Métodos Matemáticos en Física

L4E. Método de Fourier: problemas de Sturm-Liouville (según Cap.4, libro APL)

Obtendremos ahora una visión mas amplia de los usos potenciales del método de Fourier.

Siguiendo esta línea, presentaremos una formulación general del problema de Sturm-Liouville

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \qquad \boxed{1}$$

Hemos introducido problema SL con 3 distintos tipos de condiciones de contorno HOMOGENEAS

CC1, CC2, CC3

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$

$$\beta u(L,t) + T\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$

Para unos valores propios, o autovalores, las correspondientes soluciones Funciones propias o autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

+ CC1, CC2, CC3

Comprobamos ortogonalidad de autofunciones para TODOS 3 especies de condiciones de contorno:
Xn, Xm son 2 autofunciones distintas

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0,$$
$$X_m'' + \lambda_m X_m = 0.$$

$*X_m$ y integramos entre 0→L

$*X_n$ y integramos entre 0→L

Restando resultados

$$\int_0^L \left(X_n'' X_m - X_m'' X_n\right) dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^L X_n X_m dx = 0.$$

Integrando por partes 1-er termino:

$$\int_0^L X_n'' X_m \, dx = X_n' X_m \Big|_0^L - \int_0^L X_n' X_m' \, dx$$

$$\int_0^L X_m'' X_n \, dx = X_m' X_n \Big|_0^L - \int_0^L X_m' X_n' \, dx$$

1-er termino:

$$X_n'(L)X_m(L) - X_m'(L)X_n(L) - X_n'(0)X_m(0) + X_m'(0)X_n(0).$$

NOTA: para caso de CC de 3ra especie usamos relación

$$X'_{n,m} = -hX_{n,m}$$

Con h- constante

$$X'_n(L)X_m(L) - X'_m(L)X_n(L) - X'_n(0)X_m(0) + X'_m(0)X_n(0) \boxed{=0}$$

Métodos Matemáticos en Física

L4E Método de Fourier: problemas de Sturm-Liouville (según Cap.4, libro APL)

$$\int_0^L \left(X_n'' X_m - X_m'' X_n\right) dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^L X_n X_m dx = 0.$$

$\Updownarrow$

➔**Para TODOS 3 especies de contorno homogéneas es ZERO**

De aquí se deduce la ortogonalidad:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^L X_n X_m dx = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^L X_n X_m dx = 0, & \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m \\ \displaystyle\int_0^L X_n X_m dx \neq 0, & \text{si } \lambda_n = \lambda_m \end{cases}$$

Signo de autovalores?

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \qquad \boxed{1}$$

Multiplicando por X Ec. 1 y integrando (primer termino → por partes) entre 0→L

$$X'X\Big|_0^L - \int_0^L X'^2 dx + \lambda \int_0^L X^2 dx = 0. \qquad \boxed{2}$$

Autovalores λ son siempre positivos

$$\lambda = \frac{\int_0^L X'^2 dx}{\int_0^L X^2 dx}. \quad >0$$

para CC1,2

EXCEPCION: Autovalor λ=0 es posible solo para solución X=const.

(esto suscede solo para AMBOS CC de segunda especie)

$$\boxed{\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0}$$

Para <u>CC3</u> hay que realizar <u>estudio mas detallado</u>

1. Supongamos que CC3 se dan solo en extremo derecho de cuerda

$$\alpha X'(L) + \beta X(L) = 0.$$

Antes obtuvimos (2)

$$X'X|_0^L - \int_0^L X'^2 dx + \lambda \int_0^L X^2 dx = 0.$$

$$\lambda = \frac{\int_0^L X'^2 dx + \frac{\beta}{\alpha} X^2(L)}{\int_0^L X^2 dx}$$

Como por definición de ecuaciones de recuperación (muelle, cuerda) (ver discusión cap. 4 APL)
β, α >0

$$\boxed{\beta/\alpha > 0}$$

➔ λ no pueden ser negativos

Presencia de autovalores λ positivos también es importante
para que ecuación de onda

para que magnitudes de modos en función del tiempo

$$\ddot{Q}(t) + c^2\lambda Q(t) = 0.$$

NO tenga soluciones disminuyentes exponencialmente con tiempo

Condiciones de contorno homogéneas de segunda especie: expresiones para las auto funciones y los autovalores

