



**Universidad
Europea de Madrid**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS EUCLÍDEOS

BASE RECÍPROCA

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

© Todos los derechos de propiedad intelectual de esta obra pertenecen en exclusiva a la Universidad Europea de Madrid, S.L.U. Queda terminantemente prohibida la reproducción, puesta a disposición del público y en general cualquier otra forma de explotación de toda o parte de la misma.

La utilización no autorizada de esta obra, así como los perjuicios ocasionados en los derechos de propiedad intelectual e industrial de la Universidad Europea de Madrid, S.L.U., darán lugar al ejercicio de las acciones que legalmente le correspondan y, en su caso, a las responsabilidades que de dicho

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Índice

Presentación	4
La matriz de Gram	5
Bases recíprocas	6
Existencia y unicidad de la base recíproca	7
Coordenadas contravariantes y covariantes	8
Matriz de Gram como cambio de base	10
Cambio de base de la matriz de Gram	12
La matriz de Gram de	14
Vídeo: esquema de cambio de base	16
Resumen	17



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Presentación

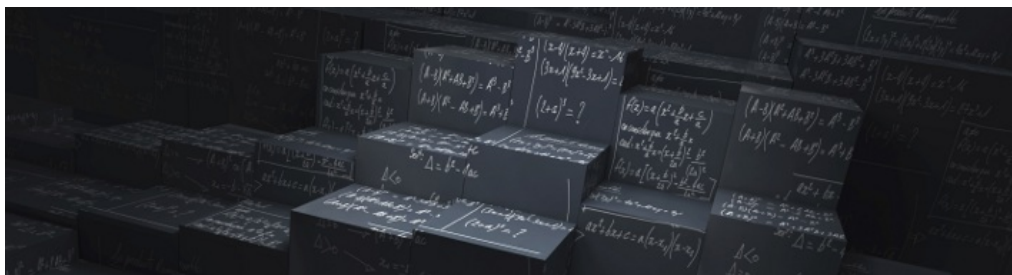
En ocasiones uno no sabe que se tiene que enfrentar a una determinada dificultad hasta que se la encuentra delante. Eso pasó en parte con la geometría y los sistemas de referencia en el siglo XVIII. Se habían descrito sistemas de referencia que ya no eran tan rígidos, tan ortogonales, pero ahora operar con ellos era una cuestión mucho más compleja. Se tuvieron que desarrollar nuevas normas, nuevos sistemas que permitiesen calcular tan bien, y de forma tan segura, como antes con las nuevas referencias.

Las coordenadas curvilíneas trajeron aparejadas los sistemas recíprocos de vectores que permitían resolver cualquier cálculo referido a ellas. Gracias a su inclusión en el álgebra de la matriz de Gram, se podían trazar trayectorias y realizar cálculos en bases cada vez menos regulares.

Nosotros de momento no vamos a estudiar los cálculos complejos sino la herramienta que los hizo posibles, la matriz de Gram.

En este tema aprenderás:

- Qué es una base recíproca, cómo funciona y cómo se llaman sus coordenadas.
- Cómo generar una matriz de Gram de una base determinada y cómo operar con ella y cambiarla de base.
- Las coordenadas contravariantes y covariantes y su relación.
- Y mucho más.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

La matriz de Gram

Como ya hemos visto en temas anteriores, toda operación compleja en álgebra tiene su **método analítico matricial asociado**. El producto escalar no es menos, para llevarlo a cabo utilizaremos la **matriz de Gram**.

