

FECHA DE ENTREGA: **Miércoles, 6 de Marzo**

1. El número de pétalos de las margaritas (*Leucanthemum vulgare*) es una variable aleatoria, N , con la siguiente función de distribución:

$$F_N(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 14, \\ 0.1 & \text{si } 14 \leq t < 15, \\ 0.3 & \text{si } 15 \leq t < 16, \\ 0.7 & \text{si } 16 \leq t < 17, \\ 0.95 & \text{si } 17 \leq t < 18, \\ 1 & \text{si } t \geq 18. \end{cases}$$

- (a) Un enamorado ha seleccionado aleatoriamente una margarita y ha comenzado a arrancarle los pétalos de uno en uno mientras dice alternativamente: "me quiere", "no me quiere", "me quiere"... ¿Cuál es la probabilidad de que concluya que su amada no le corresponde?
- (b) Un botánico ha comentado que la margarita que está analizando tiene más de 15 pétalos. ¿Cuál es la probabilidad de que sean un número par?
- (c) ¿Cuál es el número medio de pétalos de las margaritas? ¿Y su varianza?
- (d) Amaia ha recogido un ramillete de 10 margaritas para regalárselas a su *aita*. ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad de ellas tengan un número par de pétalos y la otra mitad un número impar?
- (e) ¿Cuál es el número esperado de margaritas con 18 pétalos en el ramillete recogido por Amaia?
- (f) Martín y Leo quieren encontrar una margarita de 15 pétalos para su abuela, para lo cual salen al campo y van contando pétalos de margaritas que eligen al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que tengan que contar los pétalos de 4 margaritas hasta dar con la que buscan? ¿Y la probabilidad de que tengan que contar los pétalos de más de 6 margaritas?

(Examen Parcial de 2016)

Solución: N es una variable aleatoria discreta. Su soporte está formado por los puntos de discontinuidad de F_N , y es por tanto el conjunto



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

De forma abreviada podemos expresar S_N y f_N matricialmente:

$$N \equiv \begin{pmatrix} 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.25 & 0.05 \end{pmatrix}$$

- (a) Puesto que el enamorado comienza a deshojar la margarita diciendo "me quiere", la probabilidad de que concluya que su amada no le corresponde es la probabilidad de que la flor tenga un número par de pétalos:

$$P(N \text{ par}) = P(N = 14) + P(N = 16) + P(N = 18) = 0.1 + 0.4 + 0.05 = \boxed{0.55}$$

- (b) La probabilidad de que la margarita que está analizando el botánico tenga un número par de pétalos sabiendo que tiene más de 15 es

$$\begin{aligned} P(N \text{ par} | N > 15) &= \frac{P(\{N \text{ par}\} \cap \{N > 15\})}{P(N > 15)} \\ &= \frac{P(N = 16) + P(N = 18)}{P(N = 16) + P(N = 17) + P(N = 18)} \\ &= \frac{0.4 + 0.05}{0.4 + 0.25 + 0.05} \\ &= \frac{0.45}{0.7} \\ &= \boxed{0.6429} \end{aligned}$$

- (c) El número medio de pétalos de las margaritas es

$$E(N) = \sum_{k=14}^{18} k \times P(N = k) = 14 \times 0.1 + 15 \times 0.2 + 16 \times 0.4 + 17 \times 0.25 + 18 \times 0.05 = \boxed{15.95 \text{ pétalos}}$$

La varianza de N puede calcularse como

$$V(N) = E(N^2) - E^2(N)$$

Hemos visto en el apartado anterior que $E(N) = 15.95$. Por otra parte

$$E(N^2) = \sum_{k=14}^{18} k^2 \times P(N = k) = 14^2 \times 0.1 + 15^2 \times 0.2 + 16^2 \times 0.4 + 17^2 \times 0.25 + 18^2 \times 0.05 = 15.95 \text{ pétalos}^2$$

Luego

$$V(N) = E(N^2) - E^2(N) = 255.45 - 15.95^2 = \boxed{1.0475 \text{ pétalos}^2}$$

- (d) Llamemos P al número de margaritas recogidas por la niña que tienen un número par de pétalos. Para cada flor, la probabilidad de tener un número par de pétalos es

$$P(N \text{ par}) = 0.55$$

y la de tener un número impar

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

(e) Sea

D = número de margaritas del ramillete con 18 pétalos

Para cada margarita, la probabilidad de tener 18 pétalos es

$$P(N = 18) = 0.05$$

y la de no tener 18 pétalos es

$$P(N \neq 18) = 1 - 0.05 = 0.95$$

Además, el número de pétalos de cada margarita es independiente del de las otras. Por tanto, la distribución de la variable D es

$$D \sim \text{Bin}(n = 10, p = 0.05),$$

y en consecuencia, el número esperado de margaritas con 18 pétalos en el ramillete recogido por Amaia es

$$E(D) = 10 \times 0.05 = \boxed{0.5 \text{ margaritas}}.$$

(f) Consideremos ahora la variable aleatoria

L = número de margaritas examinadas hasta encontrar una con 15 pétalos

Cada vez que Leo y Martín seleccionan una margarita, la probabilidad de que tenga 15 pétalos es

$$P(L = 15) = 0.2,$$

y la de que no tenga 15 pétalos es

$$P(L \neq 15) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

Además, el número de pétalos de cada margarita es independiente del de las otras. Por tanto, la probabilidad de que tengan que contar los pétalos de 4 margaritas hasta dar con la que buscan es

$$P(L = 4) = 0.8^3 \cdot 0.2 = \boxed{0.1024}$$

y la probabilidad de que tengan que contar los pétalos de más de 6 margaritas es

$$P(L > 6) = 0.8^6 = \boxed{0.2621}$$

2. Sea X cualquier variable aleatoria discreta y sea σ_X^2 su varianza, definida como

$$\sigma_X^2 = E \left[(X - \mu_X)^2 \right],$$

donde μ_X es la esperanza de X .