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

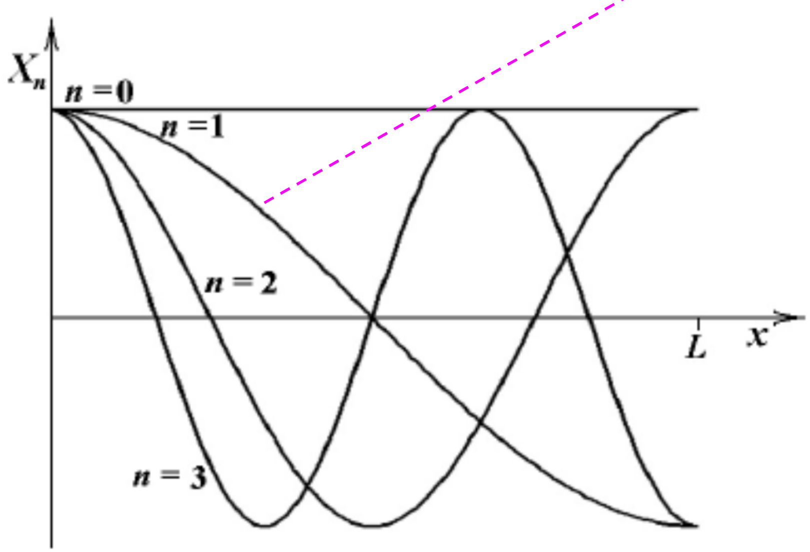
$$X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0.$$

$$X_n(x) = \begin{cases} A_0, & \text{si } \lambda_0 \equiv 0, \\ A_n \cos\sqrt{\lambda_n}x, & \text{si } \lambda_n = (n\pi/L)^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Autovalor CERO es permitido y describe Desplazamiento con velocidad constante

Frecuencia mas baja
Esta relacionada con autovalor

$$\lambda_1 = \pi^2/L^2.$$



CLASE (sin mirar libro, se puede colaborar):
a partir de CC3 (CC homogéneas de tercera especie):
HALLAR autofunciones y autovalores de problema SL

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = -\frac{\alpha}{\beta} X'(L).$$

Caso:
cuerda fija sobre muelle en extremo derecho+ fija en extremo izquierdo

Como y antes, indicamos que por definición de ecuaciones de recuperación (muelle, cuerda) $\beta, \alpha > 0$

1. AUTOFUCIONES

Para satisfacer condición de contorno en x=0

$$X(x) \propto \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x.$$

2. Ec. Para hallar AUTOVALORES

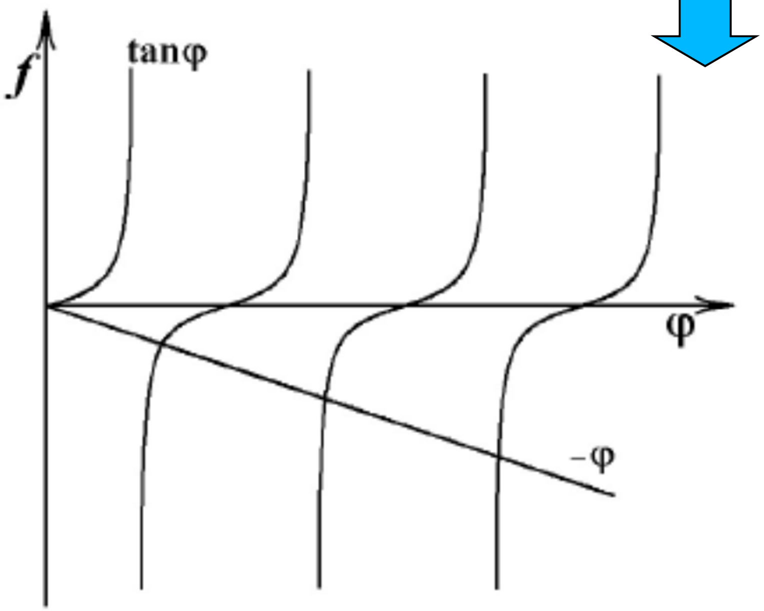
para satisfacer condición de contorno en x=L

