Apéndice A

Principio de inducción

A.1. Números naturales

El conjunto de los números naturales se define usando la conocida como **Axiomática de Peano** que data de 1889. Esto es,

I) 0 es un número natural

II) Para cada número natural x existe otro número natural x' llamado sucesor de x, tal que

   a) 0 no es sucesor de ningún número natural

   b) Si $x' = y'$, entonces $x = y$

III) *Axioma de Inducción :* Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica :

   a) $0 \in S$,

   b) Si x está en S, su sucesor también.

   Entonces, $S = \mathbb{N}$.

Antes de continuar, algunos pequeños comentarios sobre estos axiomas:

El primero de ellos postula la existencia de un elemento que consideramos el primero de todos para la ordenación que introduce el segundo postulado. El segundo postulado garantiza la infinitud de $\mathbb{N}$ y, por último, el tercero nos garantiza que el único conjunto que se puede construir a partir de los dos primeros postulados es el de los números naturales.

Usando los axiomas de Peano, es posible definir la suma en $\mathbb{N}$. En la forma habitual, llamemos 1 al sucesor de 0, 2 al sucesor de 1, 3 al sucesor de 2,... De esta forma, podemos definir $n + 0 = n$ y una vez definido $n + m$, definimos $n + m' := (n + m)'$, por ejemplo, $n + 1 = (n + 0)' = n'$. La multiplicación puede también definirse a partir de estos axiomas de la forma que sigue:

- $n \cdot 1 := n$
- una vez definido $n \cdot m$, definimos $n \cdot m' := (n \cdot m) + n$

A pesar de que no entraremos en ello señalemos que, a partir de estas definiciones, se pueden demostrar las propiedades habituales de las operaciones aritméticas suma y producto en $\mathbb{N}$ (conmutatividad de la suma y del producto, asociatividad de suma y producto, existencia de elemento neutro para la suma y elemento identidad para el producto, distributividad,...).

Amén de las operaciones aritméticas ya señaladas, sabemos que en $\mathbb{N}$ se tiene un orden que puede deducirse del segundo postulado de los axiomas de Peano. Señalemos, únicamente, que este orden es el habitual en $\mathbb{N}$ y que con este orden, el conjunto de los números naturales está bien ordenado, es decir, todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ admite mínimo. Obsérvese que el mínimo de $\mathbb{N}$ es 0.

Para finalizar esta pequeña introducción a los números naturales, probemos una ligera variación en nuestro axioma de inducción.

Teorema A.1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica*

i) *$n_0 \in S$ y*

ii) *para todo $n \geq n_0$, $n \in S \Longrightarrow n + 1 \in S$.*

Entonces, $\{x \in \mathbb{N} : x \geq n_0\} \subset S$.

Demostración.– Supongamos que la inclusión no se verifica. En ese caso, el conjunto $X = \{x \in \mathbb{N} : x \geq n_0 \text{ y } x \notin S\}$ es no vacío. Dada la buena ordenación de $\mathbb{N}$, esto implica que el conjunto X posee mínimo, digamos α. Como n_0 pertenece a S, se tendrá que $\alpha > n_0$, o dicho de otra manera, si β es el inmediato antecesor de α, es decir, $\alpha = \beta + 1$, $\beta \geq n_0$. Puesto que α es el mínimo de X y $\beta \geq n_0$, se tendrá $\beta \in S$. Ahora bien, por *2* se tendrá que $\beta + 1 = \alpha \in S$, llegando a una contradicción. ■

A.2. Principio de inducción

El Teorema A.1 se puede trasladar de manera casi inmediata a un resultado de gran utilidad para la prueba de ciertos resultados. Pero antes, una anécdota atribuida al gran matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Cuenta la leyenda (véase, por ejemplo, [1]), que de niño Gauss asistía a la escuela local de Brunswick, dirigida por un maestro que gustaba de la rutina. Un día, el maestro tuvo la feliz idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuesen acabando cada uno esta poco grata tarea, debían poner su pizarra sobre la

[1] Carl B. Boyer. *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial

mesa. A los pocos segundos, Gauss colocó la pizarra sobre su mesa, diciendo: “Ya está”. El maestro le miró con desdén y dejó al resto de los alumnos con su tarea. Cuando acabaron todos, se encontró con la sorpresa de que la única pizarra en la que aparecía el resultado correcto, 5050, era la de Gauss. Obviamente, Gauss había hecho el cálculo mental de sumar la progresión aritmética $1+2+\cdots+99+100$ asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente usando la fórmula

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Esta fórmula es un caso claro del tipo de problemas que podemos atacar con el Teorema A.1. Tenemos una serie de afirmaciones, una por cada número natural, y queremos verificar la veracidad de cada una de ellas. Para ello, definimos el conjunto S como

$$S=\{n\in\mathbb{N}:1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\}$$

Se tiene que $1\in S$ por cuanto

$$1=\frac{1\cdot 2}{2}.$$

Además si suponemos que $n\in S$, es decir,

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

es fácil ver que también es cierto

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

o, lo que es lo mismo, $(n+1)\in S$. Aplicando el Teorema A.1, habremos demostrado que la fórmula es cierta para cualquier número natural mayor o igual que 1.

El mismo razonamiento que hemos hecho con la suma aritmética, puede realizarse para cualquier conjunto de proposiciones que dependan de un parámetro natural.

Corolario A.2 (Principio de inducción) *Supongamos que para cada natural $n\geq n_0$ se tiene una proposición $P(n)$ que puede ser cierta o falsa. Si*

i) *$P(n_0)$ es cierta y*

ii) *para todo $n\geq n_0$, $P(n)$ cierta $\Longrightarrow$ $P(n+1)$ es cierta.*

Entonces, $P(n)$ es cierta para todo $n\geq n_0$.

Asimismo, por argumentos no demasiado complicados, podemos formular el principio de inducción de esta otra manera:

Corolario A.3 *Supongamos que para cada natural $n \geq n_0$ se tiene una proposición $P(n)$ que puede ser cierta o falsa. Si*

i) *$P(n_0)$ es cierta y*

ii) *para todo $n \geq n_0$, $P(m)$ cierta para todo m con $n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow P(n+1)$ es cierta.*

Entonces, $P(n)$ es cierta para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo A.4 (Más ejemplos de aplicación del principio de inducción)
1.- Probar que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \ \text{ para todo } \ n \geq 1$$

a) La fórmula es cierta para $n = 1$, pues $1 = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3$.
b) Supongamos que la fórmula es cierta para n. Si eso implica que la fórmula es cierta para $n+1$, tendríamos probada la fórmula para cualquier natural ≥ 1. Se tiene, aplicando la hipótesis de la veracidad de la fórmula para n (*hipótesis de inducción*), que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2.$$

Unas pequeñas cuentas prueban que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3),$$

con lo que habríamos terminado.

2.- Probar que $3^{2n} - 1$ es múltiplo de 8 para todo natural ≥ 1.
a) Como $3^2 - 1 = 8$, la afirmación es cierta para $n = 1$.
b) Lo que tenemos que ver ahora es

$$3^{2n} - 1 \ \text{ múltiplo de } 8 \ \Longrightarrow 3^{2(n+1)} - 1 \ \text{ múltiplo de } 8$$

Ahora bien,

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 3^2 + 3^2 - 1 = 3^2(3^{2n} - 1) + (3^2 - 1)$$

Aplicando que $3^{2n} - 1$ es múltiplo de 8 (*hipótesis de inducción*)y que $3^2 - 1 = 8$ también, se concluye que $3^{2(n+1)} - 1$ es múltiplo de 8.