

1) Las matrices de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  se suelen escribir en la forma  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Decir si es verdadero o falso que los siguientes subconjuntos de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tienen la estructura que se afirma:

- i)  $(\{A / a_{21} = 0\}, +, \cdot)$  es un cuerpo.
- ii)  $(\{A / a_{12} = 0\}, +, \cdot)$  es un anillo no conmutativo.
- iii)  $(\{A / a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1\}, \cdot)$  es un grupo.
- iv)  $(\{A / a_{11} = a_{22}, a_{12} = a_{21} = 0\}, +, \cdot)$  es un cuerpo.
- v)  $(\{A / a_{ij} \in \mathbb{Z}, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \text{ y } a_{21} \text{ es par}\}, \cdot)$  es un grupo.
- vi)  $(\{A / a_{12} = a_{21}\}, +, \cdot)$  es un anillo.

2) Comprobar que el conjunto  $\{n + m\sqrt{2} / n, m \in \mathbb{Z}\}$  es un anillo con la suma y producto habituales.

3) Comprobar que  $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$  define una operación cerrada en  $C = \{-1 < x < 1\}$ . ¿Es  $(C, *)$  un grupo abeliano?

4) Estudiar si en  $\mathbb{Z}$  la operación  $n * m = n + m + 2mn$  es conmutativa y asociativa.

5) Comprobar que el conjunto de funciones  $C = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  no es un grupo abeliano con la composición. ¿Lo es si exigimos que las funciones sean biyectivas?

6) Comprobar que la operación  $n * m = nm(n + 1)(m + 1)/4$  es cerrada en  $\mathbb{Z}$ . ¿Es conmutativa y asociativa?

7) En el conjunto  $P = \{\diamond, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$  se definen las operaciones  $\oplus$  y  $\otimes$  con las siguientes tablas:

| $\oplus$     | $\diamond$   | $\clubsuit$  | $\spadesuit$ | $\heartsuit$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\diamond$   | $\diamond$   | $\clubsuit$  | $\spadesuit$ | $\heartsuit$ |
| $\clubsuit$  | $\clubsuit$  | $\diamond$   | $\heartsuit$ | $\spadesuit$ |
| $\spadesuit$ | $\spadesuit$ | $\heartsuit$ | $\diamond$   | $\clubsuit$  |
| $\heartsuit$ | $\heartsuit$ | $\spadesuit$ | $\clubsuit$  | $\diamond$   |

| $\otimes$    | $\diamond$ | $\clubsuit$  | $\spadesuit$ | $\heartsuit$ |
|--------------|------------|--------------|--------------|--------------|
| $\diamond$   | $\diamond$ | $\diamond$   | $\diamond$   | $\diamond$   |
| $\clubsuit$  | $\diamond$ | $\clubsuit$  | $\spadesuit$ | $\heartsuit$ |
| $\spadesuit$ | $\diamond$ | $\spadesuit$ | $\heartsuit$ | $\clubsuit$  |
| $\heartsuit$ | $\diamond$ | $\heartsuit$ | $\clubsuit$  | $\spadesuit$ |

Con estas operaciones,  $P$  es un cuerpo.

- i) Comprobar la propiedad asociativa para  $\clubsuit \oplus \spadesuit \oplus \heartsuit$ .
- ii) ¿Cuál es el inverso multiplicativo de  $\spadesuit$ ?
- iii) Resolver la ecuación  $x \oplus x \oplus (\heartsuit \otimes x) = \clubsuit$ .

Nota: El grupo abeliano  $(P, \oplus)$  se llama grupo de Klein o *Viergruppe*. En el libro de

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