En un espacio euclídeo $E^n(\mathfrak{K})$ de base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, se define la matriz fundamental de espacio relativo a la base B, o matriz de Gram del espacio mediante la siguiente expresión:

$$G_B = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica ($G_B = G_B^T$) en la que todos los menores principales son positivos. Cualquier producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda$ se podrá realizar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \mathfrak{K} \Rightarrow (u^1 u^2 \dots u^n) G_B \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \lambda \in \mathfrak{K}$$

Por ejemplo, para el caso particular donde $\dim(E)=3$ siendo $G = \begin{pmatrix} 111 \\ 122 \\ 123 \end{pmatrix}$ la matriz del producto escalar en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Es decir, $G = (g_{ij})_{3 \times 3}$, donde $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \forall i, j = 1, 2, 3$ y \vec{a} el vector de coordenadas covariantes (1,1,0) en dicha base, veamos cómo se calcularía el módulo del vector \vec{a} :

$$|\vec{a}| = \sqrt{(110) \begin{pmatrix} 111 \\ 122 \\ 123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(11-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Bases recíprocas

Pasemos a definir un concepto nuevo dentro de espacios euclídeos: la base recíproca. Para ello, vamos a partir de un número de elementos y conjuntos que debemos conocer:

- Sea $E^n(\mathcal{A})$ un espacio vectorial euclídeo n-dimensional.
- Sea $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base del mismo.

Se denomina **base recíproca** de la B, y la representaremos por **B_R** , al conjunto formado por los n vectores del espacio:

- $B_R = \{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$ que verifican las relaciones:
- $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

En $E^3(\mathcal{A})$ la base B sería de la forma, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mientras que la B' sería, $B_R = \{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\}$.

Se cumpliría la condición, $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$, si:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_1 = 1 & \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{e}^2 \cdot \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}^2 \cdot \vec{e}_2 = 1 & \vec{e}^2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{e}^3 \cdot \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}^3 \cdot \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}^3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \end{array}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Existencia y unicidad de la base recíproca

Empezaremos por demostrar la existencia y unicidad de cada uno de los vectores de B_R .

Buscaremos en primer lugar un vector \bar{e}_1 , que definiremos por sus coordenadas en B, tal que:

$$\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Sea pues

$$\bar{e}^1 = b^{11}\bar{e}_1 + b^{21}\bar{e}_2 + \dots + b^{n1}\bar{e}_n$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}^1 \cdot \bar{e}_1 = 1 &\rightarrow (b^{11}\bar{e}_1 + b^{21}\bar{e}_2 + \dots + b^{n1}\bar{e}_n) \cdot \bar{e}_1 = 1 \rightarrow b^{11}g_{11} + b^{21}g_{21} + \dots + b^{n1}g_{n1} = 1 \\ \bar{e}^1 \cdot \bar{e}_2 = 0 &\rightarrow (b^{11}\bar{e}_1 + b^{21}\bar{e}_2 + \dots + b^{n1}\bar{e}_n) \cdot \bar{e}_2 = 0 \rightarrow b^{11}g_{12} + b^{21}g_{22} + \dots + b^{n1}g_{n2} = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{e}^1 \cdot \bar{e}_n = 0 &\rightarrow (b^{11}\bar{e}_1 + b^{21}\bar{e}_2 + \dots + b^{n1}\bar{e}_n) \cdot \bar{e}_n = 0 \rightarrow b^{11}g_{1n} + b^{21}g_{2n} + \dots + b^{n1}g_{nn} = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Dado que $|G_B| \neq 0$, el sistema (1) es un sistema de Cramer y, por tanto, existe un único vector que cumple las condiciones exigidas al primer vector de la base recíproca de la B. Consideraciones análogas garantizarían la existencia y unicidad de los demás vectores de B_R .

Sean pues:

$$\begin{aligned} \bar{e}^1 &= b^{11}\bar{e}_1 + b^{21}\bar{e}_2 + \dots + b^{n1}\bar{e}_n \\ \bar{e}^2 &= b^{12}\bar{e}_1 + b^{22}\bar{e}_2 + \dots + b^{n2}\bar{e}_n \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{e}^n &= b^{1n}\bar{e}_1 + b^{2n}\bar{e}_2 + \dots + b^{nn}\bar{e}_n \end{aligned}$$

Para obtener los coeficientes b^{ij} $i, j \in I_n$ imponemos que $\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j = \delta^i_j \quad \forall i, j \in I_n$, efectuando los productos escalares a partir de las coordenadas en B de los vectores que intervienen y trabajando en forma matricial.

