

Ecuaciones Diferenciales

Estudio cualitativo de sistemas autónomos

Conjuntos omega-límite

Hoja 5

1 Sea el sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} x' = 4x + 4y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -4x + 4y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

1. Expresar el sistema en coordenadas polares.
2. Aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que hay una trayectoria cerrada entre los círculos $r = 1$ y $r = 3$.
3. Hallar la solución general no constante $(x(t), y(t))$ del sistema original y utilizar esto para encontrar una solución periódica correspondiente a la trayectoria cerrada del apartado anterior.
4. Esbozar le diagrama de fases del sistema.

2 Demostrar que el sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = 3x - y - xe^{x^2+y^2} \\ y' = x + 3y - ye^{x^2+y^2} \end{cases}$$

tiene una solución periódica.

3 Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x' = y + x \frac{f(r)}{r}, \\ y' = -x + y \frac{f(r)}{r}, \end{cases}$$

($r^2 = x^2 + y^2$) con $f(r)$ suficientemente regular tiene ciclos límite correspondientes a los ceros de $f(r)$.

Esbozar los diagramas de fase para las funciones:

a) $f(r) = r(r - 3)^3(r^2 - 5r + 4)$, b) $f(r) = r(\mu - r^2)(\mu - r^4)$, $\mu \geq 0$ c) $f(r) = \sin r$.

4 Estudiar la existencia de ciclos límite para los siguientes sistemas autónomos:

a) $\begin{cases} x' = x(x^2 + y^2 - 2x - 3) - y \\ y' = y(x^2 + y^2 - 2x - 3) + x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = y + x(x^2 + 2y^2 - \alpha) \\ y' = -x + y(x^2 + xy + y^2 - \beta). \end{cases}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

siendo f par y g impar, entonces $y(t) = -x(-t)$ satisface la ecuación de mismo tipo:

2. Demostrar que la ecuación de van der Pol

$$x'' + \alpha(x^2 - 1)x' + x = 0$$

posee un único ciclo límite para $\alpha \neq 0$ que es estable para $\alpha > 0$ e inestable para $\alpha < 0$.

3. Demostrar que la ecuación

$$ax'' + b(x^2 - 1)x' + cx = 0$$

se puede transformar en ecuación de van der Pol.

4. Estudiar la existencia de ciclos límites y su estabilidad para

$$x'' + (\alpha x^2 - \beta x^4)x' + x = 0.$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of overlapping light blue and orange geometric shapes, possibly representing a map or abstract design.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70