Proyecto MaTEX

Matrices

Fco Javier González Ortiz

Directorio

6 de junio de 2004 Versin 1.00

Tabla de Contenido

1. Introducción

El concepto de matriz como tabla ordenada de números es muy antiguo, pero fué en el siglo XIX cuando J.J. Sylvester (1814-1897) utilizó el término matriz y Arthur Cayley (1821-1895) sentó las bases del cálculo matricial. En la actualidad el concepto de matriz subyace en todas las ramas de la Matemática y es de una importancia trascendental.

Definición 1.1 *Se denomina matriz de dimensión $m \times n$ a todo conjunto de elementos dispuestos en m filas y n columnas.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada se escribe $A = (a_{ij})_{m \times n}$

1.1. Tipos de Matrices

Matriz fila Es una matriz de dimensión $1 \times n$ o también vector fila

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots\ a_{1n})$$

MaTEX

MATRICES

na

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Matriz Escalonada por filas Es tal que en cada fila el número de ceros que precede al primer elemento no nulo es mayor que en la precedente. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Cuadrada Es aquella que tiene igual número de filas que de columnas. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica Es aquella que tiene los elementos simétricos a la diago-

$$\begin{pmatrix} c & b & x \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad Es aquella que tiene en la diagonal principal unos y el resto todos nulos. Por ejemplo

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Operaciones con matrices

2.1. Suma de matrices.

Sean $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ dos matrices de la misma dimensión. Se define la matriz suma $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$ como la matriz que se obtiene de sumar los elementos correspondientes. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 6 \\ -1 & 5 & 11 & 11 \\ 11 & 17 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

y por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ [illegible] & 5 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades de la suma de matrices.**

1. Estable

$$\forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m\times n} \qquad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m\times n}$$

2. Asociativa

$$\forall \mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in \mathbf{M}_{m\times n} \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$$

3. Elemento neutro o matriz nula. Tiene todos sus elementos nulos.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}, \exists \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{m\times n} \quad / \quad \mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$$

4. Elemento opuesto

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}, \exists \mathbf{A}^{'} \in \mathbf{M}_{m\times n} \quad / \quad \mathbf{A}+\mathbf{A}^{'} = \mathbf{O}$$

5. Conmutativa

$$\forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m\times n} \qquad \mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$$

Ejercicio 1. ¿Cuál es la opuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

2.2. Multiplicación de un número por una matriz.

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $\alpha \in R$ un número real. Se define la matriz $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{m\times n}$ como la matriz que se obtiene de multiplicar los elementos de la matriz por α. Por ejemplo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -3 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades de la multiplicación por un número.**

1. Distributiva respecto a la suma de matrices.

$$\forall \alpha \in R, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m\times n} \qquad \alpha\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\,\mathbf{A} + \alpha\,\mathbf{B}$$

2. Distributiva respecto a la suma de escalares.

$$\forall \alpha\,\beta \in R, \forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n} \qquad (\alpha + \beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{A}$$

3. Asociativa respecto a los escalares.

$$\forall \alpha\,\beta \in R, \forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}, \quad (\alpha\,\beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,(\beta\,\mathbf{A})$$

4. Elemento unidad.

2.3. Producto de matrices.

Sean $A = (a_{ij})_{m\times p}$ y $B = (b_{ij})_{p\times n}$ dos matrices, donde el número de columnas de A coincide con el número de filas de B. Se define la matriz producto $C = A \cdot B = (c_{ij})$ donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

como la matriz de dimensión $m \times n$ donde cada elemento se obtiene de multiplicar su fila y columna correspondientes.

Por ejemplo en el siguiente producto el elemento c_{11} se obtiene de multiplicar la fila primera por la primera columna :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \\ 11 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 2} = \begin{pmatrix} -12 & 13 \\ 58 & 65 \\ 86 & 100 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$c_{11} = 1\,.\,4 + 3\,.\,0 + (-1)\,.\,11 + 5\,.\,(-1) = -12$$

$$c_{12} = 1\,.\,3 + 3\,.\,3 + (-1)\,.\,9 + 5\,.\,(2) = 13$$

Ejemplo 2.1. Calcula el producto de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

Ejemplo 2.2. Calcula el producto de

$$E \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot F \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Siendo $dim(E) = 2 \times 4$ y $dim(F) = 2 \times 2$, el producto no está definido.