(Recordemos que si $\bar{x} = x^i \bar{e}_i, \bar{y} = y^j \bar{e}_j \rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^n \end{bmatrix} G_B \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$)

Si llamamos:

$$\begin{pmatrix} b^{11} & b^{21} & \dots & b^{n1} \\ b^{12} & b^{22} & \dots & b^{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{1n} & b^{2n} & \dots & b^{nn} \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Como $|P| = |G_B|^{-1} \neq 0$ los vectores de B_R son linealmente independientes y constituyen por tanto una nueva base del espacio. Además la matriz de cambio de base entre B y B_R será, $P^T = (G_B^{-1})^T = G_B^{-1}$ pudiéndose poner:

$$\| \bar{e}^1 \ \bar{e}^2 \ \dots \ \bar{e}^n \| = \| \bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \dots \ \bar{e}_n \| G_B^{-1} \quad (2)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Coordenadas contravariantes y covariantes

Dado el vector $\vec{x} \in E^n(\mathcal{A})$, se denominan **coordenadas contravariantes** de \vec{x} en B a los n escalares que permiten expresar el vector \vec{x} como combinación lineal de los vectores de B, es decir a los n números reales:

$$(x^1, \dots, x^n) \text{ tales que } \vec{x} = x^i \vec{e}_i.$$

Se denominan **coordenadas covariantes** de \vec{x} en B a los n escalares que permiten expresar el vector \vec{x} como combinación lineal de los vectores de $B_{\mathbb{R}}$, es decir a los n números reales:

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ tales que } \vec{x} = x_i \vec{e}^i.$$

Tenemos que darnos cuenta de que:

- Las llamadas ahora coordenadas contravariantes de \vec{x} en B, son las que en temas anteriores hemos llamado simplemente coordenadas de \vec{x} en B (el *apellido* contravariantes surge de la necesidad de distinguirlas de las covariantes recientemente definidas).
- Hemos definido las coordenadas covariantes de \vec{x} en B como las contravariantes de \vec{x} en $B_{\mathbb{R}}$.

Como veremos ahora, las coordenadas covariantes de \vec{x} en B, pueden obtenerse, una a una, efectuando los productos escalares del vector \vec{x} por los vectores de B de forma ordenada:

$$\forall j \in I_n \quad \vec{x} \cdot \vec{e}_j = (x_i \vec{e}^i) \cdot \vec{e}_j = x_i (\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j) = x_i \delta^i_j = x_j$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análogamente, las coordenadas contravariantes de \vec{x} en B pueden obtenerse, una a una, efectuando los productos escalares del vector \vec{x} por los vectores de $B_{\mathbb{R}}$ de forma ordenada:

$$\forall j \in I_n \quad \vec{x} \cdot \vec{e}^j = (x^i \vec{e}_i) \cdot \vec{e}^j = x^i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j) = x^i \delta_i^j = x^j$$

Es decir, **las coordenadas contravariantes de \vec{x} en B son las covariantes de \vec{x} en $B_{\mathbb{R}}$.**



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Matriz de Gram como cambio de base

Por otra parte, las coordenadas contravariantes y covariantes de \vec{x} en B se pueden relacionar usando los elementos de la matriz fundamental en dicha base:

$$x_j = \vec{x} \cdot \vec{e}_j = (x^i \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = x^i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = x^i g_{ij} .$$

Es decir: $x_j = x^i g_{ij} \quad \forall j \in I_n \quad (i \in I_n \text{ y es sumatorio}).$

Expresiones que desarrolladas toman la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= x^1 g_{11} + x^2 g_{21} + \dots + x^n g_{n1} \\ x_2 &= x^1 g_{12} + x^2 g_{22} + \dots + x^n g_{n2} \\ &\vdots \\ x_n &= x^1 g_{1n} + x^2 g_{2n} + \dots + x^n g_{nn} \end{aligned}$$