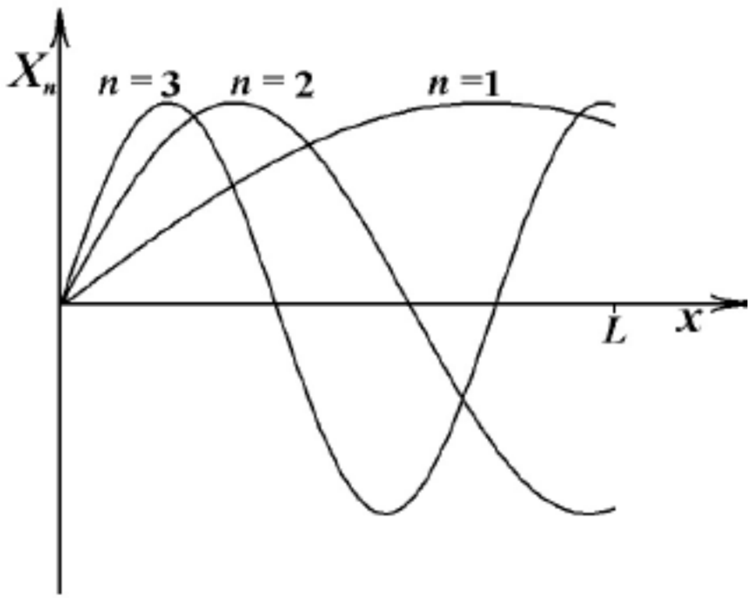
$$\tan\sqrt{\lambda}L = -\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\lambda}.$$

Dichas soluciones son puntos de corte de funciones

$$\boxed{\tan\varphi \text{ y } -(\alpha/\beta L)\varphi} \Leftrightarrow X_n(x) = A_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x,$$

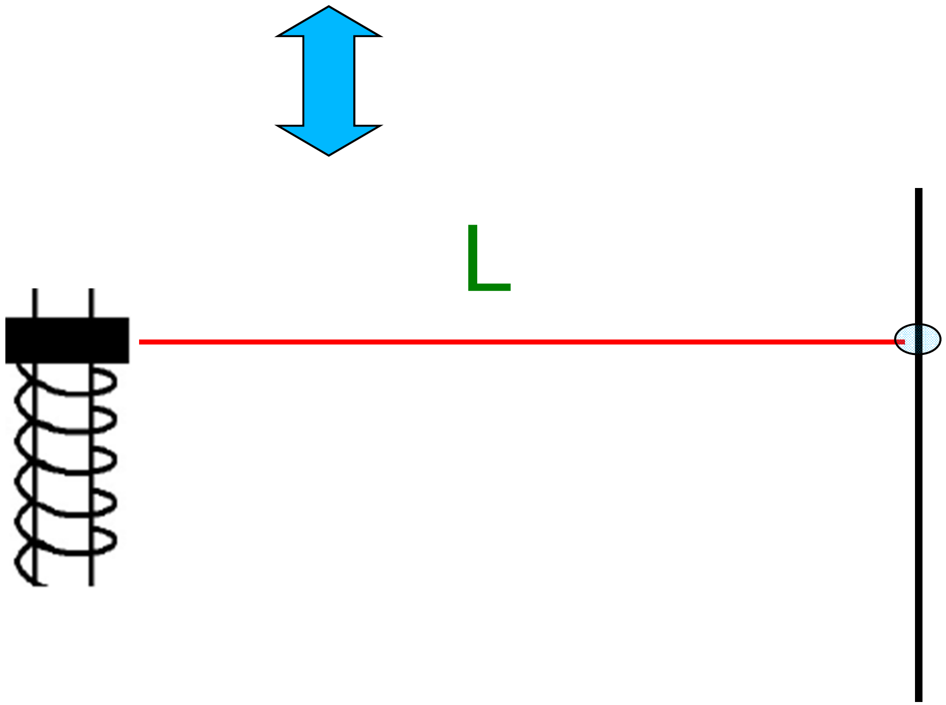
$$\varphi = L^*\sqrt{\lambda_n}$$





D99_CLASE 14_15 (1p):

HALLAR autofunciones y autovalores de problema SL
Para caso de condiciones de contorno homogéneas
de tercera especie (izquierda) y de segunda (derecho) especie



Cuerda no homogénea (densidad NO uniforme)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Condición de ortogonalidad ?

