Tema 5: Espacio euclídeo. Isometrías

José M. Salazar

Noviembre de 2016

Tema 5: Espacio euclídeo. Isometrías

- Lección 5. Espacio euclídeo. Isometrías.

Índice

Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo

Definición (Producto escalar)

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ una aplicación que verifica:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ *para todo* $u, v \in V$.
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$.
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle u, u\rangle > 0$ *para todo* $u \neq \bar{0}$.

Diremos que la aplicación determina un producto escalar *asociado a V. El par* $(V, \langle\, , \rangle)$ *es un* espacio vectorial euclídeo.

Propiedades y ejemplo

Propiedades

Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo. Entonces:*

- $\langle v, \bar{0}\rangle = 0$ *para todo* $v \in V$.
- $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $\langle v, v\rangle = 0$ *si y sólo si* $v = \bar{0}$.

Ejemplo (Producto escalar usual)

Un ejemplo de espacio vectorial euclídeo es $\mathbb{R}^n$ *con el* producto escalar usual *que se define del siguiente modo:*

Matriz de Gram

Definición (Matriz de Gram)

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\langle \, , \, \rangle$ un producto escalar asociado. Dada una base de V, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, denotamos $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Llamamos matriz de Gram *respecto de B a la matriz $A = (a_{ij})$.*

Por la propiedad 1 del producto escalar, A es una matriz simétrica.

Representación matricial del producto escalar

Una vez conocida A, es inmediato calcular $\langle x, y\rangle$ para cualesquiera dos vectores $x, y \in V$ haciendo uso de dicha matriz. En efecto, si x e y tienen coordenadas con respecto a B

$$X_B = (x_1, \dots, x_n) \qquad Y_B = (y_1, \dots, y_n),$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = X^t A Y \end{aligned}$$

siendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. La *expresión matricial del*

Representación matricial del producto escalar

Definición

Una matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ se dice que es definida positiva *si para todo $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq \bar{0}$, se tiene $X^t A X > 0$*

Proposición

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica y definida positiva, entonces

$$\langle X, Y \rangle = X^t A Y, \text{ con } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

determina un producto escalar en $\mathbb{R}^n$. De hecho, todos los productos escalares definidos en $\mathbb{R}^n$ [illegible]

Representación matricial del producto escalar

Los siguientes criterios permiten decidir cuándo una matriz simétrica es definida positiva y, por tanto, determina un producto escalar.

Proposición (Criterio de Sylvester)

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y sea $\Delta_i = Det(A_i)$, donde

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

Entonces A es definida positiva si y solo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

todos los autovalores son positivos.

Norma

Definición (Norma de un vector)

La longitud, norma o módulo *de un vector* $v \in V$ *se define como*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Si $\|v\| = 1$, *se dice que* v *es* unitario.

Propiedades de la norma

Propiedades

- $\|v\| \geq 0$ *y* $\|v\| = 0$ *si y sólo si* $v = \bar{0}$.
- $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y para todo* $v \in V$.
- *Dado* $v \neq \bar{0}$, $\frac{v}{\|v\|}$ *es un vector unitario.*
- *Para todo* $u, v \in V$, $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. *Esta propiedad se conoce como* desigualdad de Cauchy-Schwarz.
- *Para todo* $u, v \in V$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. *Esta propiedad es la* desigualdad triangular *o de Minkowski.*

Ángulo

Definición (Ángulo entre dos vectores)

Para todo par de vectores no nulos $u, v \in V$, el ángulo *entre u y v se define como el único número $\theta \in [0, \pi]$ tal que* $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

Ortogonalidad

Definición (vectores ortogonales. Bases ortogonales)

- *Dados* $u, v \in V$ *no nulos, diremos que son* ortogonales *o* perpendiculares *si* $\langle u, v\rangle = 0$. *Obsérvese que* u, v *son ortogonales si y sólo si* $\cos\theta = 0$, *siendo* θ *el ángulo entre* u *y* v, *lo que es equivalente a decir que* $\theta = \pi/2$.
- *Una* *base* B *de vectores de* V *es* ortogonal *si sus vectores son ortogonales entre sí. De ser también unitarios, se dice que la base es* ortonormal.