$\square$

Ejemplo 2.3. Calcula el producto de

$$C \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot D \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades del producto de matrices.**

1. Asociativa

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

2. Distributiva respecto a la suma de matrices

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

3. Asociativa respecto a la multiplicación por un escalar

$$\forall\alpha\in R,\quad \alpha\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\alpha\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$$

4. Elemento unidad del producto para matrices cuadradas de orden n:

$$\forall\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\,x\,n},\exists\mathbf{I_d}\in\mathbf{M}_{n\,x\,n},\quad/\quad \mathbf{I_d}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{I_d}=\mathbf{A}$$

   Dicho elemento se llama matriz identidad y tiene los elementos de la diagonal principal "1"s y el resto "0"s. Así:

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

5. En general no se cumple la propiedad conmutativa

Ejemplo 2.4. Comprobar que $A \cdot B \neq B \cdot A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Por ello cuando multipliquemos matrices se indicará el orden. Así, si A multiplica a B por la izquierda, AB y si por la derecha BA.

□

▶ **Nota** Hay que tener especial cuidado con la aplicación de la propiedad conmutativa pues es fuente de muchos errores.

Volver Cerrar

3. Matriz Traspuesta.

Dada una matriz A, llamamos matriz traspuesta A^t a la matriz que cambia sus filas por sus columnas. Por ejemplo

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.1. Propiedades de la matriz traspuesta

- ☞ La traspuesta de $A+B$ es $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- ☞ La traspuesta de $A\,B$ es $(AB)^t = B^t\,A^t$.
- ☞ Si A es simétrica $A = A^t$.

Ejercicio 3. Siendo A y C matrices cuadradas demostrar que:

a) $A + A^t$ es simétrica

Ejercicio 4. Dadas las siguientes matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular cuando sea posible las operaciones que se indican:

a) $2\,A$ *b*) $B + C^t$ *c*) $A + B^t$

d) $A + B\,C$ *e*) $G + B\,C$ *f*) $G + C\,B$

g) $F\,B + 5\,D^t$ *h*) $3\,C + 2\,B^t$ *i*) $D^t \cdot C$

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Hallar las matrices 2×2 tales que

a) $AB = 0$

b) $AB = BA$

Ejercicio 6. Sea

Ejercicio 7. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{10} & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcular $A + A^2$

Ejercicio 8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ hallar a y b para que se verifique la ecuación matricial:

$$A^2 + a\,A + b\,I_d = \mathbf{0}$$

siendo I_d la matriz identidad.

Ejercicio 9. Hallar los elementos desconocidos de la matriz B para que AB sea la matriz nula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ u & v \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. Se dice que una matriz cuadrada A, es idempotente si verifica $A^2 = A$. Probar que si A es idempotente la matriz $C = I - A$ también es

4. Matriz Inversa.

Nuestro conocimiento del producto de números reales $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ cuando $\alpha \neq 0$ nos invita a preguntarnos si para una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, habrá otra matriz, **la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$** de forma que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I_d}$$

La respuesta es que no todas las matrices cuadradas tienen inversa. Cuando una matriz tiene inversa decimos que es **invertible** o **regular**, en caso contrario decimos que es **singular** .

El cálculo de la matriz inversa es una cuestión importante. No es obvio. Más adelante, en el capítulo de determinantes se verá como calcular la inversa de una matriz cuando exista.