Igual como antes buscamos solución como sumatoria por todos autovalores del problema SL correspondiente

$$u(x,t) = \sum_n Q_n(t) X_n(x),$$

En general problema NO tiene soluciones analíticas

Separar variables y formular problema SL
Cuerda con densidad no homogena y fija en ambos extremos

CLASE (no evaluable, SIN MIRAR LIBROS/APUNTES)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho(x)}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

$$\mathbf{u}_{tt} - \frac{T}{\rho(x)}\mathbf{u}_{xx} = \mathbf{0}$$

Buscamos como $u = Q(t) * X(x)$

Sustituimos en Ec. a resolver para separar variables

$$Q_{tt}X - \frac{T}{\rho(x)}QX_{xx} = 0$$

Dividimos por $(Q * X)$ => $\frac{Q_{tt}}{Q} - \frac{T}{\rho(x)}\frac{X_{xx}}{X} = 0$

Separamos variables para llagar formular problema SL

$$\frac{Q_{tt}}{Q} = \frac{T}{\rho(x)}\frac{X_{xx}}{X} = -\boldsymbol{\lambda}$$

Problema SL para autovalores y autofunciones

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} + \lambda_n \rho(x) X_n(x) = 0.$$

$$X_n(0) = 0, \qquad X_n(L) = 0.$$

Condición de Ortogonalidad ?

$$X_n'' + \lambda_n \rho X_n = 0,$$
$$X_m'' + \lambda_m \rho X_m = 0.$$

Operando como antes: llegamos a

$$\int_0^L (X_n'' X_m - X_m'' X_n)\, dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^L \rho X_n X_m dx = 0.$$

$$\Updownarrow$$

Antes demostramos que con CC1,2,3 el primer termino se anula

Condición de Ortogonalidad: Cuerda NO homogénea

$$\int_0^L \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx \propto \delta_{nm}.$$

De la misma manera como antes
se demuestra que autovalores (cap.4, APL)

$$\lambda = \frac{\int_0^L X'^2(x)dx - X'(L)X(L)}{\int_0^L \rho(x) X^2(x) dx}.$$

$\Leftrightarrow$ NO son negativos

Autofunciones y autovalores: una cuerda homogénea a trozos

Solucionamos problema SL

CONCRETO

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda\rho(x)X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

con

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & \text{si } x < L/2, \\ \rho_2 = 2\rho_1, & \text{si } x > L/2. \end{cases}$$

Buscamos dos soluciones correspondiente a cada trozo

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & \text{si } x < L/2, \\ X_2(x), & \text{si } x > L/2. \end{cases}$$

AutoFunciones que satisfacen a CC en puntos x=0, L son:

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x) = C_1 \operatorname{sen} \mu_1 x, & \text{si } x < L/2, \\ X_2(x) = C_2 \operatorname{sen} \mu_2 (x - L), & \text{si } x > L/2, \end{cases}$$

con

$$\mu_{1,2} \equiv \sqrt{\lambda \rho_{1,2}}$$

Además, imponemos condición de continuidad:

$$X_1(L/2) = X_2(L/2).$$

Además,
La función debe tener derivada continua en punto de unión

$$X_1'(L/2) = X_2'(L/2)$$

PORQUE?

Se obtiene integrando

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda\rho(x)X(x) = 0$$

para

$$[L/2-\varepsilon, L/2+\varepsilon] \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$

Imponiendo DOS condiciones anteriores →

$$C_1 \operatorname{sen} \frac{\mu_1 L}{2} + C_2 \operatorname{sen} \frac{\mu_2 L}{2} = 0,$$
$$C_1 \mu_1 \cos \frac{\mu_1 L}{2} - C_2 \mu_2 \cos \frac{\mu_2 L}{2} = 0.$$

Soluciones serán NO triviales (DET=0) para

$$\mu_2 \operatorname{sen} \frac{\mu_1 L}{2} \cos \frac{\mu_2 L}{2} = -\mu_1 \operatorname{sen} \frac{\mu_2 L}{2} \cos \frac{\mu_1 L}{2}.$$