Propiedades

Propiedades

- *Si* $\{u_1, \dots, u_k\}$ *son vectores no nulos de* V*, ortogonales entre sí, entonces son linealmente independientes.*
- *Si* $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ *es una base ortogonal de* V*, entonces* $B' = \{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\}$ *es una base ortonormal de* V.

Proposición

Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ *una base ortogonal de* V*. Entonces, dado* $x \in V$,

$$x = \frac{\langle x, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \dots + \frac{\langle x, e_n\rangle}{\|e_n\|^2} e_n$$

Teorema de Gram-Schmidt

Teorema (Gram-Schmidt)

Dada una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ *de un espacio vectorial euclídeo* V*, existe una base ortogonal* $B' = \{e_1, \dots, e_n\}$ *tal que* $L(u_1, \dots, u_r) = L(e_1, \dots, e_r)$ *para todo* $r = 1, \dots, n$*. Los vectores de la base* B' *serán:*

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 \\ e_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 \\ &\vdots \\ e_n &= u_n - \frac{\langle u_n, e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \cdots - \frac{\langle u_n, e_{n-1}\rangle}{\|e_{n-1}\|^2} e_{n-1} \end{aligned}$$

Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal

Definición (Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal)

- *Sea $v \in V$ no nulo y sea W subespacio vectorial de V. Se dice que v es ortogonal a W, $v \perp W$, si $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$.*
- *Dos subespacios vectoriales W_1, W_2 de V se dicen ortogonales, $W_1 \perp W_2$, si para todo $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ se tiene que $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$.*
- *Si W es un subespacio vectorial de V de dimensión $k < n$, el conjunto*

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal

Proposición

En las condiciones de la definición anterior, se tiene:

- $v \neq \bar{0}$ *cumple* $v \perp W$ *si y sólo si es ortogonal a los vectores de una base de* W.
- $W_1 \perp W_2$ *si y sólo si los vectores de una base de* W_1 *son ortogonales a los vectores de una base de* W_2.
- $W^{\perp}$ *es un subespacio vectorial de* V *de dimensión* $n-k$. *De hecho,* $V = W \oplus W^{\perp}$.

Proyección ortogonal

Definición (Proyección ortogonal)

Sea W un subespacio vectorial de V. Como $V = W \oplus W^{\perp}$, todo $v \in V$ se escribe de modo único como $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in W^{\perp}$. El vector w recibe el nombre de proyección ortogonal *de v sobre W y se denota por $w = p_W(v)$, mientras que u es la proyección ortogonal de v sobre $W^{\perp}$ y se escribe $u = p_{W^{\perp}}(v)$.*

Proyección ortogonal

El siguiente resultado proporciona un método rápido para calcular proyecciones ortogonales sobre un subespacio vectorial.

Proposición

Sea W un subespacio vectorial de V y sea $v \in V$. Si $B_W = \{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base ortogonal de W, entonces, la proyección ortogonal de v sobre W es

$$p_W(v) = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \cdots + \frac{\langle v, w_r\rangle}{\|w_r\|^2} w_r$$

Definición de isometría

En esta sección nos interesamos por el estudio de aquellas aplicaciones lineales $f : V \to V'$ definidas entre espacios vectoriales euclídeos que conservan longitudes y ángulos.

Definición (Isometría)

Un homomorfismo $f : V \to V'$, con V y V' espacios vectoriales euclídeos, es una isometría *o* aplicación ortogonal *si conserva el producto escalar, es decir, si*

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \textit{para todo } x, y \in V.$$

Entendemos que el ...

