Prueba de Evaluación a Distancia. Curso 2016-17

- Se debe marcar una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0.3. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Las preguntas deben ser contestadas en el cuestionario virtual al que se accede a través del link "*CURSO 2016-17. Cuestionario: Prueba de evaluación a distancia online (disponible a partir del día 11 de enero de 2017)* ".
- Recuerde que dentro del examen virtual las respuestas deben ser marcadas en la pestaña correspondiente.
- El cuestionario virtual estara disponible los días 11, 12, 13, 14, 15 y 16 de enero.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\Diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \Diamond m = (n+m)^2 \end{array}$$

De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- Existe elemento neutro

(a) 1 $\quad(b)$ 2 $\quad(c)$ 3 $\quad(d)$ Ninguna de las anteriores

2. Señale el valor máximo absoluto de la función

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x$$

en el intervalo $I = [0, 2\pi]$.

(a) $\max_{x\in[0,2\pi]} f(x) = 0$ $\quad(b)$ $\max_{x\in[0,2\pi]} f(x) = 2$

(a) $P_3(2,1) = 35$ $\quad(b)$ $P_3(2,1) = 40$

(c) $P_3(2,1) = 30$ $\quad(d)$ Ninguna de las anteriores

4. Calcule la integral

$$I = \int_M dxdy$$

en donde M es el cuadrilátero resultado de unir los puntos $(1,-1)$, $(2,1)$, $(3,0)$ y $(4,3)$.

(a) $I = \dfrac{61}{6}$ $\quad$ (b) $I = \dfrac{54}{3}$ $\quad$ (c) $I = \dfrac{7}{2}$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, x_2 + x_3)$$

Señale, si existe, una base de $\mathbb{R}^3$ tal que su matriz asociada sea diagonal.

(a) $\{(1,0,0), (0,2,1), (0,0,1)\}$

(b) $\{(1,0,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$

(c) $\{(1,0,0), (0,1,1), (2,1,-2)\}$

(d) Ninguna de las anteriores

6. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$
$$f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

en donde

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2, \mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$$

son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Consideramos nuevas bases

$$\mathbf{A}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\} \subset \mathbb{R}^2,\ \mathbf{B}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\} \subset \mathbb{R}^3,$$

dadas respectivamente por

$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

Calcule la matriz asociada a la aplicación f con respecto de las bases $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Considere el espacio de las matrices $\mathbb{M}_2$ de orden 2 y la base

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Hallar los vectores de coordenadas de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con respecto de dicha base

(a) $(-1, 1, -1, -1)$ (b) $(1, -1, 1, -1)$

(c) $(-1, 1, 1, -1)$ (d) Ninguna de las anteriores

8. Sea la aplicacion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^4 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Señale el valor de la derivada parcial $D_1 f(0, 0)$

(a) $D_1 f(0, 0)$ no existe (b) $D_1 f(0, 0) = 0$

(c) $D_1 f(0, 0) = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale las ecuaciones implícitas del subespacio $G[\mathbf{S}]$ generado por el sistema

$$\mathbf{S} = \{(1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$$

(d) Ninguna de las anteriores

10. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable para la que se verifica

$$\begin{aligned} &g(-1,1) = 1 \\ &D_1 g(-1,1) = 3 \\ &D_2 g(-1,1) = 4 \end{aligned}$$

Dada las función

$$F(x,y) = \frac{x^2 + y}{e^{g(x,y)}}$$

calcule su matriz jacobiana $F'(-1,1)$

(a) $F'(-1,1) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $F'(-1,1) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $F'(-1,1) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -8 & -7 \end{pmatrix}$

(d) Ninguna de las anteriores

Soluciones.

1. **Solución. (a)**

- $\diamondsuit$ no es asociativa. Si tomamos $n = 1$, $m = 2$, $k = 3$ tenemos que

$$(n\diamondsuit m)\diamondsuit k = (1\diamondsuit 2)\diamondsuit 3 = (1+2)^2\diamondsuit 3 = 9\diamondsuit 3 = (9+3)^2 = 144$$
$$n\diamondsuit (m\diamondsuit k) = 1\diamondsuit (2\diamondsuit 3) = 1\diamondsuit (2+3)^2 = 1\diamondsuit 25 = (1+25)^2 = 676$$

- $\diamondsuit$ es conmutativa, ya que

$$n\diamondsuit m = (n+m)^2 = (m+n)^2 = m\diamondsuit n$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$

