PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. HOJA 1.

1. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $\overline{z}w \neq 1$. Demostrar que

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| < 1 \text{ si } |z| < 1 \text{ y } |w| < 1,$$

y que

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| = 1 \text{ si } |z| = 1 \text{ o } |w| = 1.$$

Indicación: puede suponerse $z \in \mathbb{R}$ (¿por qué?), y entonces basta ver que

$$(r-w)(r-\overline{w}) \leq (1-rw)(1-r\overline{w}),$$

con igualdad en los casos apropiados.

2. Demostrar que para $w \in \mathbb{D}$ fijo, la aplicación

$$F(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$$

tiene las siguientes propiedades:

a) $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$;
b) $F(0) = w$ y $F(w) = 0$;
c) $|F(z)| = 1$ si $|z| = 1$;
d) $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es biyectiva.

3. Demostrar que la proyección estereográfica lleva circunferencias de la esfera $\mathbb{S}^2$ que no contienen al polo norte $N = (0,0,1)$ en circunferencias de $\mathbb{C}$- Demostrar también que si K es una circunferencia de $\mathbb{S}^2$ que contiene a N entonces dicha proyección lleva K en $L \cup \{\infty\}$, donde L es una recta de $\mathbb{C}$.

4. Consideremos la función $f(z) = 1/z$, y sea $L = \{x + iy : Cx + Dy = E\}$ una recta de $\mathbb{C}$. Demostrar que $f(L)$ es un círculo de $\mathbb{C}$ si $E \neq 0$, y es una recta de $\mathbb{C}$ si $E = 0$. Interpretar estos resultados considerando que f esté definida de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$ (con $f(0) = \infty$ y $f(\infty) = 0$).

5. Probar que si $e^{z+w} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces $w = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

6. Recordemos que hemos definido, para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemman para demostrar que $f(z) = e^z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, y que $f'(z) = e^z$.

7. Deducir del ejercicio anterior que las siguientes funciones son holomorfas, y calcular sus derivadas:

a) $\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
b) $\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
c) $\operatorname{senh} z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$
d) $\cosh z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$.

8. Demostrar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$ y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.

9. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Demostrar que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y sólo toma valores reales (es decir $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$) entonces f es constante.

10. Demostrar que si tanto $f = u + iv$ como $\overline{f} := u - iv$ son holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ entonces f es constante.

11. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y además $|f|$ es constante, entonces f es constante.
Indicación: $\overline{f} = |f|^2/f$.

12. Comprobar que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces $|f'| = \|\nabla u\| = \|\nabla v\|$.

13. Comprobar que si $f = u + iv$ es holomorfa entonces ∇v se obtiene rotando $\pi/2$ el vector ∇u. Recíprocamente, si $\nabla v = e^{i\pi/2}\nabla u$ y $f = (u, v)$ es diferenciable en sentido real entonces f es holomorfa.

14. Demostrar que en coordenadas polares las ecuaciones de Cauchy-Riemann se expresan:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

15. Comprobar que, para cada $m \in \mathbb{Z}$, las funciones u, v definidas en coordenadas polares por $u(re^{i\theta}) = r^m \cos(m\theta)$, $v(re^{i\theta}) = r^m \operatorname{sen}(m\theta)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

16. Demostrar que las funciones

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log(iz \pm \sqrt{1 - z^2}),$$

definidas para $z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$, son derivables, y calcular su derivada.

17. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva, con derivada f' continua. Demostrar que

$$\text{área}(f(\Omega)) = \int_\Omega |f'(z)|^2 dxdy.$$

18. Consideremos la función $f(z) = z^2$, y los recintos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$. Dibujar los conjuntos $f(D)$ y $f(E)$, y calcular sus áreas.

Se dice que una función $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *armónica* si es solución de la *ecuación de Laplace*:

$$\Delta u = 0,$$

donde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}$$

y entendemos que u es por lo menos de clase C^2.

19. Demostrar que si $u + iv = f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $u, v \in C^2(\Omega)$ entonces u y v son armónicas.

Si u es armónica en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y v es armónica en Ω y cumple que $u + iv$ es holomorfa en Ω, se dice que v es una *conjugada armónica de u*.

20. Demostrar que la conjugada armónica, si existe, es única salvo una constante aditiva, siempre que Ω sea un abierto conexo.

21. Comprobar que $u(x, y) = xy$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, y hallar una conjugada armónica de u.

22. Generalizar la estrategia de la solución del ejercicio anterior para demostrar que si Ω es un disco abierto, o un rectángulo abierto con lados paralelos a los ejes, y $u(x, y)$ es armónica en Ω, entonces existe v conjugada armónica de u en Ω, y que v es de la forma

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0)ds + C.$$