Dividiendo por $\cos(\mu_1 L/2)\cos(\mu_2 L/2)$

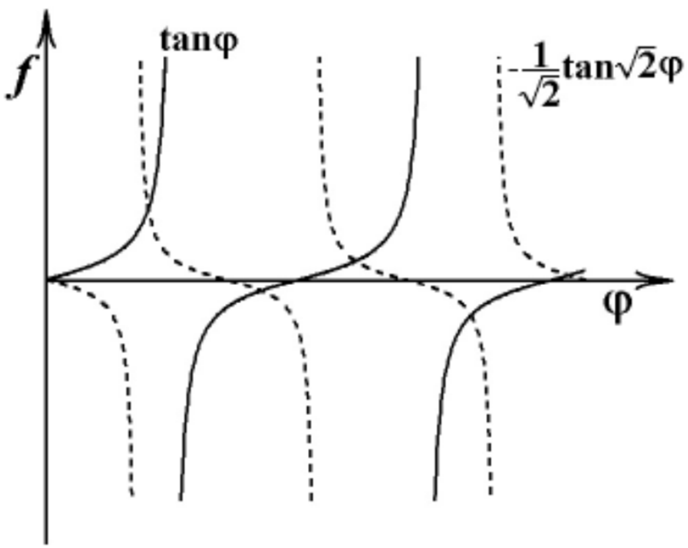
Ecuación para autovalores

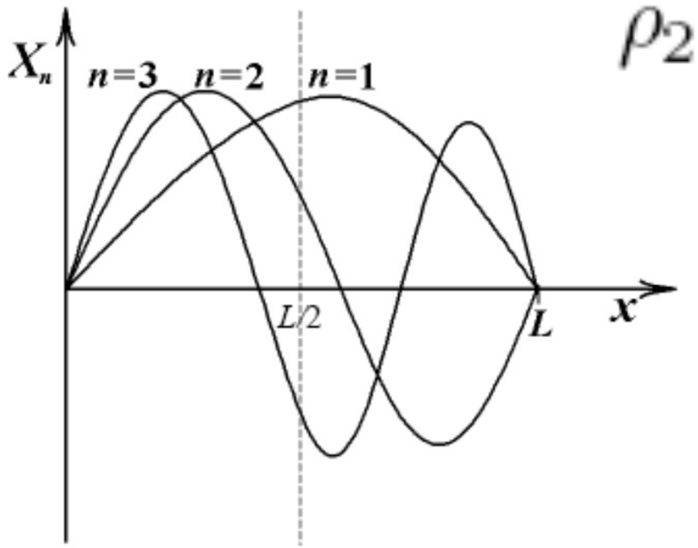
$$\tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\sqrt{2}\varphi$$

con $\varphi \equiv \sqrt{\lambda\rho_1}L/2.$

Recordamos que

$$\rho_2 = 2\rho_1$$





Del sistema anterior:

$$C_1 \operatorname{sen} \frac{\mu_1 L}{2} + C_2 \operatorname{sen} \frac{\mu_2 L}{2} = 0,$$

$$C_1 \mu_1 \cos \frac{\mu_1 L}{2} - C_2 \mu_2 \cos \frac{\mu_2 L}{2} = 0.$$

Podemos ver que:

$$\frac{C_1^{(n)}}{C_2^{(n)}} = -\frac{\operatorname{sen} \sqrt{2}\varphi_n}{\operatorname{sen} \varphi_n}$$

las funciones propias para este problema SL son

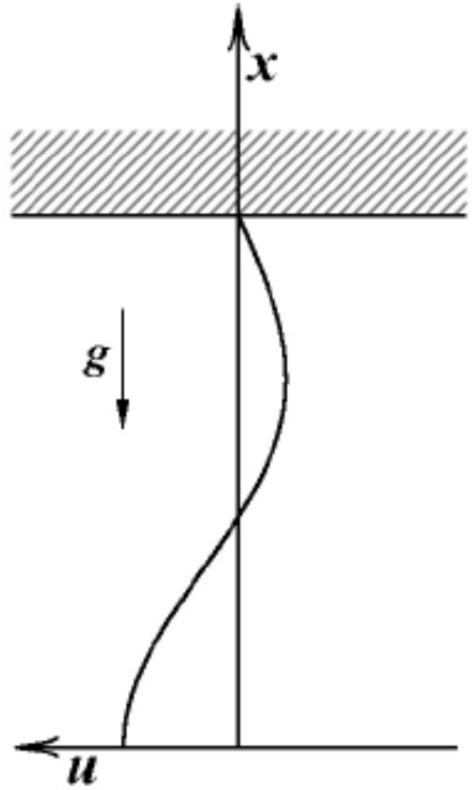
$$X_n(x) = \begin{cases} C_n \operatorname{sen} \dfrac{2\varphi_n x}{L}, & \text{si } x < L/2, \\ C_n \dfrac{\operatorname{sen} \varphi_n}{\operatorname{sen} \sqrt{2}\varphi_n} \operatorname{sen} \dfrac{2\sqrt{2}\varphi_n (L-x)}{L}, & \text{si } x > L/2. \end{cases}$$