- No existe elemento neutro. Si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{N}$ necesariamente

$$4\diamondsuit e = (4+e)^2 = 4 \to 4+e = 2 \to e = -2 \notin \mathbb{N}$$

2. **Solución. (b)** La derivada

$$f'(x) = \operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} x = 0$$

se anula en los puntos $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_2 = 2\pi$. La derivada es positiva en el intervalo $[0, \pi]$ ya que

$$\text{signo } f'(x) = f'(\frac{\pi}{2}) = 2 > 0$$

para todo x en $[0, \pi)$. Mientras que en el intervalo $[\pi, 2\pi]$ es negativa, ya que

$$\text{signo } f'(x) = f'(\frac{3\pi}{2}) = -2 < 0$$

para todo x en $[\pi, 2\pi]$. Por tanto f es creciente en $[0, \pi]$ y decreciente en $[\pi, 2\pi]$, luego necesariamente $x_1 = \pi$ es un máximo global de f en $[0, 2\pi]$.

$$P_3(x,y) = f(1,-1) + D_1f(1,-1)(x-1) + D_2f(1,-1)(y+1)$$
$$\frac{1}{2!}\left(D_{11}f(1,-1)(x-1)^2 + 2D_{12}f(1,-1)(x-1)(y-1) + D_{22}f(1,-1)(y+1)^2\right)$$
$$\frac{1}{3!}\left(D_{111}f(1,-1)(x-1)^3 + 3D_{112}f(1,-1)(x-1)^2(y+1) + 3D_{122}f(1,-1)(x-1)(y+1)^2 + D_{222}f(1,-1)(y+1)^3\right)$$

Como

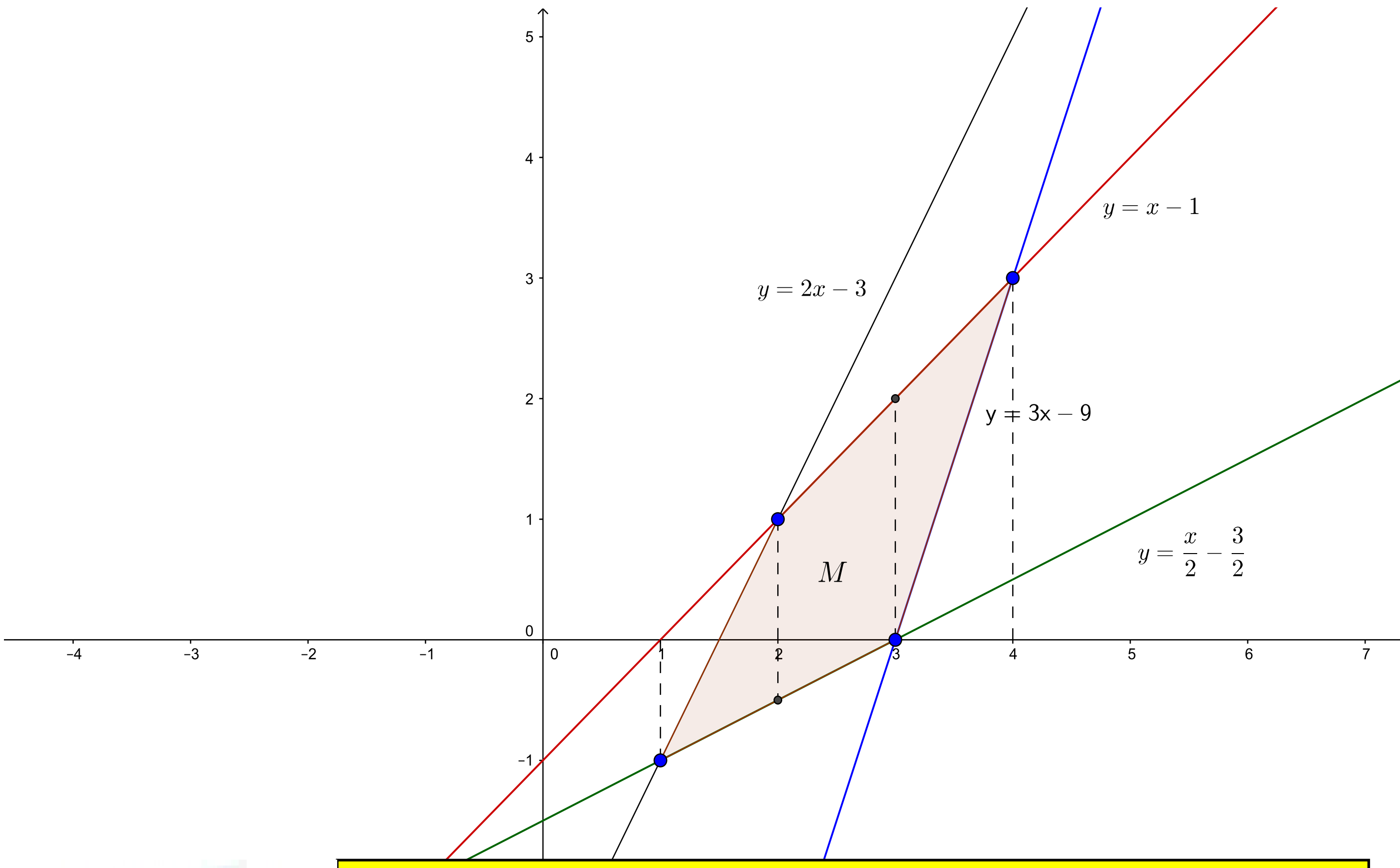
$$f(1,-1)=0$$
$$D_1f(1,-1)=\left.4x^3\right|_{(x,y)=(1,-1)}=4,\ D_2f(1,-1)=\left.-4y^3\right|_{(x,y)=(1,-1)}=4$$
$$D_{11}f(1,-1)=\left.12x^2\right|_{(x,y)=(1,-1)}=12,\ D_{12}f(1,-1)=0,\ D_{22}f(1,-1)=\left.-12y^2\right|_{(x,y)=(1,-1)}=-12$$
$$D_{111}f(1,-1)=\left.24x\right|_{(x,y)=(1,-1)}=24,\ D_{112}f(1,-1)=D_{221}f(1,-1)=0,\ D_{222}f(1,-1)=\left.-24y\right|_{(x,y)=(1,-1)}=24$$

