ÁLGEBRA LINEAL – 3º PARCIAL
ESPACIO EUCLÍDEO

Nº Matrícula…………………

Apellidos…………………………………………………………………Nombre………………………

Ejercicio 1:

a) (**3** ptos) Decir cuál de las siguientes aplicaciones de $\Re^2 \times \Re^2$ en $\Re$ define un producto escalar en $\Re^2$, en el caso de no definir un producto escalar comprobar el axioma que falla:

a1) $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: esta aplicación SI define un producto escalar en $\Re^2$ ya que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica y con autovalores positivos (los autovalores son 3 y 1).

a2) $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: esta aplicación NO define un producto escalar en $\Re^2$ ya que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene un autovalor negativo (los autovalores son 5 y **-1**) y por tanto, φ NO va a ser definida positiva ya que, por ejemplo, φ((1,1),(1,1)) = -2.

b) (*Este apartado es voluntario y son 2 puntos extra) Demostrar que toda aplicación ortogonal es lineal.

Ejercicio 2: (**5** ptos)

a) Con el producto escalar usual, obtener las coordenadas del vector $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ respecto de la siguiente base ortonormal de $\Re^3$: $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$.

Las coordenadas de un vector respecto de una base ortonormal son los productos escalares del vector por cada uno de los vectores de la base ortonormal. Por tanto, las coordenas del vector $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ respecto de la base ortonormal $B^{ORN} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$ son,

$$\left(\left\langle\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4}\right),\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\rangle,\ \left\langle\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4}\right),\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\rangle,\ \left\langle\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4}\right),\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\rangle\right) = \left(\frac{13}{12\sqrt{3}},\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{12\sqrt{6}}\right)$$

b) En $\Re^3$ se considera el producto escalar < , > cuya matriz de Gram, respecto de la base canónica, es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Hallar una base ortonormal de ($\Re^3$, < ,>):

Para obtener una base ortonormal aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base canónica $B_c=\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\Re^3$. Observando la matriz de Gram que nos dan concluimos que e_1 es ortogonal a e_2 y a e_3, pero e_2 y e_3 no son ortogonales. Por tanto, tomamos $u_1=e_1$, $u_2=e_2$ y

$$u_3 = e_3 - \frac{< e_3,u_2 >}{< u_2,u_2 >}u_2 = (0,0,1) - \frac{< e_3,e_2 >}{< e_2,e_2 >}(0,1,0) = (0,0,1) - \frac{-1}{3}(0,1,0) = (0,\tfrac{1}{3},1)$$. Por tanto,

$$B^{ORN}=\left\{(0,0,1),\frac{1}{\|e_2\|}(0,1,0),\frac{1}{\|(0,\tfrac{1}{3},1)\|}(0,\tfrac{1}{3},1)\right\}=\left\{(0,0,1),\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{(0,\tfrac{1}{3},1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \tfrac{1}{3}\\1\end{pmatrix}}}(0,\tfrac{1}{3},1)\right\}$$

$$=\left\{(0,0,1),\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{\frac{14}{3}}}(0,\tfrac{1}{3},1)\right\}$$

c) Dada la matriz A= $\begin{pmatrix}-5&1\\-1&-3\end{pmatrix}$ obtener J la forma canónica de Jordan de A y las matrices P y P^{-1} tal que $P^{-1}AP=J$.

Como $\sigma(A)=\{-4,\ -4\}$ y $S_{\lambda=-4}=L\{(1,1)\}$, tomamos $v_1=(1,1)$ y v_2 una solución del sistema $\begin{pmatrix}-5+4&1\\-1&-3+4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=\lambda\\y=\lambda+1\end{matrix}$. Por ejemplo, $v_2=(0,1)$. Por tanto,

$$J=\begin{pmatrix}-4&1\\0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-5&1\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&1\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3: (5 ptos)

Sea *f*: $\Re^3\to\Re^3$ una aplicación lineal tal que B= $\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,1),\ e_3=(0,1,-1)\}$ es una base de $\Re^3$ formada por autovectores de *f*, siendo e_1 y e_2 autovectores asociados al autovalor $\lambda=1$ y e_3 autovector asociado a $\lambda=2$:

a) Razonar si *f* es diagonalizable ortogonalmente y obtener la matriz de la aplicación $M_f(B, B)$.