(a) Demostrar que siempre se verifica $\sigma_X^2 > 0$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Solución: La probabilidad de que cada uno de los dos equipos resultantes tenga el mismo número de jubilados es la probabilidad de que cada equipo (de 10 personas) tenga 6 jubilados y 4 que no lo son.

Dicha probabilidad puede calcularse mediante la **Regla de Laplace**

$$P(\text{mismo número de jubilados en ambos grupos}) = \frac{\binom{12}{6} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{20}{10}} = \frac{64680}{184756} = \mathbf{0.35}$$

Observación: Esta probabilidad también puede calcularse utilizando la **regla de la multiplicación**.

4. Dado el espacio muestral $\Omega = \mathbb{R}$ definimos la sucesión de sucesos

$$V_n = \begin{cases} \left(-1, \frac{1}{n}\right], & \text{si } n \text{ impar,} \\ \left(-\frac{1}{n}, 1\right], & \text{si } n \text{ par.} \end{cases}$$

Razonar si en este caso se verifica que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} V_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} V_k$$

Solución: **Resuelto en clase.**

5. El rector de cierta (lejana) universidad ha plagiado el 45% de los artículos que ha publicado.

- Un equipo externo a dicha universidad acude a analizar el trabajo de este rector, y selecciona al azar 6 de sus publicaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los artículos seleccionados haya sido plagiado?
- ¿Cuántas de las publicaciones escogidas por el equipo externo se espera que hayan sido plagiadas?
- Se ha sabido que al menos uno de los 6 artículos seleccionados por el equipo externo fue copiado de otro autor. ¿Cuál es la probabilidad de el total de publicaciones plagiadas sea inferior a 4?
- A un becario se le encarga la tarea de seleccionar artículos de este rector hasta encontrar uno que no esté plagiado. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que seleccionar exactamente 5 publicaciones hasta terminar con su tarea? ¿Y la probabilidad de que tenga que analizar más de 8?

(Examen Final de Mayo de 2017)

Solución: Dado que el rector plagia el 45% de los artículos que publica, la probabilidad de que uno de estos trabajos sea copiado es 0.45, y la probabilidad de que sea original 0.55. Además, el hecho de que sea plagiado u original es independiente de un artículo a otro.

(a) El rector plagia el 45% de los artículos que publica, la probabilidad de que uno de estos trabajos sea copiado es 0.45, y la probabilidad de que sea original 0.55. Además, el hecho de que sea plagiado u original es independiente de un artículo a otro.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- (b) El número esperado de publicaciones escogidas por el equipo externo que han sido plagiadas es la esperanza de la variable P , que por ser binomial verifica

$$E(P) = n \times p = 6 \times 0.45 = \boxed{2.7 \text{ artículos}}$$

- (c) Si se sabe que al menos uno de los artículos fue plagiado, la probabilidad de que el total de plagios sea inferior a 4 es la probabilidad condicionada

$$P(P < 4 | P > 0)$$

que viene dada por

$$P(P < 4 | P > 0) = \frac{P[(P \geq 1) \cap (P \leq 4)]}{P(P > 0)} = \frac{P(P = 1) + P(P = 2) + P(P = 3)}{P(P > 0)}$$

Según hemos visto en el apartado (a), la probabilidad del denominador de esta fracción es

$$P(P > 0) = 0.9723$$

En cuanto al numerador, es

$$\begin{aligned} P(P = 1) + P(P = 2) + P(P = 3) &= \binom{6}{1} \times 0.45 \times 0.55^5 + \binom{6}{2} \times 0.45^2 \times 0.55^4 + \binom{6}{3} \times 0.45^3 \times 0.55^2 \\ &= 0.1359 + 0.2780 + 0.3032 \\ &= 0.7375 \end{aligned}$$

Luego la probabilidad de que el total de plagios sea inferior a 4 sabiendo que hubo al menos uno es

$$P(P < 4 | P > 0) = \frac{0.7375}{0.9723} = \boxed{0.7375}$$

- (d) Sea N la variable aleatoria que recoge el número de artículos seleccionados por el becario hasta encontrar uno que no esté plagiado.

La distribución de esta variable es

$$N \sim Ge(0.55),$$

y por tanto la probabilidad de que el becario tenga que seleccionar exactamente 5 publicaciones hasta terminar con su tarea es

$$P(N = 5) = 0.45^4 \times 0.55 = 0.0226,$$

y la probabilidad de que tenga que analizar más de 8

$$P(N > 8) = 0.45^8 = 0.0017.$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**