



PRUEBA DE AUTOEVALUACIÓN. Tema 3

Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial. Máster en Ingeniería Industrial.

Pregunta 1. Consideramos la hélice circular dada por las ecuaciones paramétricas $x = \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t, y = \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t, z = \frac{\sqrt{2}}{2}t$. Para el punto correspondiente a $z = 0$, señale cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

- a. Un vector director de su recta tangente es $(0, 1, 1)$.
- b. La ecuación de la recta tangente es $x = -1, z = 1 - \frac{y}{\pi}$.
- c. El vector curvatura es $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$.
- d. No se puede calcular porque no está parametrizada por el arco.
- e. Ninguna de los anteriores.

Solución. Son ciertas la opción a) y la opción c). Primero comprobamos que está parametrizada por el arco. Tenemos

$$\mathbf{x}(s) = \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2}t, \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right),$$

$$\mathbf{x}'(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\|\mathbf{x}'(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1.$$

Como el vector tangente es unitario, está parametrizada por el arco y la opción **d)** es falsa.

Por otro lado, el valor $z = 0$ corresponde a $t = 0$ y a $x = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}0\right) = \cos 0 = 1, y = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}0\right) = \sin 0 = 0$. El punto de la hélice será $(1, 0, 0)$. El vector tangente es

$$\mathbf{x}'(0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}0, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Pero cualquier vector paralelo a este es un vector director de la recta tangente. Por eso, $(0, 1, 1)$ es un vector director de la recta tangente y es correcta la primera opción.

Sin embargo, un vector director de la recta indicada en la segunda opción es $(0, 1, -1)$ que no es paralelo a

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Por eso, la opción **c)** es correcta.



Pregunta 2. Seleccione la opción o las opciones correctas.

- a. La curvatura de una curva regular no puede valer 0.
- b. La curvatura de una curva regular no puede ser negativa.
- c. El radio de curvatura es siempre mayor que 0.
- d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Es correcta la opción c.

La primera opción no es correcta, porque como la curvatura está definida por

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Este valor puede ser 0 o menor que 0, por eso, las dos primeras opciones son falsas.

Por otro lado, el radio de curvatura es

$$r(t) = \frac{1}{|k(t)|},$$

que es siempre mayor que 0. Y la opción c es correcta.

Pregunta 3. Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (e^t, t^2).$$

Entonces

- a. Su radio de curvatura en $(1, 0)$ es 1.
- b. Su curvatura en $(1, 0)$ es 2.
- c. El vector curvatura en $(1, 0)$ es $(0, 2)$.
- d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Son correctas las opciones b y c.

Un vector tangente a la curva en un punto $\mathbf{x}(t)$ es

$$\mathbf{x}'(t) = (e^t, 2t).$$

Además:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(e^t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{e^{2t} + 4t^2}, \\ \mathbf{x}''(t) &= (e^t, 2). \end{aligned}$$

Con estos datos, calculamos la curvatura.

$$\begin{aligned} k(t) &= \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\ &= \begin{vmatrix} e^t & 2t \\ e^t & 2 \end{vmatrix} \frac{1}{(\sqrt{e^{2t} + 4t^2})^3} \\ &= \frac{2e^t - 2te^t}{(e^{2t} + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$r(0) = \frac{1}{|k(0)|} = \frac{1}{2}.$$



Por otro lado, el vector tangente es

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{e^{2t} + 4t^2}} (e^t, 2t).$$

Entonces, el vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{2t} + 4t^2}} (-2t, e^t)$$

y el vector curvatura es

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(t) &= k(t) \mathbf{n}(t) = \frac{2e^t - 2te^t}{(e^{2t} + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{e^{2t} + 4t^2}} (-2t, e^t) \\ &= \left(-2 \frac{2e^t - 2te^t}{(e^{2t} + 4t^2)^2} t, \frac{2e^t - 2te^t}{(e^{2t} + 4t^2)^2} e^t \right). \end{aligned}$$

En $t = 0$, tenemos:

$$\mathbf{k}(0) = k(0) \mathbf{n}(0) = 2 \frac{1}{\sqrt{e^0 + 0}} (0, e^0) = (0, 2).$$

Pregunta 4. Tenemos la siguiente familia de circunferencias

$$x^2 + (y - \lambda^2)^2 = \lambda^2, \quad \lambda > 1.$$

Entonces:

- a. No tiene envolvente.
- b. La envolvente es la curva $x = 2y + 1$.
- c. La envolvente es la curva $x^2 = y + \frac{1}{4}$.
- d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Es correcta la opción c. Primero tenemos que escribir la familia en forma paramétrica. Estas son

$$\mathbf{x}(\lambda, t) = (\lambda \cos t, \lambda \sin t + \lambda^2).$$

Entonces, es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) &= (\cos t, \sin t + 2\lambda), \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) &= (-\lambda \sin t, \lambda \cos t). \end{aligned}$$

