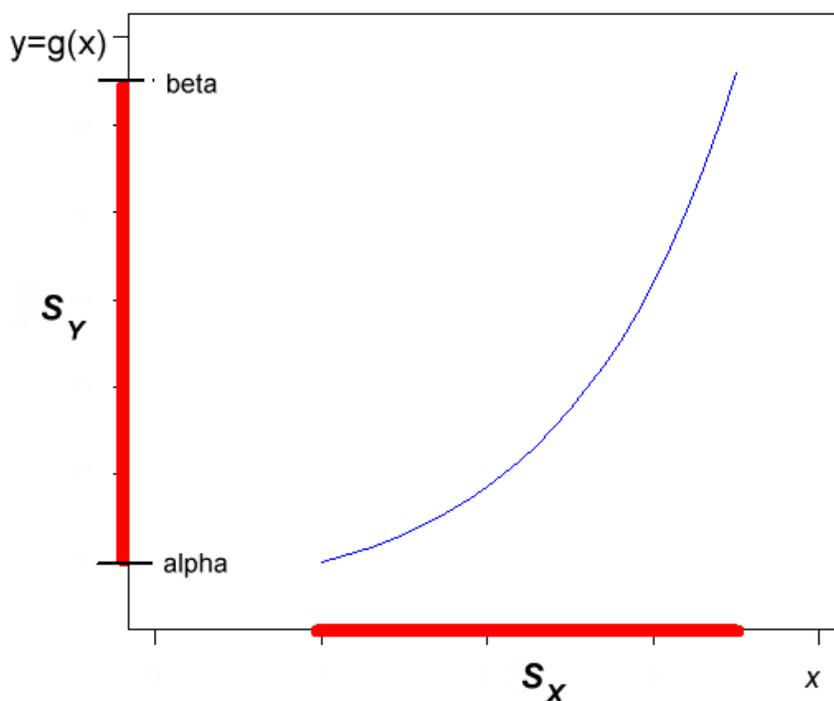
Solución: Consideremos una variable aleatoria continua X , con función de densidad f_X , y sea F_X su función de distribución, que viene dada por

$$F_X(z) = P[X \leq z] = \int_{-\infty}^z f_X(x) dx.$$

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una función que verifica $g'(x) > 0$ para todo $x \in S_X$.

Esto supone que g es **estrictamente creciente** en el soporte de X , S_X , y por tanto es una función biyectiva (y por tanto **invertible**) en este rango de valores, es decir, para $t \in S_Y = g(S_X)$.

De forma esquemática, y sin pérdida de generalidad, podría representarse $g(X)$ como



Para conocer la distribución de probabilidades de la variable aleatoria $Y = g(X)$ comenzaremos por buscar su función de distribución (F_Y) y a partir de ésta determinaremos su función de densidad (f_Y).

Sean

$$\alpha = \min\{g(z) : z \in S_X\},$$

$$\beta = \max\{g(z) : z \in S_X\}.$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Llamemos

$$h(t) = g^{-1}(t).$$

Nótese que $h(t)$ es una función estrictamente creciente en (α, β) , y por tanto su derivada verifica

$$h'(t) \geq 0 \quad \text{para todo } t \in (\alpha, \beta).$$

Con esta notación se tiene que

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[g(X) \leq t] = P[X \leq g^{-1}(t)] = P[X \leq h(t)] = P[X \leq h(t)] = F_X(h(t)).$$

Juntando sus tres tramos se deduce que la expresión completa para la función de distribución de la variable transformada Y , F_Y , es

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \alpha, \\ F_X(h(t)) & \text{si } t \in (\alpha, \beta), \\ 1 & \text{si } t \geq \beta. \end{cases}$$

Derivando esta expresión se obtiene que la función de densidad de Y para $t \in (\alpha, \beta)$ es:

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = F'_X(h(t)) = f_X(h(t)) h'(t).$$

Puesto que

$$h'(t) \geq 0 \quad \text{para todo } t,$$

se tiene que

$$|h'(t)| = h'(t),$$

por lo que f_Y puede expresarse como

$$f_Y(t) = \begin{cases} f_X(h(t)) \cdot |h'(t)| & \text{si } t \in (\alpha, \beta), \\ 0 & \text{si } t \notin (\alpha, \beta), \end{cases}$$

c.q.d.

Observación: En determinados casos puede ocurrir que $\alpha = -\infty$ y/o $\beta = \infty$, lo cual no hace perder generalidad a la demostración.

4. El soporte de la variable aleatoria H es

$$S_H = \{-3, -1, 1, 3\},$$

y su función de masa de probabilidad viene dada por la expresión

$$f_H(x) = c x^2 \quad \text{para } x \in S_H$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Solución:

(a) Para que f_H sea una función de masa debe verificarse

$$\sum_{x \in S_H} f_H(x) = (-3)^2 c + (-1)^2 c + 1^2 c + 3^2 c = 20 \times c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{20}}$$

Por tanto, expresado de forma abreviada, el soporte S_H y la función de masa de f_H son

$$H \equiv \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$$

o, lo que es lo mismo,

$$H \equiv \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0.45 & 0.05 & 0.05 & 0.45 \end{pmatrix}$$

(b) Por tratarse de una variable aleatoria discreta, cada cuantil de orden p es el menor valor en el que la variable H acumula una probabilidad mayor o igual que p :

$$\varphi_p(H) = F_H^{-1}(p) = \inf\{u \in \mathbb{R} : F_H(u) \geq p\}$$

La función de distribución de H es,

$$F_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3, \\ 0.45 & \text{si } -3 \leq x < -1, \\ 0.5 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 0.55 & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} q_1(H) &= \varphi_{0.25}(H) = -3 \\ q_2(H) &= \varphi_{0.50}(H) = -1 \\ q_3(H) &= \varphi_{0.75}(H) = 3 \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$P(-3 < X < 3) \geq 0.5$$

Solución: La **desigualdad de Chebyshev** implica que si X es una variable aleatoria con esperanza μ y varianza $\sigma^2 < \infty$, entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ se verifica

$$P(|X - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

En nuestro caso, esto conlleva que

$$P(75 < X < 85) = P(75 - 80 < X - 80 < 85 - 80) = P(-5 < X - \mu < 5) = P(|X - \mu| < 5) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{25}.$$

Queremos asegurar que se cumple

$$P(75 < X < 85) \geq 0.9,$$

y para ello debemos garantizar que ocurre

$$1 - \frac{\sigma^2}{25} \geq 0.9.$$

Despejando σ^2 de esta desigualdad, deducimos que esta varianza debe verificar

$$\sigma^2 \leq 2.5,$$

y en consecuencia la desviación típica tiene que cumplir

$$\sigma \leq \sqrt{2.5},$$

es decir,

$$\sigma \leq 1.5811$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a background of a light blue and orange gradient with a subtle shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70