Entonces

$$P_3(2,1)=0+4\cdot 1+4\cdot 2+\frac{1}{2}(12+0-12\cdot 4)+\frac{1}{6}(24+0+0+24\cdot 8)=30$$

4. **Solución. (c)** Gráficamente (véase figura) se puede ver que la integral viene dada por

$$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{2x-3}dy+\int_2^3 dx\int_{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{x-1}dy+\int_3^4 dx\int_{3x-9}^{x-1}dy$$



- $$\int_1^2 \int_{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{2x-3} dydx = \int_1^2 [y]_{y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{y=2x-3} dx = \int_1^2 (2x-3-(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}))dx$$
$$= \int_1^2 (\frac{3}{2}x - \frac{3}{2})dx$$
$$= \frac{3}{4}$$

- $$\int_2^3 dx \int_{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{x-1} dy = \int_2^3 [y]_{y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{y=x-1} dx = \int_2^3 (x-1-(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}))dx$$
$$= \int_2^3 (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})dx$$
$$= \frac{7}{4}$$

- $$\int_3^4 dx \int_{3x-9}^{x-1} dy = \int_3^4 [y]_{y=3x-9}^{y=x-1} dx = \int_3^4 (x-1-(3x-9))dx$$
$$= \int_3^4 (8-2x)dx$$
$$= 1$$

Luego la integral viene dada por
$$I = \frac{3}{4} + \frac{7}{4} + 1 = \frac{7}{2}$$

5. **Solución. (b)**

La matriz asociada viene dada por
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene dos raíces, $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad doble y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad simple.

- El espacio asociada $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ viene dado

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_1 &= \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = 0\} = G[\{(1,0,0), (0,0,1)\}]
\end{aligned}
$$

- El espacio asociada $\mathbb{E}_2$ asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$ viene dado

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_2 &= \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\} = G[\{(0,1,1)\}]
\end{aligned}
$$

Luego $\{(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ es una base asociada tal que su matriz asociada

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

es diagonal.

6. **Solución. (a)** La matriz asociada a la aplicación f con respecto de $\mathbf{A} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2)\}$ de la base $\mathbf{A}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$.