Aunque también se pueden disponer en su forma matricial

$$\|x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n\| = \|x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\| G_B \quad (3) , \quad \text{o} \quad \text{bien:}$$

$$\|x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n\| = \|x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\| G_B^{-1} \quad (4) .$$

En lo sucesivo, utilizaremos las siguientes notaciones para simplificar las expresiones que aparezcan:

$$\|x\| = \|x^1 \ \dots \ x^n\| \quad \|x^*\| = \|x_1 \ \dots \ x_n\| \quad \{x\} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \{x^*\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

El producto escalar de vectores puede expresarse, según sabemos, utilizando contravariantes de los vectores en la forma matricial $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|x\| G \{y\}$.

Para el producto escalar, cuando se conocen las covariantes de uno o de los dos vectores que intervienen, resultan las siguientes expresiones:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|x^*\| \{y\} = \|x^*\| G_B^{-1} \{y^*\} = \|x\| \{y^*\}$$

Forma matricial $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|x\| G \{y\}$.

Teniendo en cuenta que con las notaciones establecidas, los resultados (3) y (4) se expresan en la forma matricial abreviada:

$$(3): \|x^*\| = \|x\| G_B \rightarrow \{x^*\} = G \{x\}$$

$$(4): \|x\| = \|x^*\| G_B^{-1} \rightarrow \{x\} = G^{-1} \{x^*\}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cambio de base de la matriz de Gram

Veremos ahora cómo se comportan las coordenadas covariantes y las bases recíprocas ante un cambio de base. Sean:

- $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}; B_R = \{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$
- $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}; B'_R = \{\vec{e}'^1, \dots, \vec{e}'^n\}$

Suponemos conocido el cambio de base de B a B', $\|\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n\| = \|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\|C$, que abreviadamente notaremos por:

$$\|\vec{e}'\| = \|\vec{e}\|C$$

Ya sabemos (por haberlo tratado en el tema espacios vectoriales) cómo se comportan las coordenadas contravariantes ante este cambio de base:

$$\|x\|_{B'} = \|x\|_B(C^{-1})^T.$$

Supondremos también conocido el comportamiento de las matrices fundamentales del espacio:

$$G_{B'} = C^T G_B C$$

Analizaremos, en primer lugar, cómo están relacionadas las covariantes de un vector en ambas bases:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\|x^*\|_{B'} = \|x\|_{B'} G_{B'} = \|x\|_B (C^{-1})^T C^T G_B C = \|x\|_B G_B C = \|x^*\|_B C$$

Luego las coordenadas covariantes se comportan como las base, es decir: el cambio de base

$\|\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n\| = \|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\|_C$, lleva parejo un cambio de base para las covariantes:

$$\|x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_n\|_{B'} = \|x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\|_B C$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

La matriz de Gram de B_R

Pasaremos a analizar ahora el comportamiento de las bases recíprocas de las dadas. Daremos para ello la siguiente forma abreviada al resultado (2) anteriormente definido:

$$\|\vec{e}_R\| = \|\vec{e}\|G_B^{-1}$$

En consecuencia:

$$\|\vec{e}_R\| = \|\vec{e}\|G_B^{-1} = \|\vec{e}\|(C^T G_B C)^{-1} = \|\vec{e}\|C C^{-1} G_B^{-1} (C^T)^{-1} = \|\vec{e}\|G_B^{-1} (C^{-1})^T =$$