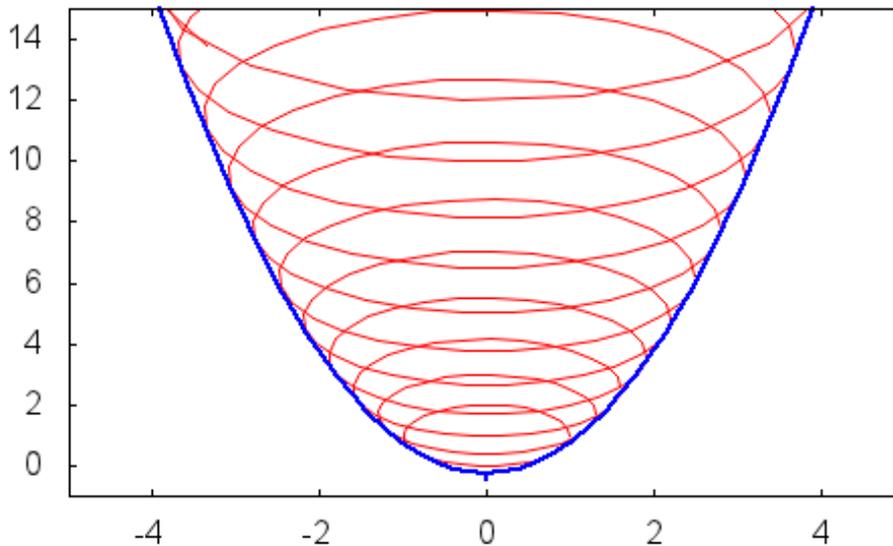
Los puntos de la envolvente deben cumplir

$$\begin{aligned} 0 &= \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \begin{vmatrix} \cos t & -\lambda \sin t \\ \sin t + 2\lambda & \lambda \cos t \end{vmatrix} \\ &= \lambda \cos^2 t + \lambda \sin^2 t + 2\lambda^2 \sin t \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Sustituyendo estos valores de t en la ecuación de la familia, tenemos la envolvente, dada por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1(\lambda) &= \mathbf{x}\left(\lambda, \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right) = \left(\lambda \cos \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right), \lambda \sin \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right) + \lambda^2\right) \\
 &= \left(\lambda \cos \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right), -\frac{\lambda}{2\lambda} + \lambda^2\right) = \left(\lambda \cos \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right), -\frac{1}{2} + \lambda^2\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\lambda\sqrt{4 - \frac{1}{\lambda^2}}, -\frac{1}{2} + \lambda^2\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - 1}, -\frac{1}{2} + \lambda^2\right), \\
 \mathbf{e}_2(\lambda) &= \mathbf{x}\left(\lambda, \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right) = \left(\lambda \cos\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right), \lambda \sin\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right) + \lambda^2\right) \\
 &= \left(-\lambda \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right), -\lambda \frac{-1}{2\lambda} + \lambda^2\right) = \left(-\lambda \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right), -\frac{1}{2} + \lambda^2\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}\lambda\sqrt{4 - \frac{1}{\lambda^2}}, -\frac{1}{2} + \lambda^2\right) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - 1}, -\frac{1}{2} + \lambda^2\right).
 \end{aligned}$$

Su gráfica es La envolvente es una parábola, porque verifica

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2 - 1}\right)^2 = \frac{1}{4}(4\lambda^2 - 1) \\
 &= \lambda^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \lambda^2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- a. Siempre positiva.
- b. Siempre negativa.
- c. Vale $-\frac{ab}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}^3}$.
- d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Son correctas las opciones a y b.

Las ecuaciones implícitas de la hipérbola son

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Calculamos el gradiente, su norma y la matriz Hessiana:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2} \right), \\ \|\nabla f\| &= \frac{2}{ab} \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}, \\ H(f) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la curvatura en un punto (x, y) es

$$\begin{aligned} k(x, y) &= \frac{(ab)^3}{2^3 \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}^3} \begin{pmatrix} \frac{2y}{b^2} & \frac{2x}{a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2x}{a^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(ab)^3}{2^3 \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}^3} \left(8 \frac{y^2}{b^4a^2} - 8 \frac{x^2}{a^4b^2} \right) \\ &= -\frac{8(ab)^3}{2^3 a^2 b^2 \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}^3} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \\ &= -\frac{ab}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}^3} \end{aligned}$$

porque los puntos (x, y) verifican la ecuación de la hipérbola.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70