La aplicación *f* es diagonalizable ya que hay una base de $\Re^3$ formada por autovectores de *f* (la base B dada en el enunciado). Pero además, *f* es diagonalizable ortogonalmente ya que los subespacios propios $S_{\lambda=1}=L\{(1,0,0), (0,1,1)\}$ y $S_{\lambda=2}=L\{(0,1,-1)\}$ son ortogonales y por tanto, se puede obtener una base ortonormal de $\Re^3$ formada por autovectores de *f*, como por ejemplo $B^{ORN}=\left\{(1,0,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right\}$.

b) Dada la base B'= $\{u_1=e_1-e_2,\ u_2=e_1+2e_3,\ u_3=e_2-5e_3\}$ obtener la matriz de la aplicación $M_f(B',B)$.

$$\begin{cases}f(e_1)=e_1\\f(e_2)=e_2\\f(e_3)=2e_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(u_1)=f(e_1-e_2)=f(e_1)-f(e_2)=e_1-e_2\\f(u_2)=f(e_1+2e_3)=f(e_1)+2f(e_3)=e_1+4e_3\\f(u_3)=f(e_2-5e_3)=f(e_2)-5f(e_3)=e_2-10e_3\end{cases}\Rightarrow M_f(B',B)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&4&-10\end{pmatrix}$$

c) Obtener la matriz de la aplicación $M_f(B, B_c)$, siendo B_c la base canónica de $\Re^3$.

$$\begin{cases}f(e_1)=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\f(e_2)=e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\f(e_3)=2e_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow M_f(B,B_c)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

d) Obtener la matriz de la aplicación $M_f(B_c, B_c)$.

$$M_f(B_c,B_c)=M_f(B,B_c)MC(B_c,B)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\tfrac{1}{2}&\tfrac{1}{2}\\0&\tfrac{1}{2}&-\tfrac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\tfrac{3}{2}&\tfrac{-1}{2}\\0&\tfrac{-1}{2}&\tfrac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: (**6** ptos)

Sea en $\Re^5$ el subespacio vectorial $S:\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0$.

a) Obtener las ecuaciones de la aplicación P_S proyección ortogonal sobre S.

Primero vamos a obtener la proyección ortogonal sobre $S^{\perp}$ (s.v. ortogonal a S) y a partir de ella la proyección ortogonal sobre S.

$$B_{S^{\perp}}^{ORN} = \left\{ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow p_{S^{\perp}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}(x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -6 & -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_S(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -6 & -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 15 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 12 & 2- & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 15 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 15 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las ecuaciones de la aplicación P_S proyección ortogonal sobre S son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 15 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 12 & 2- & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 15 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 15 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

b) Calcular la imagen del vector (1,2,1,-1,-3) por la proyección ortogonal P_S, es decir, calcular P_S(1,2,1,-1,-3).

P_S(1,2,1,-1,-3)=(0,0,0,0,0) ya que el vector (1,2,1,-1,-3) es ortogonal al s.v. S

c) Calcular los autovalores de P_S y los subespacios propios asociados a dichos autovalores.

σ(P_S) = {1,1,1,1,0}, $S_{\lambda=1} = S$ y $S_{\lambda=0} = S^{\perp}$ = L{(1,2,1,-1,-3)}.

d) Razonar si P_S es diagonalizable ortogonalmente y si P_S es inyectiva.

Toda proyección ortogonal sobre un s.v. S es diagonalizable ortogonalmente ya que los subespacios propios S y $S^{\perp}$ son suplementarios (es decir, la suma da el espacio vectorial total y la intersección da el s.v. trivial cero) y ortogonales. Toda proyección ortogonal sobre un s.v. S distinto del total es NO inyectiva ya que tiene el autovalor λ = 0.

e) Razonar si P_S es una aplicación ortogonal.

Toda aplicación ortogonal es inyectiva y como las proyecciones ortogonales no son inyectivas entonces P_S no es aplicación ortogonal.

Ejercicio 5: (**6** ptos)

a) Construir la matriz y las ecuaciones, respecto de la base canónica, de la simetría respecto del plano $\pi : -x + z = 0$.

Tomamos una base ortonormal del plano π y la ampliamos a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$:

$$B_\pi^{ORN} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0), \right\} \to B_{\mathbb{R}^3}^{ORN} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \right\}$$

Por tanto, la matriz de la simetría respecto de esta base es:

$$M_{S_\pi}(B_{\mathbb{R}^3}^{ORT}, B_{\mathbb{R}^3}^{ORT}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz de la simetría en la base canónica es

$$M_{S_\pi}(B_c, B_c) = MC(B_{\mathbb{R}^3}^{ORT}, B_c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} MC(B_c, B_{\mathbb{R}^3}^{ORT}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la simetría son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = z \\ y' = y \\ z' = x \end{cases}$$

b) Clasificar, dando los elementos geométricos, la aplicación ortogonal cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{es un giro.}$$

El eje de giro es la recta $r = S_{\lambda=1}$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y la amplitud del giro es α tal que $\cos\alpha = \dfrac{\text{traza}(A) - 1}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi}$.