Ejercicio 12. Comprobar que la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ es } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.1. Unicidad de la inversa. Si existe la inversa de la matriz A, es única

4.1. Propiedades de la matriz Inversa.

1. El producto de dos matrices invertibles es invertible y su inversa es igual producto de las inversas en orden contrario.

$$\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}} \tag{1}$$

En efecto, para comprobarlo multiplicamos

$$\begin{aligned}(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot I_d \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_d\end{aligned}$$

2. La matriz inversa de la traspuesta coincide con al traspuesta de la inversa.

$$\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t} \tag{2}$$

En efecto,

Inicio del Test Indicar la respuesta a las cuestiones sobre matriz inversa:

1. La inversa de $A \cdot B$ es:

☐ No se sabe ☐ $A^{-1}B^{-1}$ ☐ $B^{-1}A^{-1}$

2. La inversa de $A \cdot B \cdot C$ es:

☐ No se sabe ☐ $A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ ☐ $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

3. La inversa de $A + B$ es:

☐ No se sabe ☐ $A^{-1} + B^{-1}$ ☐ $B^{-1} + A^{-1}$

4. La inversa de $A \cdot (B + C)$ es:

☐ $A^{-1}(B + C)^{-1}$ ☐ $(B^{-1} + C^{-1})A^{-1}$ ☐ $(B + C)^{-1}A^{-1}$

5. La expresión $(A^{-1})^{-1} = A$ es:

☐ Cierta ☐ Falsa

Final del Test

Puntos: Correctas

Test. Indica si se cumple la propiedad simplificativa en el producto de matrices, es decir

Inicio del Test Despejar si se puede la matriz X en las ecuaciones:

1. La solución de $X + A = \mathbf{0}$ es:

☐ A ☐ $-A$ ☐ No se puede

2. La solución de $(B + X) = A$ es:

☐ $A - B$ ☐ $B - A$ ☐ No se puede

3. La solución de $X + AB = BA$ es:

☐ $\mathbf{0}$ ☐ $BA - AB$ ☐ No se puede

4. La solución de $X + AA^{-1} = 2I_d$ es:

☐ $\mathbf{0}$ ☐ I_d ☐ No se puede

5. La solución de $AX = B$ es:

☐ $A^{-1}B$ ☐ BA^{-1} ☐ No se puede

6. La solución de $XA = B$ es:

☐ $A^{-1}B$ ☐ BA^{-1} ☐ No se puede

7. La solución de $AX = XB$ es:

☐ $A^{-1}B$ ☐ BA^{-1} ☐ No se puede

Puntos: Correctas

5. Matriz reducida

Dada una matriz A se puede reducir o conseguir una matriz escalonada de la anterior usando las transformaciones elementales que vimos en el capítulo de sistemas. Como ejemplo, hallamos la matriz reducida de A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{f_3 + 2\,f_1}{\overset{f_2 - 3\,f_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{f_3+5/4\,f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

5.1. Transformaciones elementales

¿Qué tipo de transformaciones elementales podemos realizar en una matriz para que siga siendo equivalente?.
Tres cosas podemos realizar en una matriz para conseguir otro equivalente o su matriz reducida escalonada:

☞ Intercambiar de posición dos filas entre si.

Ejemplo 5.1. Hallar la matriz reducida de la matriz A.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $f_2 - 2\,f_1$ y $f_3 - 3\,f_1$. □

Ejemplo 5.2. Hallar la matriz reducida de la matriz A.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & -14 & 20 & -8 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

(1) $f_2 - 3\,f_1$, $f_2 + 2\,f_1$ y $f_2 - 2\,f_1$.

(2) $3\,f + 5\,f$ y $3\,f + 2\,f$

Al número de filas no nulas de la matriz reducida o escalonada le llamamos rango de la matriz.

5.2. Rango de una matriz

> Llamamos rango de la matriz,
>
> - Al número de filas no nulas de la matriz reducida o escalonada, ó
> - Al número de filas linealmente independientes de la matriz.