De SOL. GENERAL + CI → Sol Final

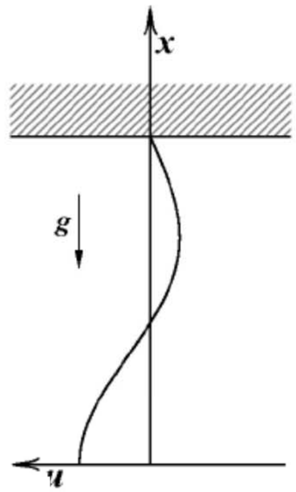
Cuerda suspendida

La función u describe los Desplazamientos transversales

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = 0$$



Con tensión debido a campo gravitatorio



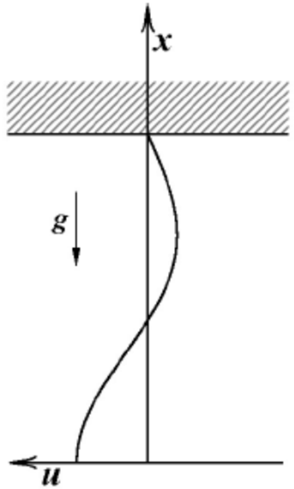
$$T(x) = \rho g x,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = 0.$$

3

problema SL a solucionar (al separar variable):

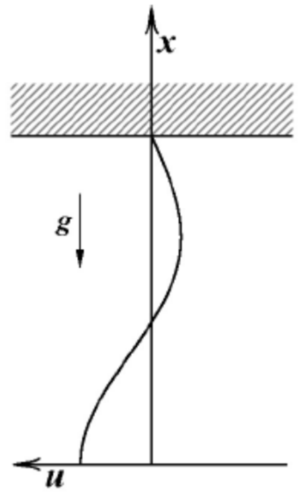
$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dX(x)}{dx}\right)+\lambda X(x)=0$$



Condiciones de contorno para x=L son algo mas complicadas La respuesta estrictamente es que <u>no hay ninguna CC en este caso</u>

La única condición es que auto funciones de (3) sean finitos para x=L

Se comprueba respectivamente ortogonalidad de funciones SL (Cap.4, APL):

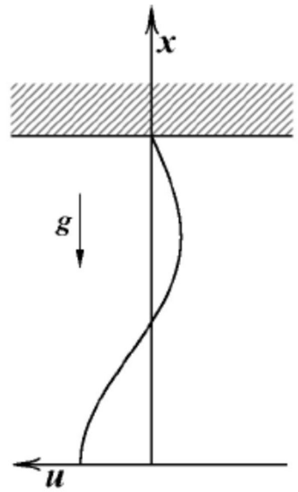


$$\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx \propto \delta_{nm}$$

Asi como de autovalores NO negativos (ver Cap 4-APL)

$$\lambda = \frac{\int_0^L x \left(\frac{dX(x)}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^L X^2(x) dx}.$$

Autovalores y auto funciones



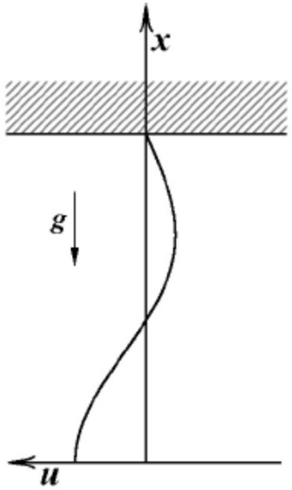
$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dX(x)}{dx}\right)+\lambda X(x)=0$$

Realizando cambio $\xi=\sqrt{x}$

$$\boxed{\frac{d^2X(\xi)}{d^2\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{dX(\xi)}{d\xi}+4\lambda X(\xi)=0}$$

Según veremos adelante, esta ecuación se puede reducir a la ecuación de Bessel de orden cero.

Por ahora nos basta con saber que, para cualquier valor de λ, existen soluciones de esta ecuación que permanecen acotadas en (x = 0)



Autofunciones

$$X(x) = J_0\left(2\sqrt{\lambda x}\right);$$

Autovalores ←→
usando PC

$$X(L) = J_0\left(2\sqrt{\lambda L}\right) = 0$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{4L}, \qquad n = 1, 2, \ldots}$$

n	1	2	3	4	5	6
			$J_0(\mu_n) = 0$			
μ_n	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