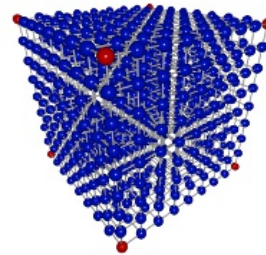
Es decir: el cambio de base $\|\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n\| = \|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\|C$, lleva aparejado el cambio de bases recíprocas:

$$\|\vec{e}'^1 \dots \vec{e}'^n\| = \|\vec{e}^1 \dots \vec{e}^n\|(C^{-1})^T.$$

Señalemos finalmente que la expresión (2), unida al comportamiento de las matrices fundamentales ante un cambio de base, permite obtener que:

$$G_{B_R} = (G_B^{-1})^T G_B G_B^{-1} = G_B^{-1}$$

Es decir: **la matriz fundamental en la base recíproca es la inversa de la fundamental en la base inicial.**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Observa, en último lugar, que si la base B hubiera sido ortonormal ($GB=I$) la expresión (2) nos garantizaría de inmediato que coincidiría con su recíproca, y la expresión (3) nos permitiría identificar las coordenadas covariantes con las contravariantes de cada vector en dicha base.

Expresión (3)

$$\|x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n\| = \|x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\|_{G_B} \quad (3)$$

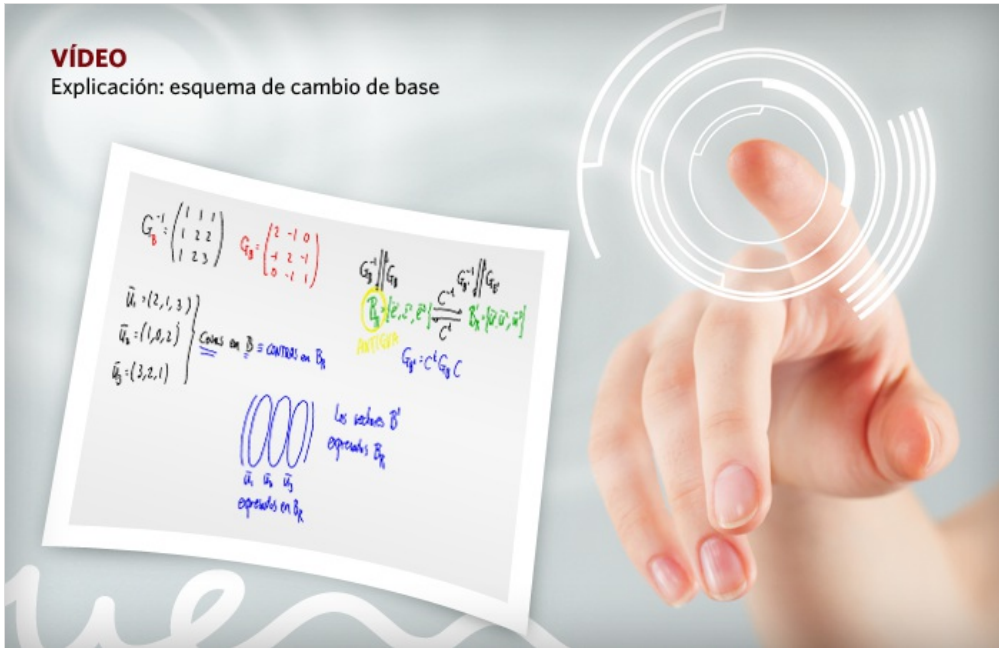


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Vídeo: esquema de cambio de base



VÍDEO

Explicación: esquema de cambio de base

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Resumen

La matriz de Gram: $G_B = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix}$

Producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \mathfrak{R} \Rightarrow (u^1 u^2 \dots u^n) G_B \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \lambda \in \mathfrak{R}$

Bases recíprocas: Sea $E^n(\mathfrak{R})$ un espacio vectorial euclídeo n-dimensional. Sea $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base del mismo. Se denomina **base recíproca** de la B, Y la representaremos por B_R , al conjunto formado por los n vectores del espacio:

$B_R = \{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$ que verifican las relaciones: $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Cambio de base de la matriz de Gram: $G_{B'} = C^T G_B C$

La matriz de Gram de B_R : $G_{B_R} = (G_B^{-1})^T G_B G_B^{-1} = G_B^{-1}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70