Ejemplo 5.3. Escribir una matriz $A_{2\times 2}$ de rango 1.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 1$$

□

Ejemplo 5.4. Escribir una matriz $B_{3\times 3}$ de rango 2.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.5. Hallar el rango de la matriz A.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 1$$

(1) $f_2 - 2\,f_1$ y $f_3 - 3\,f_1$. □

Ejemplo 5.6. Hallar el rango de la matriz A.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 2$$

(1) $f_2 - 2\,f_1$ y $f_3 - 3\,f_1$. □

Ejemplo 5.7. Hallar el rango de la matriz A.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 3$$

MaTEX
MATRICES
Volver Cerrar

6. Ejercicios

Ejercicio 14. Calcular por inducción, respecto de n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Ejercicio 15. Calcular por inducción, respecto de n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Ejercicio 16. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ hallar x e y para que se cumpla

$$A^2 - x\,A - y\,I = 0$$

Ejercicio 17. Estudiar el rango de las matrices:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad b)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$a)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\ D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$

Ejercicio 19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, tales que $X\,A = I$, donde I es la matriz unidad de orden 2.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. La matriz opuesta de A cumple

$$A + (-A) = \mathbf{0}$$

luego

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1

Volver Cerrar

Ejercicio 2.

a) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + A\,B + B\,A + B^2$

b) $(A+B)(A-B) = A^2 - A\,B + B\,A - B^2$

c)

$$\begin{aligned} A(B+I_d) - (B+I_d)A =& AB + AI_d - BA - I_dA \\ =& AB + A - BA - A \\ =& AB - BA \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} A^2 - A(I_d + A) =& A^2 - AI_d - A^2 \\ =& A^2 - A - A^2 \\ =& -A \end{aligned}$$

Importante. Observar que no se ha simplificado $AB - BA$ pues en general se tiene que

$$AB \neq BA$$

Ejercicio 2

Volver Cerrar

Ejercicio 3.

a) $A + A^t$ es simétrica pues

$$(A+A^t)^t = A^t+(A^t)^t = A^t+A = A+A^t \qquad \text{(la suma es conmutativa)}$$

b) $A\,A^t$ es simétrica pues

$$(A\,A^t)^t = (A^t)^t\,(A^t) = A\,A^t$$

c) Si A es simétrica entonces $C^t\,A\,C$ es simétrica pues

$$\begin{aligned}(C^t\,A\,C)^t &= C^t\,A^t\,(C^t)^t\\ &= C^t\,A^t\,C\\ &= C^t\,A\,C\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4.

a) $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $B + C^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

c) No es posible, pues $dim(A) = 2 \times 2$ y $dim(B^t) = 3 \times 2$.

d) $A + B\,C = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) No se pueden sumar matrices de distinto orden, pues

$$dim(G) = 3 \times 3 \neq dim(B_{2\times 3} \cdot C_{3\times 2}) = 2 \times 2$$

f) $G + C \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 4 \\ -5 & 4 & 9 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

g) $F \cdot B + 5\,D^t = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 32 \end{pmatrix}$

h) $3\,C + 2\,B^t = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5. Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a) $AB = 0$, luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$a = b = c = d = 0 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix}$$

Igualando se obtiene $\boxed{a = d}$ y $\boxed{b = 0}$, quedando las matrices buscadas de la forma

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$$

Volver Cerrar

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A\,A^t = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+9 & 2a-12 \\ 2a-12 & 20 \end{pmatrix}$$

Si $A\,A^t$ es una matriz diagonal entonces $2a - 12 = 0 \Longrightarrow a = 6$.

Ejercicio 6

Ejercicio 7.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & 1 & 0 \\ \frac{2}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & 1 & 0 \\ \frac{2}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & 2 & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix} 14 + 2a + b & 5 + 5a \\ 2 + 2a & 11 - a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obteniendo $a = -1$ y $b = -12$. Ejercicio 8

Ejercicio 9.

$$A \cdot B = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2 & y+4 \\ 2x+3-u & 2y+6-v \\ 1+u & 2+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando queda el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+2=0 \\ y+4=0 \\ 2x+3-u=0 \\ 2y+6-v=0 \\ 1+u=0 \\ 2+v=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x=-2 \\ y=-4 \\ \\ \\ u=-1 \\ v=-2 \end{array}$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10.

$$
\begin{aligned}
C^2 &= (I_d - A)^2 = \\
&= (I_d - A)(I_d - A) = \\
&= I_d^2 - I_d \cdot A - A \cdot I_d + A^2 = \\
&= I_d - A - A + A^2 = \\
&= I_d - A - A + A = \\
&= I_d - A = C
\end{aligned}
$$