COMENTARIO sobre

Modo de buscar solución cuando tenemos Ec. con <u>Condiciones de contorno no son homogéneas</u> ➔

siempre es posible reformular problema como un problema con

<u>una ecuación no homogénea</u> +

<u>unas condiciones de contorno homogéneas</u>

Por ejemplo: cuerda con extremos desplazados en función del tiempo

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(x_0,t) = \mu_2(t)$$

$$\Updownarrow$$

Introducimos función que tiene valores $\mu_{1,2}$ en extremos 1,2

$$U(x,t) = \frac{1}{x_0}\left[(x_0 - x)\,\mu_1(t) + x\mu_2(t)\right]$$

Con cambio ➔

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

Ecuación para v(x,t)➔

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$$

tendrá
CC homogéneas

$$\updownarrow$$

$$v(0,t) = 0, \qquad v(x_0,t) = 0,$$

<u>Que sabemos como resolver!</u>

RECORDATORIO (L4A) de metodo resolver Ec. no homogeneas usando metodo Fourier:

Caso de oscilaciones forzadas de una cuerda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} f(x,t);$$

1

Resolvemos el problema usando coordinadas normales
Buscamos solución u(x,t) en forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) X_n(x). \qquad \boxed{2}$$

Donde X_n son autofunciones ortogonales -soluciones de problema SL

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (3)$$

Como hallar $Q_n(t)$???

Sustituimos (2) en (1) y usamos (3):

$$\sum_n \left[\ddot{Q}_n(t) + c^2\lambda_n Q_n(t)\right] X_n(x) = \frac{1}{\rho} f(x,t) \tag{4}$$

Multiplicando ambo partes de (4) por X_m y integrando entre 0→L

Llegamos a Ec. diferencial a resolver para $Q_n(t)$:

$$\ddot{Q}_n(t) + c^2\lambda_n Q_n(t) = \frac{1}{\rho} f_n(t),$$

Con

$$f_n(t) = \frac{\int_0^L f(x,t) X_n(x)\,dx}{\int_0^L X_n^2(x)\,dx}.$$

Es Ec para oscilador Forzado que sabemos resolver (Sol Particular+General) y usar Cond. Iniciales

Métodos Matemáticos en Física III

1. FORMULACION MATEMATICA

Cond. Contorno $\Rightarrow$ Partial Diff Ecuations $\Leftrightarrow$ PROCESOS Fisicos

2. SOLUCION

Ec. Onda

Ec.Fourier, Laplace, Poisson

Ec. No-hom.

Met. D Alembert

Met. Series Fourier SL

F Green

Met transformada Fourier (sistemas infinitas)

Caracter mas general de problema Sturm Liouville

1. Se introduce operador differencial lineal de segundo orden en forma

$$\mathcal{L}u(x) = p_0(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x) + p_1(x)\frac{d}{dx}u(x) + p_2(x)u(x).$$

$p_0(x)>0$, $p_1(x)>0$, $p_2\,(x)>0$
son funciones REALES definidas en el region de interes

Métodos Matemáticos en Física
L4E4. Método Fourier: Cuerda

2. Se resuelve problema para autofunciones u(x) y y autovalores λ

Donde w(x) es funcion real llamada densidad o funcion de peso

$$\mathscr{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0.$$

Con CC de 1, 2 o 3-er tipo

Métodos Matemáticos en Física
L4E4. Método Fourier: Cuerda

EJMPLOS de problemas SL (ver libro MMF de George Arfken)

Marcadas los que veremos (hemos visto)en este curso)

TABLE 9.1

Equation	$p(x)$	$q(x)$	λ	$w(x)$
Legendre	$1-x^2$	0	$l(l+1)$	1
Shifted Legendre	$x(1-x)$	0	$l(l+1)$	1
Associated Legendre	$1-x^2$	$-m^2/(1-x^2)$	$l(l+1)$	1
Chebyshev I	$(1-x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1-x^2)^{-1/2}$
Shifted Chebyshev I	$[x(1-x)]^{1/2}$	0	n^2	$[x(1-x)]^{-1/2}$
Chebyshev II	$(1-x^2)^{3/2}$	0	$n(n+2)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Ultraspherical (Gegenbauer)	$(1-x^2)^{\alpha+1/2}$	0	$n(n+2\alpha)$	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$
Bessel*	x	$-\dfrac{n^2}{x}$	a^2	x
Laguerre	xe^{-x}	0	α	e^{-x}
Associated Laguerre	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$\alpha-k$	$x^k e^{-x}$
Hermite	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}
Simple harmonic oscillator†	1	0	n^2	1

Métodos Matemáticos en Física
L4E4. Método Fourier: Cuerda

TABLA de Soluciones de problemas SL (Cuerda /Osc. Harmonico) con CC1,2,3 homogeneas