$Y_B \subset \mathbb{R}^3$ la de su respectiva imagen $f(\mathbf{v})$ con respecto de $\mathbf{B}$ se verifica

$$Y_B = PX_A \tag{1}$$

Si denotamos por $X_{A'} \in \mathbb{R}^2$, $Y_{B'} \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de $\mathbf{v}$, $f(\mathbf{v})$ con respecto de la bases $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ respectivamente entonces sabemos que

$$Y_B = M_{B' \to B} Y_{B'}, \; X_A = M_{A' \to A} X_{A'}$$

en donde $M_{B' \to B}$ matriz de cambio de la base $\mathbf{B}'$ a $\mathbf{B}$ y $M_{A' \to A}$ respectivamente de $\mathbf{A}'$ a $\mathbf{A}$. Sustituyendo estas expresiones en (1) tenemos

$$Y_B = P X_A \to M_{B' \to B} Y_{B'} = P M_{A' \to A} X_{A'} \to Y_B = M_{B' \to B}^{-1} P M_{A' \to A} X_{A'}$$

Por tanto

$$M_{B' \to B}^{-1} P M_{A' \to A}$$

es la matriz de f con respecto de las nuevas bases $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$.

Por definición, la matriz $M_{A' \to A}$ tiene por columnas las coordenadas de $\mathbf{A}'$ con respecto de $\mathbf{A}$, es decir

$$M_{A' \to A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo

$$M_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$M_{B' \to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M_{B \to B'}$$

Finalmente la matriz buscada viene dada por

$$\mathbf{E} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

El vector de coordenadas de $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con respecto de dicha base es

$$T_E = (-1, 1, 1, -1)$$

La matriz de cambio de la base **A** a la base **E** tiene por columnas las coordenadas de los elementos de **A** con respecto de **E**

$$M_{A\to E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su inversa nos da la matriz de cambio de **E** a **A**

$$M_{E\to A} = M_{A\to E}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego las coordenadas de T con respecto de **A** vienen dadas por

$$T_A = M_{E\to A} T_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, se puede ver que

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. **Solución. (c)** Aplicamos la definición directamente

$$\begin{aligned}
D_1 f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^3+t^4-0^3}{t^2+0^2} - 0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3+t^4}{t^3} \\
&= \lim_{t\to 0} 1+t = 1
\end{aligned}$$

9. **Solución. (a)** En general por ser el subespacio generado por dos vectores linealmente independientes el número de ecuaciones viene dado por

$$\dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathbf{S} = 4 - 2 = 2.$$

Dadas las ecuaciones propuestas para ver si son las implícitas basta comprobar que son dos y se anulan los vectores que generan el sistema. Luego descartamos la opción (b). También descartamos la opción (c) ya que

$$x - y - z = 1 - (-1) - 0 = 2 \neq 0$$

Las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ t + y &= 0 \end{aligned}$$

son linealmente independientes y se anulan en $(1,0,1,0)$, $(1,-1,0,1)$. Luego son ecuaciones implícitas.

Si quisieramos calcular las ecuaciones implícitas, considerando un vector genérico

rango

$z \quad 1 \quad 0$

$t \quad 0 \quad 1$

Luego cualquier submatriz de orden 3 tiene determinante 0, y nos proporciona una ecuación implícita. Basta encontrar dos que sean linealmente independientes. En este caso, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = x + y - z = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = t + y = 0$$

que nos darían precisamente las ecuaciones de la opción (a).

10. **Solución. (c)** Calculamos la derivadas parciales aplicando las regla de derivación

$$D_1F(x,y) = D_1\left(\frac{x^2+y}{e^{g(x,y)}}\right) = \frac{2x \cdot e^{g(x,y)} - D_1g(x,y)e^{g(x,y)}(x^2+y)}{e^{2g(x,y)}}$$

$$D_2F(x,y) = D_2\left(\frac{x^2+y}{e^{g(x,y)}}\right) = \frac{1 \cdot e^{g(x,y)} - D_2g(x,y)e^{g(x,y)}(x^2+y)}{e^{2g(x,y)}}$$

Evaluando en el punto $(x,y) = (-1,1)$

$$D_1F(-1,1) = \frac{2(-1) \cdot e^{g(-1,1)} - D_1g(-1,1)e^{g(-1,1)}((-1)^2+1)}{e^{2g(-1,1)}} = \frac{-2e-6e}{e^2} = -\frac{8}{e}$$

$$D_2F(-1,1) = \frac{1 \cdot e^{g(-1,1)} - D_2g(-1,1)e^{g(-1,1)}((-1)^2+1)}{e^{2g(-1,1)}} = \frac{e-8e}{e^2} = -\frac{7}{e}$$

Luego

$$F'(-1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{e} & -\frac{7}{e} \end{pmatrix}$$