Propiedades

Propiedades

- *f es una isometría si y sólo si $\|x\| = \|f(x)\|$.*
- *Si f es una isometría, el ángulo α entre $x, y \in V$ no nulos y el ángulo β entre $f(x), f(y) \in V'$ coinciden.*
- *Si f es una isometría, f es inyectiva.*
- *Si $f : V \to V'$ es una isometría con $dim(V) = dim(V') = n$, entonces f es un isomorfismo y f^{-1} es una isometría.*
- *Si f es una isometría y $\{u_1, \dots, u_r\}$ son ortogonales (resp. ortonormales), entonces $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ son también ortogonales (resp. ortonormales).*

$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es una base ortonormal de V' entonces f

Caracterización matricial para endomorfismos

A partir de ahora, consideraremos las isometrías $f : V \to V$, con V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita.

Proposición (Caracterización matricial)

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Si B es una base ortonormal de V, entonces f es una isometría si y sólo si su matriz asociada, $A = M(f, B)$, respecto de B es ortogonal, esto es, $A^t = A^{-1}$.

Definición (Transformaciones directas e inversas)

Sea $f : V \to V$ una isometría. Si $\det(f) = 1$, esto es, el

Isometrías en $\mathbb{R}^2$: rotación

Aunque los próximos resultados son válidos para espacios euclídeos de dimensión 2 y 3 cualesquiera y se generalizan fácilmente a espacios de dimensión n, trabajaremos sólo con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ dotados del producto escalar usual.

Teorema (Isometrías de $\mathbb{R}^2$: rotación)

Sea $f \in End(\mathbb{R}^2)$ una isometría. Pueden darse dos situaciones:

i) *Si $det(f) = 1$, para toda base ortonormal B*

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Isometrias en $\mathbb{R}^2$: simetría

Teorema (Isometrías de $\mathbb{R}^2$: simetría)

ii) *Si $det(f) = -1$, para toda base ortonormal B*

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

El valor de α depende de la base elegida. De hecho, existe una base ortonormal $B' = \{v_1, v_2\}$ tal que

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Isometrias en $\mathbb{R}^2$: simetría

Los autovalores 1 y -1 y los autovectores v_1 y v_2 se calculan así:

$$p(t) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - t & sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & -\cos\alpha - t \end{vmatrix} = t^2 - \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 0$$

De modo que $t = \pm 1$. Para $t = 1$, se obtiene el subespacio propio de ecuación

$$(\cos\alpha - 1)x + (sen\,\alpha)y = 0.$$

Con las fórmulas del ángulo doble:

$$\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) - sen^2(\alpha/2)$$

$$-2sen^2(\alpha/2)x + (2sen(\alpha/2)\cos(\alpha/2))y = 0$$

Isometrías en $\mathbb{R}^2$: simetría

Si $sen\,(\alpha/2) \neq 0$, resulta:

$$sen\,(\alpha/2)x - \cos(\alpha/2)y = 0$$

Este autoespacio asociado al autovalor 1 (recta de simetría) es la recta de vector director $v_1 = (\cos(\alpha/2), sen\,(\alpha/2))$.
Al ser la matriz simétrica, el autoespacio asociado al autovalor -1 será perpendicular a v_1, y tendrá como vector director a $v_2 = (-sen\,(\alpha/2), \cos(\alpha/2))$.

Isometrias en $\mathbb{R}^3$: rotación

Teorema (Isometrías de $\mathbb{R}^3$)

Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y una isometría $f \in End(\mathbb{R}^3)$. Pueden darse dos situaciones:

i) *Si $det(f) = 1$, existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que*

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Se dice que f es una rotación de ángulo α alrededor de la recta $L(v_1)$ engendrada por el vector v_1 (autovector con

Isometrias en $\mathbb{R}^3$: rotación compuesta con simetría

Teorema (Isometrías de $\mathbb{R}^3$)

ii) *Si $det(f) = -1$, existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que*

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Aquí, v_1 es autovector con autovalor asociado -1.

- *Si $\alpha = 0$, se dice que f es una* simetría en $\mathbb{R}^3$ *respecto de $L(v_2, v_3)$.*