Cada alumno debe crear esta tabla para llevar como “chuleta” en examen parcial

Creada por cada alumno de manera individual

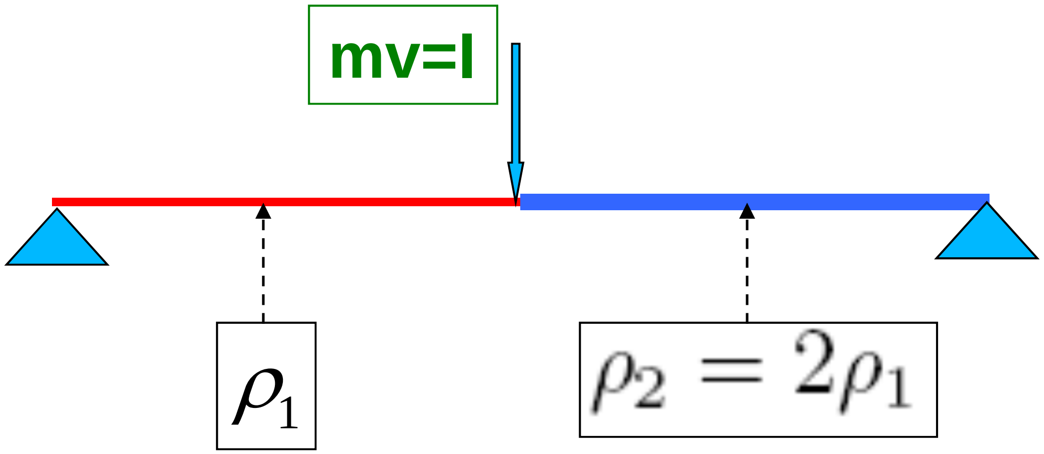
TABLA de Soluciones de problemas SL (Cuerda) con CC1,2,3 homogeneas)

Creada por cada alumno de manera individual

PROBLEMA CLASE: Libro Levanuyk 4.6

A la cuerda NO-HOMOGENEA considerada en esta Leccion se le da un golpe en el punto central que le transfiere un impulso I (antes del golpe la cuerda se encuentra en reposo en la configuración de equilibrio).

Hallar el desplazamiento de la cuerda como función del tiempo.



1. Solucion GENERAL
2. Aplicar CI
3. Hallar coeficientes

1. Solucion GENERAL

Ya hemos usado CI-1
(cuerda en reposo a t=0)

$$u = \sum_n Q_n(t) X_n(x) = \sum_n A_n Sen\omega_n t \times X_n(x)$$

$$X_n(x) = \begin{cases} C_n \operatorname{sen} \dfrac{2\varphi_n x}{L}, & \text{si } x < L/2, \\ C_n \dfrac{\operatorname{sen} \varphi_n}{\operatorname{sen} \sqrt{2}\varphi_n} \operatorname{sen} \dfrac{2\sqrt{2}\varphi_n (L - x)}{L}, & \text{si } x > L/2, \end{cases}$$

NOTA: aquí C_n=1

Aplicamos CI-2

$$u_t(x,0) = \sum_n \omega_n A_n \cos(0) \times X_n(x) = \left[\begin{array}{ll} 0 \quad (x < \frac{L}{2} - \varepsilon) & \\ \dfrac{\mathrm{I}}{2\varepsilon \left[\dfrac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \right]} & (\frac{L}{2} - \varepsilon < x < \frac{L}{2} + \varepsilon) \\ 0 \quad (x > \frac{L}{2} - \varepsilon) & \end{array} \right]$$

Multiplicamos ambas partes por X_n*ρ(x) y integramos de 0→L

$$\omega_n A_n \int_0^L X^2{}_n(x)\rho(x)dx = \frac{\mathrm{I}}{2\varepsilon\left[\frac{(\rho_1+\rho_2)}{2}\right]} X_n(\frac{L}{2})(\varepsilon\rho_1+\varepsilon\rho_2)$$

$$A_n = \frac{I \times X_n(\frac{L}{2})}{\omega_n \int_0^L X^2{}_n(x)\rho(x)dx}$$

Frecuencias propias ?

$$\omega_n = ?$$

$$\frac{Q``}{TQ} = \frac{X``}{\rho(x)X} = -\lambda_n$$

=>

$$Q`` + \lambda_n TQ = 0 \quad => \quad \omega^2{}_n = \lambda_n T$$