Ejercicio 10

Ejercicio 11.

$$\begin{aligned} B^2 &= (2A - I_d)(2A - I_d) & (B = 2A - I) \\ &= 4\,A^2 - 2A \cdot I_d - 2I_d \cdot A + I_d^2 & (A^2 = A) \\ &= 4A - 2A - 2A + I_d = I_d \end{aligned}$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12. Comprobamos que $A \cdot A^{-1} = I_2$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12

Prueba del Teorema 4.1. Supongamos que hay dos inversas A_1^{-1} y A_2^{-1}. A partir de

$$I_d = A \cdot A_2^{-1} \qquad \text{multiplicando por } A_1^{-1}$$

$$\begin{aligned} A_1^{-1} &= A_1^{-1} \cdot (A \cdot A_2^{-1}) \qquad \text{por asociativa} \\ A_1^{-1} &= (A_1^{-1} \cdot A) \cdot A_2^{-1} = I_d \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1} \end{aligned}$$

Se concluye que $A_1^{-1} = A_2^{-1}$. Luego si existe la inversa debe ser única. ◀

Ejercicio 14.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Hacemos como hipótesis de inducción para A^n:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

y comprobamos que:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14

Volver Cerrar

Ejercicio 15.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indagamos la secuencia $1, 3, 6, 10, \cdots$,

n	1	2	3	4	$\cdots$	n
elemento a_{13}	1	3	6	10	$\cdots$	
	$\frac{2 \cdot 1}{2}$	$\frac{3 \cdot 2}{2}$	$\frac{4 \cdot 2}{2}$	$\frac{5 \cdot 2}{2}$	$\cdots$	$\frac{(n+1)n}{2}$

y tenemos como hipótesis de inducción para A^n:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En efecto:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15

Volver Cerrar

Ejercicio 16.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - x\,A - y\,I = \begin{pmatrix} -2 - 2x - y & 9 - 3x \\ -6 + 2x & -5 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -2 - 2x - y = 0 \\ 9 - 3x = 0 \\ -6 + 2x = 0 \\ -5 - x - y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{x = 3} \qquad \boxed{y = -8}$$

Ejercicio 16

Ejercicio 17.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz es $r(A) = 2$. (1) Efectuamos $f_3 - f_2$, $f_2 - f_1$
(2) $f_3 - f_2$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz es $r(B) = 3$. (1) Efectuamos $f_2 - 2f_1$, $f_3 - 3f_1$ y $f_4 - 2f_1$
(2) Efectuamos $f_3 - f_2$

Ejercicio 17

Ejercicio 18.

a)

$$C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&2\\2&1&k\end{pmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&3\\0&-1&k+2\end{pmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&3\\0&0&2k-2\end{pmatrix}$$

El rango depende de $2k-2=0\Longrightarrow k=1$.

$$\begin{cases}k=1, & r(C)=2\\ k\neq 1 & r(C)=3\end{cases}$$

(1) Efectuamos f_2-f_1, f_2-2f_1
(2) $2f_3-f_2$

b)

$$D=\begin{pmatrix}2&4&-1\\-2&3&1\\1&2&k\end{pmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&7&0\\0&0&2k+1\end{pmatrix}$$

El rango depende de $2k+1=0\Longrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$. (1) Efectuamos f_2+f_1, $2f_3-f_1$

Ejercicio 19.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queda un sistema lineal de 4 ecuaciones y 6 incógnitas, compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{c} a+b-2c=1 \\ -b+2c=0 \\ d+e-2f=0 \\ -e+2f=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1 \\ b=2c \\ d=1 \\ e=2f-1 \end{array}$$

Todas las soluciones se pueden escribir:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2c & c \\ 1 & 2f-1 & f \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19

Soluciones a los Tests

Solución al Test: La propiedad simplificativa en el producto de matrices,

$$A\,B = A\,C \quad \Rightarrow \quad B = C$$

solo se cumple cuando existe A^{-1}. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$A \cdot B = A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sin embargo

$$B \neq C$$

Final del Test

Índice alfabético